

ОЛИМПИАДА “БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ” 2014-2015
МАТЕМАТИКА, 7 класс, I тур (заочный)

1. Докажите, что при любых значениях переменных верно равенство
$$(x - y)(x + y) - (z - x + y)(z - x - y) - z(2x - z) = 0$$
(1 балл).
2. График линейной функции отсекает от второй координатной четверти равнобедренный прямоугольный треугольник с длинами катетов, равными 3. Найдите эту функцию. *(1 балл)*
3. Произведение цифр трехзначного числа равно 25. Найти все такие трехзначные числа. *(2 балла)*
4. Вычислите наиболее удобным способом
$$\left(7.52 \cdot \frac{5}{9} - (-11.48) : 1\frac{4}{5}\right) : 0.38. \quad (2 \text{ балла})$$
5. Как от куска материи длиной $\frac{2}{3}$ метра отрезать (оставить) кусок длиной полметра, не имея под рукой линейки. *(2 балла)*
6. Петя подарил каждому из своих друзей одинаковое количество почтовых марок. Сколько друзей у Пети, если всего подарена 361 марка и у Пети меньше 200 друзей? *(2 балла)*
7. Из чисел a, b, c одно положительно, одно отрицательно и одно равно 0. Известно, что $a^2 = b^2(b - c)$. Какое из чисел положительно, какое отрицательно и какое равно 0? Почему? *(2 балла)*
8. ABC - прямоугольный треугольник с гипотенузой AB. На прямой AB по обе стороны от гипотенузы отложены отрезки AK = AC и BM = BC. Найдите угол KCM. *(2 балла)*
9. За 4 часа по течению моторная лодка прошла такое же расстояние, как за 5 часов против течения. Найдите собственную скорость моторной лодки, если скорость течения реки равна 2 км/ч. *(3 балла)*
10. Используя признаки делимости, определите, какую цифру надо подставить вместо *, чтобы число $12340678*5$ делилось на 15 без остатка. *(3 балла)*

ОЛИМПИАДА “БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ” 2014-2015
МАТЕМАТИКА, 8 класс, I тур (заочный)

1. Как посадить 9 деревьев, чтобы нашлось 7 рядов, в каждом из которых ровно 3 дерева? (1 балл)
2. Каждую сторону прямоугольника увеличили на 3 см, в результате чего его площадь увеличилась на 39 см.кв. Найдите периметр исходного прямоугольника. (1 балл)

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 2 \\ -x + y + z = 4 \end{cases}$$

(1 балл)

4. Построить график функции

$$y = \frac{x-5}{x^2-25} + \frac{2x+9}{x+5}$$

(2 балла)

5. Навстречу друг другу одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Мотоциклист прибыл в В через 2ч после встречи с велосипедистом, а велосипедист прибыл в А через 4,5ч после встречи. Сколько часов в пути был каждый? (3 балла)

6. Решить в целых числах $x^2 - 3xy + 2x^2 = 3$ (3 балла)

7. Упростить выражение: $(4x^{-4} - x^{-2} + 6x^{-1} - 9) : (2x^{-4} + x^{-3} - 3x^{-2})$ (3 балла)

8. Вычислить: $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2015} + \sqrt{2013}}$ (3 балла)

9. Какой цифрой оканчивается сумма $54^{35} + 28^{21}$? (4 балла)

10. Доказать, что если число не делится на 7, то его куб, увеличенный или уменьшенный на 1, делится на 7. Установить, в каком случае надо куб числа увеличить, а в каком - уменьшить, чтобы деление нацело было возможным. (4балла)

ОЛИМПИАДА “БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ”
2014-2015
МАТЕМАТИКА, 9 класс, I тур (заочный)

1. Решить уравнение $2x^5 + x^4 - 10x^3 - 5x^2 + 8x + 4 = 0$ (2 балла)
2. Не решая уравнения $9x^2 + 18x - 8 = 0$, найти сумму кубов его корней. (2 балла)
3. Постройте эскиз графика функции $y = \sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{(x-1)^2}$ (2 балла)
4. В параллелограмме ABCD стороны AB и BC равны 4 и 7 соответственно. Биссектрисы AK и BM углов параллелограмма пересекаются в точке O (точки K и M лежат на сторонах BC и AD соответственно). Во сколько раз площадь пятиугольника OKCDM больше площади треугольника OAB? (3 балла)
5. В юности М. Ю. Лермонтов тратил одну денежку на хлеб и квас. Когда цены выросли на 20%, на ту же денежку он приобретал полхлеба и квас. Хватит ли той же денежки хотя бы на квас, если цены ещё раз вырастут на 20%? (3 балла)
6. Двое рабочих могут напилить за день 5 полениц дров, а наколоть 8 полениц. Сколько полениц дров они должны напилить, чтобы успеть наколоть их в тот же день? (3 балла)
7. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - 2(a-3)x + 10 - 6a = 0$ имеет корни одного знака? (3 балла)
8. Какой цифрой оканчивается сумма $54^{35} + 28^{21}$? (3 балла)
9. Окружность, касающаяся гипотенузы прямоугольного треугольника, а также продолжений его обоих катетов, имеет радиус 25 см. Найдите периметр треугольника. (4 балла)

ОЛИМПИАДА “БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ”
2014-2015
МАТЕМАТИКА, 10 класс, I тур (заочный)

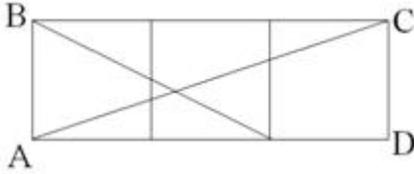
1. Решите уравнение $(x-1)\sqrt{x-5} = 0$ (1 балл)
2. Абсцисса вершины параболы $y = x^2 + 4ax - 5a$ равна 4. Найдите ординату вершины. (1 балл)
3. Число x увеличили на 44%. На сколько процентов увеличилось число $\sqrt{\frac{x}{3}}$? (2 балла)
4. Сплав состоит из Zn и Cu, входящих в него в отношении 1:2, а другой сплав содержит те же металлы в отношении 2:3. Из скольких частей обоих сплавов можно получить третий сплав, содержащий те же металлы в отношении 17:27? (2 балла)
5. При каких значениях числа $3^a a$, $\frac{9a}{2}$ и $3^a - 9$ являются последовательными членами арифметической прогрессии? (3 балла)
6. Доказать, что выражение $3\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) - 8\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 10 \geq 0$ выполняется для любых ненулевых значений переменных. (3 балла)
7. Для каждого c решите уравнение: $\sqrt{x^2 + 2x + c} = x + 1$. (3 балла)
8. Найдите множество значений функции $f(x) = -8x + 6\sqrt{4 - x^2}$. (4 балла)
9. Общая хорда двух пересекающихся окружностей служит для одной из них стороной правильного вписанного четырехугольника, а для другой стороной правильного вписанного шестиугольника. Найдите расстояние между центрами окружностей, если радиус меньшей окружности равен 10 см? (3 балла)
10. Найдите десятизначное число, делящееся на 11111, все цифры которого различны. (5 баллов)

ОЛИМПИАДА “БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ” 2014-2015
МАТЕМАТИКА, 11 класс, I тур (заочный)

1. Найти остаток от деления многочлена $P(x) = x^{253} + x^{85} + x^9 + x^6 + x^5 + x^2 + x$ на $(x-1)$. (1 балл)

2. Решить уравнение $|x^2 - 4| + |x^2 - 1| = 3$. (2 балла)

3. Три квадрата расположены как на рисунке.



Найти величину угла между прямыми AC и BD. (2 балла)

4. Найти целые решения системы: $\begin{cases} x^2 + y - 2 = 0 \\ x + y^2 - 2 = 0 \end{cases}$. (2 балла)

5. При каких значениях параметра a функция $f(x) = \ln((a+1)x^2 - (a^2 - 2)x - (a-1))$ определена для всех $x > 0$? (3 балла)

6. В трапеции ABCD длина основания AD равна $2\sqrt{2}$, а длина основания BC равна $\sqrt{2}$. Угол A = 15° , угол D = 30° . Найдите длину боковой стороны AB. (3 балла)

7. Длины сторон прямоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию, а радиус вписанной в него окружности равен 4. Найти радиус описанной окружности. (3 балла)

8. Решить систему уравнений $\begin{cases} xy + 24 = \frac{x^3}{y} \\ xy - 6 = \frac{y^3}{x} \end{cases}$. (4 балла)

9. Какой остаток от деления на 5 дает число $3^{100}33^{100}333^{100} + 8^{100}88^{100}888^{100}$? (5 баллов)

10. Вычислите

$$\frac{1}{\pi} \left(\arccos \left(\cos \left(\frac{1\pi}{3} \right) \right) \right) + \arccos \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right) + \arccos \left(\cos \left(\frac{3\pi}{3} \right) \right) + \dots + \arccos \left(\cos \left(\frac{300\pi}{3} \right) \right)$$

(5 баллов)