

**Задания отборочного (заочного) тура  
олимпиады «Будущие исследователи – будущее науки»  
по математике**

**9 класс**

**2015-2016 уч.г.**

Выполненное задание **в формате PDF** отправляется  
**вместе с заявкой и тезисами** исследовательской работы  
по электронной почте **kh.read@expd.vniief.ru до 1 декабря 2015 года**

1. Каждое из чисел  $p$  и  $q$  является корнем уравнения  $x^2 + px + q = 0$ . Найдите  $p$  и  $q$ .
2. Является ли рациональным число  $\sqrt{3 - \sqrt{4 + \sqrt{12}}} + \sqrt{3 + \sqrt{4 - \sqrt{12}}}$ ? Ответ обоснуйте.
3. Натуральные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  удовлетворяют условию  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{5}{6}$ . Найдите все возможные значения  $a$ ,  $b$  и  $c$ .
4. Точки  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  лежат соответственно на сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $AD$  параллелограмма  $ABCD$ , причём  $AP : PB = BQ : QC = CR : RD = DS : SA = 3 : 2$ . Найдите площадь четырёхугольника, образованного пересечением отрезков  $AQ$ ,  $BR$ ,  $CS$ ,  $DP$ , если площадь параллелограмма  $ABCD$  равна 1.
5. Один из корней уравнения  $x^{12} - abx + a^2 = 0$  больше двух. Докажите, что  $|b| > 64$ .
6. Путь из села в город идёт сначала по грунтовой дороге, а затем по шоссе. Из села в город в 9 часов утра выехал автомобилист и одновременно с ним из города в село выехал мотоциклист. Автомобилист двигался по шоссе быстрее, чем по грунтовой дороге в  $\frac{3}{2}$  раза, а мотоциклист – в  $\frac{5}{3}$  раза (движение обоих по грунтовой дороге и по шоссе считается равномерным). Они встретились в 12 часов, автомобилист приехал в город в 14 часов 20 минут, а мотоциклист приехал в село в 16 часов. Определите, сможет ли автомобилист приехать в город до 14 часов 40 минут, если он весь путь из села в город будет ехать с первоначальной скоростью.
7. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения  $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y + 3)^2}$ , если известно, что  $2|x| + |y| = 2$ .
8. На 18 деревьях, расположенных по окружности, сидели 18 весёлых чижей (на каждом дереве по чижу). Время от времени два чижа одновременно перелетают на соседние деревья в противоположных направлениях (один по часовой стрелке, другой – против). Могут ли все 18 чижей собраться на одном дереве?

**Задания отборочного (заочного) тура  
олимпиады «Будущие исследователи – будущее науки»  
по математике**

**10 класс**

**2015-2016 уч.г.**

Выполненное задание **в формате PDF** отправляется  
**вместе с заявкой и тезисами** исследовательской работы  
по электронной почте **kh.read@expd.vniief.ru до 1 декабря 2015 года**

1. Найдите значение выражения  $\cos 6\gamma - \cos 2\gamma + 2 \cos 4\gamma$ , если  $\sin \gamma + \sin 3\gamma = 0,7$ .
2. Даны две различные геометрические прогрессии, первые члены которых равны 1, а сумма знаменателей равна  $(-4)$ . Найдите сумму седьмых членов прогрессий, если известно, что сумма шестых членов равна  $(-724)$ .
3. Натуральные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  удовлетворяют условию  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{5}{6}$ . Найдите все возможные значения  $a$ ,  $b$  и  $c$ .
4. Точки  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  лежат соответственно на сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $AD$  параллелограмма  $ABCD$ , причём  $AP:PB = BQ:QC = CR:RD = DS:SA = 3:2$ . Найдите площадь четырёхугольника, образованного пересечением отрезков  $AQ$ ,  $BR$ ,  $CS$ ,  $DP$ , если площадь параллелограмма  $ABCD$  равна 1.
5. Один из корней уравнения  $x^{12} - abx + a^2 = 0$  больше двух. Докажите, что  $|b| > 64$ .
6. Путь из села в город идёт сначала по грунтовой дороге, а затем по шоссе. Из села в город в 9 часов утра выехал автомобилист и одновременно с ним из города в село выехал мотоциклист. Автомобилист двигался по шоссе быстрее, чем по грунтовой дороге в  $\frac{3}{2}$  раза, а мотоциклист – в  $\frac{5}{3}$  раза (движение обоих по грунтовой дороге и по шоссе считается равномерным). Они встретились в 12 часов, автомобилист приехал в город в 14 часов 20 минут, а мотоциклист приехал в село в 16 часов. Определите, сможет ли автомобилист приехать в город до 14 часов 40 минут, если он весь путь из села в город будет ехать с первоначальной скоростью.
7. Найдите наибольшее и наименьшее значение выражения  $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y+3)^2}$ , если известно, что  $2|x| + |y| = 2$ .
8. На 18 деревьях, расположенных по окружности, сидели 18 весёлых чижей (на каждом дереве по чижу). Время от времени два чижа одновременно перелетают на соседние деревья в противоположных направлениях (один по часовой стрелке, другой – против). Могут ли все 18 чижей собраться на одном дереве?
9. Можно ли число 7 представить в виде суммы квадратов трёх рациональных чисел?

**Задания отборочного (заочного) тура  
олимпиады «Будущие исследователи – будущее науки»  
по математике**

**11 класс**

**2015-2016 уч.г.**

Выполненное задание **в формате PDF** отправляется  
**вместе с заявкой и тезисами** исследовательской работы  
по электронной почте **kh.read@expd.vniief.ru до 1 декабря 2015 года**

1. Найдите значение выражения  $\cos 6\gamma - \cos 2\gamma + 2 \cos 4\gamma$ , если  $\sin \gamma + \sin 3\gamma = 0,7$ .
2. Даны две различные геометрические прогрессии, первые члены которых равны 1, а сумма знаменателей равна  $(-4)$ . Найдите сумму седьмых членов прогрессий, если известно, что сумма шестых членов равна  $(-724)$ .
3. В шахматном турнире участвуют 16 человек. В первый день одновременно играют 8 партий. Сколькими способами участников можно разбить на пары?
4. Около окружности описана равнобокая трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  ( $AD > BC$ ). Прямая, параллельная диагонали  $AC$ , пересекает стороны  $AD$  и  $CD$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно, и касается окружности в точке  $P$ . Найдите углы трапеции, если  $MP:PN = k$  ( $k < 1$ ).
5. Один из корней уравнения  $x^{12} - abx + a^2 = 0$  больше двух. Докажите, что  $|b| > 64$ .
6. Путь из села в город идёт сначала по грунтовой дороге, а затем по шоссе. Из села в город в 9 часов утра выехал автомобилист и одновременно с ним из города в село выехал мотоциклист. Автомобилист двигался по шоссе быстрее, чем по грунтовой дороге в  $\frac{3}{2}$  раза, а мотоциклист – в  $\frac{5}{3}$  раза (движение обоих по грунтовой дороге и по шоссе считается равномерным). Они встретились в 12 часов, автомобилист приехал в город в 14 часов 20 минут, а мотоциклист приехал в село в 16 часов. Определите, сможет ли автомобилист приехать в город до 14 часов 40 минут, если он весь путь из села в город будет ехать с первоначальной скоростью.
7. Докажите, что если  $a^2 + b^2 = 1$  и  $c^2 + d^2 = 1$ , то  $|ac - bd| \leq 1$ .
8. На 22 деревьях, расположенных по окружности, сидели 22 весёлых чижа (на каждом дереве по чижу). Время от времени два чижа одновременно перелетают на соседние деревья в противоположных направлениях (один по часовой стрелке, другой – против). Могут ли все 22 чижа собраться на одном дереве?
9. Можно ли число 7 представить в виде суммы квадратов трёх рациональных чисел?