

# ОЛИМПИАДА “БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ – БУДУЩЕЕ НАУКИ” 2017-2018

## Физика, I тур, вариант 1

### РЕШЕНИЯ

#### 7 класс

1. (40 баллов) Два автомобиля одновременно выезжают навстречу друг другу из разных пунктов и едут со скоростями, отличающимися в 1,5 раза. Один из автомобилей остановился и после стоянки продолжил движение с прежней скоростью. К моменту встречи автомобили прошли пути, отличающиеся в 2 раза. Найти отношение времени стоянки останавливавшегося автомобиля к времени его движения.

**Ответ:** Если останавливался «медленный» автомобиль, то отношение времени стоянки к времени движения равно  $1/3$ . Если останавливался «быстрый» автомобиль, то отношение времени стоянки к времени движения равно 2.

**Решение:** Обозначим через  $t$  время движения до встречи автомобиля, ехавшего без остановки. Тогда время движения другого автомобиля равно  $t - T$ , где  $T$  – время стоянки. Если останавливался «медленный» автомобиль, получаем соотношение

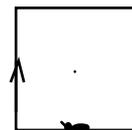
$$1,5Vt : V(t - T) = 2,$$

где  $V$  – скорость «медленного» автомобиля. Отсюда находим, что  $T/(t - T) = 1/3$ . Если останавливался «быстрый» автомобиль, то вдвое больший путь пройдет «медленный» и отношение пройденных путей запишется в виде

$$Vt : 1,5V(t - T) = 2.$$

Отсюда следует, что  $T/(t - T) = 2$ .

2. (30 баллов) Жучок бежит по неподвижному проволочному квадрату со скоростью  $V$ . За какое наименьшее время скорость удаления жучка от центра квадрата меняется от нуля до максимального значения? Сторона квадрата равна  $L$ .



**Ответ:** За время  $L/(2V)$ .

**Решение:** Когда жучок пробегает середину стороны, скорость его удаления от центра квадрата равна нулю. При приближении жучка к углу квадрата скорость удаления растет и достигает максимума вблизи угла.

3. (30 баллов) Известно, что при смешивании 100 мл воды со 100 мл спирта объем смеси составляет 190 мл. Найти плотность смеси, если плотность воды равна  $1000 \text{ кг/м}^3$ , а плотность спирта  $800 \text{ кг/м}^3$ .

**Ответ:** Плотность смеси равна  $1800 : 1,9 \approx 947 \text{ кг/м}^3$ .

**Решение:** Масса смеси будет равна сумме масс 100 мл воды (0,1 кг) и 100 мл спирта (0,08 кг), т.е. 0,18 кг. Плотность смеси находим, поделив 0,18 кг на объем смеси  $1,9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$ .

#### 8 класс

1. (40 баллов) Два автомобиля одновременно выезжают навстречу друг другу из разных пунктов и едут со скоростями, отличающимися в 1,5 раза. Один из автомобилей остановился и после стоянки продолжил движение с прежней скоростью. К моменту встречи автомобили прошли пути, отличающиеся в 2 раза. Найти отношение времени стоянки останавливавшегося автомобиля к времени его движения.

**Ответ:** Если останавливался «медленный» автомобиль, то отношение времени стоянки к времени движения равно  $1/3$ . Если останавливался «быстрый» автомобиль, то отношение времени стоянки к времени движения равно 2.

**Решение:** Обозначим через  $t$  время движения до встречи автомобиля, ехавшего без остановки. Тогда время движения другого автомобиля равно  $t - T$ , где  $T$  – время стоянки. Если останавливался «медленный» автомобиль, получаем соотношение

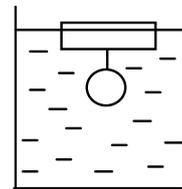
$$1,5Vt : V(t - T) = 2,$$

где  $V$  – скорость «медленного» автомобиля. Отсюда находим, что  $T/(t - T) = 1/3$ . Если останавливался «быстрый» автомобиль, то вдвое больший путь пройдет «медленный» и отношение пройденных путей запишется в виде

$$Vt : 1,5V(t - T) = 2.$$

Отсюда следует, что  $T/(t - T) = 2$ .

2. (40 баллов) В сосуде с водой плавает сплошной кусок льда, к которому на короткой нити прикреплен груз (см. рисунок). Натяжение нити равно 1 Н. При таянии льда уровень воды в сосуде начал изменяться с момента, когда растаяла половина льда. Найти первоначальную массу льда. Считать, что груз все время прикреплен ко льду. Плотность воды равна  $1000 \text{ кг/м}^3$ , плотность льда  $900 \text{ кг/м}^3$ . Ускорение свободного падения считать равным  $10 \text{ м/с}^2$ .



**Ответ:** Первоначальная масса льда равна 1,8 кг.

**Решение:** Для того, чтобы уровень воды начал меняться, весь не растаявший лед должен оказаться под водой, т.е. плавучесть системы груз-лед должна обратиться в нуль. Запишем условие плавания льда для этого момента:

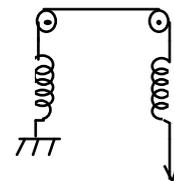
$$\rho_{\text{л}} V_{\text{л}} g + T = \rho_{\text{в}} V_{\text{л}} g,$$

где  $g$  – ускорение свободного падения и сила натяжения  $T$  равна 1 Н (неизменность силы натяжения следует из баланса сил, действующих на груз). Отсюда находим массу льда

$$\rho_{\text{л}} V_{\text{л}} = T / [g(\rho_{\text{в}}/\rho_{\text{л}} - 1)] = 0,9 \text{ кг.}$$

Таким образом, первоначальная масса льда равна 1,8 кг.

3. (30 баллов) Две легкие пружины с жесткостями 100 Н/м и 200 Н/м скреплены между собой переброшенной через неподвижные блоки нитью, одна из пружин скреплена с полом, а конец другой свободен (см. рисунок). На сколько сместится свободный конец пружины, если к нему приложить силу, равную 2 Н (15 баллов)? Чему при этом будет равно натяжение скрепляющей пружины нити (15 баллов)?



**Ответ:** Свободный конец пружины сместится на 3 см. Натяжение нити будет равно 2 Н.

**Решение:** Поскольку обе пружины и нить находятся в покое, на верхний конец правой пружины со стороны нити действует сила 2 Н (это и будет сила натяжения нити), такая же сила действует на верхний конец левой пружины. Следовательно, одна пружина растянется на 1 см, другая – на 2 см. Смещение свободного конца правой пружины равно сумме растяжений, т.е. 3 см.

## 9 класс

1. (30 баллов) Шарик скачет над горизонтальной плитой, упруго отражаясь от нее. Во сколько раз уменьшится время между двумя последовательными ударами шарика о плиту, если на половине максимальной высоты подъема поставить упруго отражающую горизонтальную плоскость?

**Ответ:** Время уменьшится в  $2 + \sqrt{2} \approx 3,4$  раза.

**Решение:** Пусть  $H$  – первоначальная высота подъема шарика. Время падения с этой высоты составляет

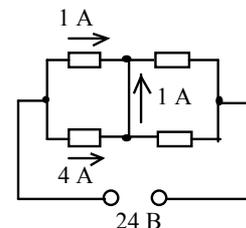
$t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ , и время между двумя последовательными ударами шарика о плиту равно  $2t_1$ . После того, как поставили отражающую плоскость, время движения шарика от плоскости до плиты можно найти как раз-

ность времен падения с высоты  $H$  до плиты и с высоты  $H$  до  $H/2$ , т.е.  $t_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}} - \sqrt{\frac{H}{g}}$ . Тогда время между

двумя последовательными ударами о плиту равно  $2t_2$ . В итоге получаем соотношение времен  $2t_1 : 2t_2 = 2 + \sqrt{2} \approx 3,4$ .

2. (40 баллов) В цепи, приведенной на рисунке, даны токи через два резистора и переключку и напряжение источника. Найти сопротивления резисторов, если известно, что каждое из них равно целому числу омов, а сопротивление переключки равно нулю.

**Ответ:** Сопротивления резисторов равны (слева-направо и сверху-вниз по картинке) 12 Ом, 6 Ом, 3 Ом, 4 Ом.

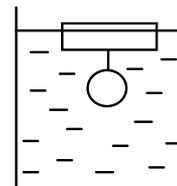


**Решение:** Из баланса токов в узлах следует, что ток через правый резистор верхней ветви равен 2 А, а через правый резистор нижней ветви 3 А. Обозначим через  $R_1$  сопротивление резистора, по которому течет ток 4 А и через  $R_2$  – резистора, через который течет ток 3 А. Тогда сопротивление резистора, через который течет ток 1 А, равно  $4R_1$ , а резистора, через который течет ток 2 А, равно  $3R_2/2$ . Сумма напряжений на двух последовательно соединенных резисторах равна напряжению источника, откуда следует уравнение

$$4R_1 + 3R_2 = 24.$$

Единственное целочисленное решение этого уравнения имеет вид  $R_1 = 3 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 4 \text{ Ом}$ . Отсюда находим сопротивления двух остальных резисторов.

3. (30 баллов) В сосуде с водой плавает сплошной кусок льда, к которому на короткой нити прикреплен груз (см. рисунок). Натяжение нити равно 1 Н. При таянии льда уровень воды в сосуде начал изменяться с момента, когда растаяла половина льда. Найти первоначальную массу льда. Считать, что груз все время прикреплен ко льду. Плотность воды равна  $1000 \text{ кг/м}^3$ , плотность льда  $900 \text{ кг/м}^3$ . Ускорение свободного падения считать равным  $10 \text{ м/с}^2$ .



**Ответ:** Первоначальная масса льда равна 1,8 кг.

**Решение:** Для того, чтобы уровень воды начал меняться, весь не растаявший лед должен оказаться под водой, т.е. плавучесть системы груз-лед должна обратиться в нуль. Запишем условие плавания льда для этого момента:

$$\rho_{\text{л}} V_{\text{л}} g + T = \rho_{\text{в}} V_{\text{л}} g,$$

где  $g$  – ускорение свободного падения и сила натяжения  $T$  равна 1 Н (неизменность силы натяжения следует из баланса сил, действующих на груз). Отсюда находим массу льда

$$\rho_{\text{л}} V_{\text{л}} = T / [g(\rho_{\text{в}}/\rho_{\text{л}} - 1)] = 0,9 \text{ кг}.$$

Таким образом, первоначальная масса льда равна 1,8 кг.

### 10 класс

1. (30 баллов) Под каким углом к горизонту было брошено тело, если на половине максимальной высоты подъема его скорость оказалась направленной под углом  $45^\circ$  к горизонту?

**Ответ:** Угол броска равен  $\alpha = \arctg \sqrt{2} \approx 55^\circ$ .

**Решение:** Обозначим через  $V_0$  начальную скорость тела и через  $\alpha$  искомый угол, под которым тело было брошено. Горизонтальная компонента скорости тела равна  $V_0 \cos \alpha$  и не меняется в ходе движения. В момент, когда скорость тела оказалась направленной под углом  $45^\circ$  к горизонту, вертикальная компонента скорости стала равна горизонтальной, т.е.  $V_0 \cos \alpha$ . Запишем закон сохранения механической энергии при подъеме тела на максимальную высоту  $H$ :

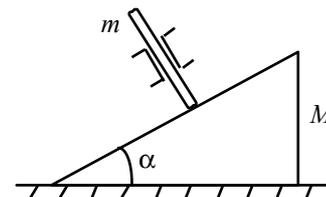
$$\frac{mV_0^2 \sin^2 \alpha}{2} = mgH$$

и половинную высоту  $H/2$ :

$$\frac{mV_0^2 \sin^2 \alpha}{2} = \frac{mV_0^2 \cos^2 \alpha}{2} + mg \frac{H}{2}.$$

Исключая из этих уравнений  $H$ , получаем  $\text{tg} \alpha = \sqrt{2}$ .

2. (30 баллов) На гладком горизонтальном столе находится клин массы  $M$  с углом  $\alpha$  при основании. На гладкую наклонную грань клина давит стержень массы  $m$ , который из-за направляющих может двигаться только перпендикулярно наклонной грани клина (см. рисунок). Трение между стержнем и направляющими отсутствует. Найти ускорение клина. Ускорение свободного падения равно  $g$ .



**Ответ:** Ускорение клина равно  $\frac{mg \sin \alpha \cos \alpha}{m \sin^2 \alpha + M}$ .

**Решение:** Запишем второй закон Ньютона для стержня в проекции на ось, перпендикулярную наклонной грани клина

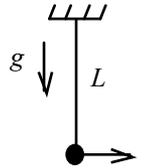
$$ma_1 = mg \cos \alpha - N$$

( $a_1$  – ускорение стержня,  $N$  – сила реакции клина), и для клина в проекции на горизонталь

$$Ma_2 = N \sin \alpha,$$

( $a_2$  – ускорение клина). Учитывая, что  $a_1 = a_2 \sin \alpha$  (кинематическая связь), находим ускорение клина.

3. (40 баллов) Какую скорость нужно сообщить шарик, подвешенному на нити длины  $L$  (см. рисунок), чтобы величина его ускорения оказалась равной ускорению свободного падения  $g$  в момент, когда отклонение нити от вертикали составит угол  $45^\circ$ ?



**Ответ:** Шарик нужно сообщить скорость  $\sqrt{gL\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ .

**Решение:** При отклонении нити на угол  $45^\circ$  проекция силы тяжести на перпендикулярное к нити направление сообщает шарик тангенциальное ускорение  $g/\sqrt{2}$ . Поскольку полное ускорение шарика по условию равно  $g$ , то нормальное ускорение шарика также равно  $g/\sqrt{2}$ , т.е.

$$\frac{V^2}{L} = \frac{g}{\sqrt{2}},$$

где  $V$  – скорость шарика. Записывая закон сохранения механической энергии в виде

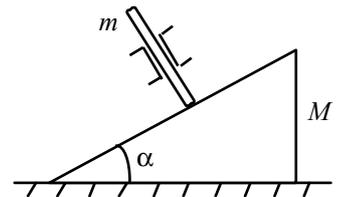
$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{mV^2}{2} + mgL\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

и исключая  $V$  с помощью предыдущего соотношения, находим начальную скорость шарика

$$V_0 = \sqrt{gL\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}.$$

### 11 класс

1. (30 баллов) На гладком горизонтальном столе находится клин массы  $M$  с углом  $\alpha$  при основании. На гладкую наклонную грань клина давит стержень массы  $m$ , который из-за направляющих может двигаться только перпендикулярно наклонной грани клина (см. рисунок). Трение между стержнем и направляющими отсутствует. Найти ускорение клина. Ускорение свободного падения равно  $g$ .



**Ответ:** Ускорение клина равно  $\frac{mg \sin \alpha \cos \alpha}{m \sin^2 \alpha + M}$ .

**Решение:** Запишем второй закон Ньютона для стержня в проекции на ось, перпендикулярную наклонной грани клина

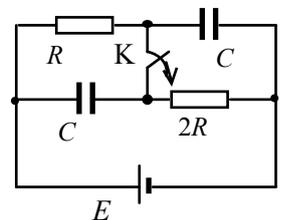
$$ma_1 = mg \cos \alpha - N$$

( $a_1$  – ускорение стержня,  $N$  – сила реакции клина), и для клина в проекции на горизонталь

$$Ma_2 = N \sin \alpha,$$

( $a_2$  – ускорение клина). Учитывая, что  $a_1 = a_2 \sin \alpha$  (кинематическая связь), находим ускорение клина.

2. (40 баллов) В приведенной на рисунке схеме известны ЭДС батареи  $E$ , емкости конденсаторов  $C$  и сопротивления резисторов  $R$  и  $2R$ . Какой ток пойдет через батарею сразу после размыкания ключа  $K$  (20 баллов)? Какую работу совершит батарея после размыкания ключа (20 баллов)? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.



**Ответ:** Сразу после размыкания ключа ток через батарею будет равен  $2E/(3R)$ . Батарея совершит работу  $CE^2$ .

**Решение:** До размыкания ключа на верхнем конденсаторе было напряжение  $2E/3$ , а на нижнем  $E/3$ . Напряжения на конденсаторах останутся такими же и сразу после размыкания ключа. Следовательно, на верхнем резисторе будет напряжение  $E/3$ , а на нижнем  $2E/3$ . Токи через резисторы будут одинаковыми и равными  $E/(3R)$ . Ток через батарею равен сумме токов через резисторы, т.е.  $2E/(3R)$ . В стационарном состоянии заряды на конденсаторах будут одинаковыми и равными  $CE$ . Начальные же заряды равнялись  $2CE/3$  (на верхнем) и  $CE/3$  (на нижнем). Следовательно, после замыкания ключа через батарею пройдет заряд  $CE$ , а ее работа будет равна  $CE^2$ .

3. (30 баллов) Тело прикреплено к стенке пружиной и совершает гармонические колебания, двигаясь по гладкому горизонтальному столу. Во сколько раз изменится амплитуда колебаний, если середину пружины закрепить в момент прохождения телом положения равновесия?

**Ответ:** Амплитуда колебаний уменьшится в  $\sqrt{2}$  раз.

**Решение:** Обозначим коэффициент жесткости пружины через  $k$ , а амплитуду первоначальных колебаний через  $A_1$ . Тогда энергию первоначальных колебаний можно записать как  $kA_1^2/2$ . После закрепления середины пружины энергия колебаний не изменится (в момент закрепления вся энергия является кинетической энергией тела). Учитывая, что коэффициент жесткости половины пружины равен  $2k$ , и обозначая амплитуду колебаний после закрепления через  $A_2$ , можно записать соотношение

$$\frac{2kA_2^2}{2} = \frac{kA_1^2}{2},$$

откуда находим  $A_2 = A_1/\sqrt{2}$ .

**ОЛИМПИАДА “БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ – БУДУЩЕЕ НАУКИ” 2017-2018**

**Физика, I тур, вариант 2**

**РЕШЕНИЯ**

**7 класс**

1. (40 баллов) Два автомобиля одновременно выезжают навстречу друг другу из разных пунктов и едут со скоростями, отличающимися в 1,5 раза. Один из автомобилей остановился и после стоянки продолжил движение с прежней скоростью до встречи с другим автомобилем. Как соотносятся пути, пройденные автомобилями до встречи, если время стоянки останавливавшегося автомобиля в 3 раза меньше времени его движения?

**Ответ:** «Быстрый» автомобиль прошел путь в 2 раза больший, если останавливался «медленный», и в 9/8 раза больший, если останавливался «быстрый».

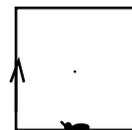
**Решение:** Обозначим через  $t$  время движения до встречи автомобиля, ехавшего без остановки. Тогда время движения другого автомобиля равно  $t - T$ , где  $T$  – время стоянки. По условию задачи  $(t - T)/T = 3$ , откуда следует, что  $t = 4T$ . Если останавливался «медленный» автомобиль, то отношение путей равно

$$1,5Vt : V(t - T) = 2,$$

где  $V$  – скорость «медленного» автомобиля. Если останавливался «быстрый» автомобиль, то отношение путей равно

$$1,5V(t - T) : Vt = 9/8.$$

2. (30 баллов) Жучок бежит по неподвижному проволочному квадрату со скоростью  $V$ . За какое наименьшее время скорость удаления жучка от центра квадрата меняется от нуля до максимального значения? Сторона квадрата равна  $L$ .



**Ответ:** За время  $L/(2V)$ .

**Решение:** Когда жучок пробегает середину стороны, скорость его удаления от центра квадрата равна нулю. При приближении жучка к углу квадрата скорость удаления растет и достигает максимума вблизи угла.

3. (30 баллов) Известно, что при смешивании 100 мл воды со 100 мл спирта объем смеси составляет 190 мл. Найти плотность смеси, если плотность воды равна  $1000 \text{ кг/м}^3$ , а плотность спирта  $800 \text{ кг/м}^3$ .

**Ответ:** Плотность смеси равна  $1800 : 1,9 \approx 947 \text{ кг/м}^3$ .

**Решение:** Масса смеси будет равна сумме масс 100 мл воды (0,1 кг) и 100 мл спирта (0,08 кг), т.е. 0,18 кг. Плотность смеси находим, поделив 0,18 кг на объем смеси  $1,9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3$ .

**8 класс**

1. (30 баллов) Два автомобиля одновременно выезжают навстречу друг другу из разных пунктов и едут со скоростями, отличающимися в 1,5 раза. Один из автомобилей остановился и после стоянки продолжил движение с прежней скоростью до встречи с другим автомобилем. Как соотносятся пути, пройденные автомобилями до встречи, если время стоянки останавливавшегося автомобиля в 3 раза меньше времени его движения?

**Ответ:** «Быстрый» автомобиль прошел путь в 2 раза больший, если останавливался «медленный», и в 9/8 раза больший, если останавливался «быстрый».

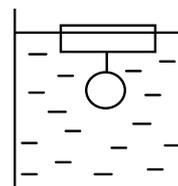
**Решение:** Обозначим через  $t$  время движения до встречи автомобиля, ехавшего без остановки. Тогда время движения другого автомобиля равно  $t - T$ , где  $T$  – время стоянки. По условию задачи  $(t - T)/T = 3$ , откуда следует, что  $t = 4T$ . Если останавливался «медленный» автомобиль, то отношение путей равно

$$1,5Vt : V(t - T) = 2,$$

где  $V$  – скорость «медленного» автомобиля. Если останавливался «быстрый» автомобиль, то отношение путей равно

$$1,5V(t - T) : Vt = 9/8.$$

2. (40 баллов) В сосуде с водой плавает сплошной кусок льда массой 1,8 кг, к которому на короткой нити прикреплен груз (см. рисунок). Натяжение нити равно 1 Н. Сколько льда должно растаять, чтобы уровень воды в сосуде начал изменяться? Считать, что груз все время прикреплен ко льду. Плотность воды равна  $1000 \text{ кг/м}^3$ , плотность льда  $900 \text{ кг/м}^3$ . Ускорение свободного падения считать равным  $10 \text{ м/с}^2$ .



**Ответ:** Должно растаять 0,9 кг льда.

**Решение:** Уровень воды начнет меняться с того момента, когда нерастаявший лед весь окажется под водой, т.е. плавучесть системы груз-лед обратится в нуль. Запишем условие плавания льда для этого момента:

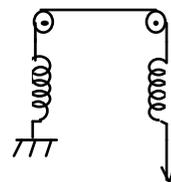
$$\rho_{\text{л}} V_{\text{л}} g + T = \rho_{\text{в}} V_{\text{л}} g,$$

где  $g$  – ускорение свободного падения и сила натяжения  $T$  равна 1 Н (неизменность силы натяжения следует из баланса сил, действующих на груз). Отсюда находим массу льда

$$\rho_{\text{л}} V_{\text{л}} = T / [g(\rho_{\text{в}}/\rho_{\text{л}} - 1)] = 0,9 \text{ кг.}$$

Таким образом, масса растаявшего льда также равна 0,9 кг.

3. (30 баллов) Две легкие пружины с жесткостями 100 Н/м и 200 Н/м скреплены между собой переброшенной через неподвижные блоки нитью, одна из пружин скреплена с полом, а конец другой свободен (см. рисунок). На сколько сместится свободный конец пружины, если к нему приложить силу, равную 2 Н (15 баллов)? Чему при этом будет равно натяжение скрепляющей пружины нити (15 баллов)?



**Ответ:** Свободный конец пружины сместится на 3 см. Натяжение нити будет равно 2 Н.

**Решение:** Поскольку обе пружины и нить находятся в покое, на верхний конец правой пружины со стороны нити действует сила 2 Н (это и будет сила натяжения нити), такая же сила действует на верхний конец левой пружины. Следовательно, одна пружина растянется на 1 см, другая – на 2 см. Смещение свободного конца правой пружины равно сумме растяжений, т.е. 3 см.

### 9 класс

1. (30 баллов) Шарик скачет над горизонтальной плитой, упруго отражаясь от нее. Во сколько раз увеличится средняя скорость шарика, если на половине максимальной высоты подъема поставить упруго отражающую горизонтальную плоскость?

**Ответ:** Средняя скорость увеличится в  $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1,7$  раза.

**Решение:** Средняя скорость шарика за период движения (например, за время между последовательными ударами шарика о плиту) равна средней скорости за время падения шарика (средние скорости при подъеме и падении, очевидно, одинаковы). Поэтому далее будем рассматривать среднюю скорость падения шарика.

Пусть  $H$  – первоначальная высота подъема шарика. Время падения с этой высоты составляет  $t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}$ .

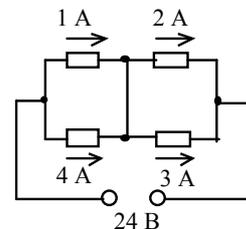
Средняя скорость шарика при этом находится как  $V_{\text{cp1}} = H/t_1 = \sqrt{\frac{gH}{2}}$ . После того, как поставили отражающую плоскость, время падения шарика можно найти как разность времен падения с высоты  $H$  до плиты и с

высоты  $H$  до  $H/2$ , т.е.  $t_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}} - \sqrt{\frac{H}{g}}$ . Тогда средняя скорость падения составит  $V_{\text{cp2}} = H/(2t_2) =$

$\frac{\sqrt{gH}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}$ . В итоге получаем отношение средних скоростей  $V_{\text{cp2}}/V_{\text{cp1}} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1,7$ .

2. (40 баллов) В цепи, приведенной на рисунке, даны токи через резисторы и напряжение источника. Сопротивление переключки равно нулю. Найти сопротивления резисторов, если известно, что каждое из них равно целому числу омов.

**Ответ:** Сопротивления резисторов равны (слева-направо и сверху-вниз по картинке) 12 Ом, 6 Ом, 3 Ом, 4 Ом.

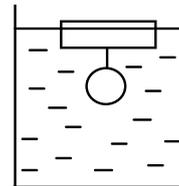


**Решение:** Обозначим через  $R_1$  сопротивление резистора, по которому течет ток 4 А и через  $R_2$  – резистора, через который течет ток 3 А. Тогда сопротивление резистора, через который течет ток 1 А, равно  $4R_1$ , а резистора, через который течет ток 2 А, равно  $3R_2/2$ . Сумма напряжений на двух последовательно соединенных резисторах равна напряжению источника, откуда следует уравнение

$$4R_1 + 3R_2 = 24.$$

Единственное целочисленное решение этого уравнения имеет вид  $R_1 = 3$  Ом,  $R_2 = 4$  Ом. Отсюда находим сопротивления двух остальных резисторов.

3. (30 баллов) В сосуде с водой плавает сплошной кусок льда массой 1,8 кг, к которому на короткой нити прикреплен груз (см. рисунок). Натяжение нити равно 1 Н. Сколько льда должно растаять, чтобы уровень воды в сосуде начал изменяться? Считать, что груз все время прикреплен ко льду. Плотность воды равна  $1000 \text{ кг/м}^3$ , плотность льда  $900 \text{ кг/м}^3$ . Ускорение свободного падения считать равным  $10 \text{ м/с}^2$ .



**Ответ:** Должно растаять 0,9 кг льда.

**Решение:** Уровень воды начнет меняться с того момента, когда нерастаявший лед весь окажется под водой, т.е. плавучесть системы груз-лед обратится в нуль. Запишем условие плавания льда для этого момента:

$$\rho_{\text{л}} V_{\text{л}} g + T = \rho_{\text{в}} V_{\text{л}} g,$$

где  $g$  – ускорение свободного падения и сила натяжения  $T$  равна 1 Н (неизменность силы натяжения следует из баланса сил, действующих на груз). Отсюда находим массу льда

$$\rho_{\text{л}} V_{\text{л}} = T / [g(\rho_{\text{в}}/\rho_{\text{л}} - 1)] = 0,9 \text{ кг}.$$

Таким образом, масса растаявшего льда также равна 0,9 кг.

### 10 класс

1. (30 баллов) Под каким углом к горизонту было брошено тело, если на половине максимальной высоты подъема его скорость оказалась направленной под углом  $45^\circ$  к горизонту?

**Ответ:** Угол броска равен  $\alpha = \arctg \sqrt{2} \approx 55^\circ$ .

**Решение:** Обозначим через  $V_0$  начальную скорость тела и через  $\alpha$  искомый угол, под которым тело было брошено. Горизонтальная компонента скорости тела равна  $V_0 \cos \alpha$  и не меняется в ходе движения. В момент, когда скорость тела оказалась направленной под углом  $45^\circ$  к горизонту, вертикальная компонента скорости стала равна горизонтальной, т.е.  $V_0 \cos \alpha$ . Запишем закон сохранения механической энергии при подъеме тела на максимальную высоту  $H$ :

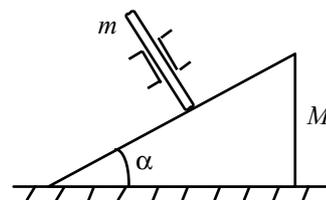
$$\frac{mV_0^2 \sin^2 \alpha}{2} = mgH$$

и половинную высоту  $H/2$ :

$$\frac{mV_0^2 \sin^2 \alpha}{2} = \frac{mV_0^2 \cos^2 \alpha}{2} + mg \frac{H}{2}.$$

Исключая из этих уравнений  $H$ , получаем  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2}$ .

2. (30 баллов) На горизонтальном столе находится клин массы  $M$  с углом  $\alpha$  при основании. На гладкую наклонную грань клина давит стержень массы  $m$ , который из-за направляющих может двигаться только перпендикулярно наклонной грани клина (см. рисунок). Трение между стержнем и направляющими отсутствует. При каком коэффициенте трения между клином и столом клин не будет двигаться?



**Ответ:** Коэффициент трения должен удовлетворять условию  $\mu > \frac{m \cos \alpha \sin \alpha}{M + m \cos^2 \alpha}$ .

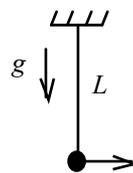
**Решение:** Стержень давит на клин с силой  $mg \cos \alpha$ , направленной перпендикулярно наклонной грани клина ( $g$  – ускорение свободного падения). Горизонтальная компонента этой силы, равная  $mg \cos \alpha \sin \alpha$ , стремится сдвинуть клин. Этому препятствует сила трения, максимальное значение которой равно  $\mu N$ , где  $\mu$  – коэффициент трения, а  $N$  – сила реакции стола. Учитывая, что  $N = Mg + mg \cos^2 \alpha$ , и записывая условие неподвижности клина в виде

$$\mu(Mg + mg \cos^2 \alpha) > mg \cos \alpha \sin \alpha,$$

получаем

$$\mu > \frac{m \cos \alpha \sin \alpha}{M + m \cos^2 \alpha}.$$

3. (40 баллов) Какую скорость нужно сообщить шарiku, подвешенному на нити длины  $L$  (см. рисунок), чтобы вектор его ускорения оказался горизонтальным в момент, когда отклонение нити от вертикали составит угол  $45^\circ$ ? Ускорение свободного падения равно  $g$ .



**Ответ:** Шарiku нужно сообщить скорость  $\sqrt{gL\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$ .

**Решение:** При отклонении нити на угол  $45^\circ$  проекция силы тяжести на перпендикулярное к нити направление сообщает шарiku тангенциальное ускорение  $g/\sqrt{2}$ . Поскольку полное ускорение шарика по условию направлено горизонтально, то нормальное ускорение шарика также равно  $g/\sqrt{2}$ , т.е.

$$\frac{V^2}{L} = \frac{g}{\sqrt{2}},$$

где  $V$  – скорость шарика. Записывая закон сохранения механической энергии в виде

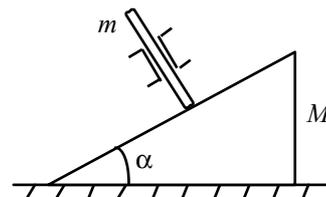
$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{mV^2}{2} + mgL\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

и исключая  $V$  с помощью предыдущего соотношения, находим начальную скорость шарика

$$V_0 = \sqrt{gL\left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}.$$

### 11 класс

1. (30 баллов) На горизонтальном столе находится клин массы  $M$  с углом  $\alpha$  при основании. На гладкую наклонную грань клина давит стержень массы  $m$ , который из-за направляющих может двигаться только перпендикулярно наклонной грани клина (см. рисунок). Трение между стержнем и направляющими отсутствует. При каком коэффициенте трения между клином и столом клин не будет двигаться?



**Ответ:** Коэффициент трения должен удовлетворять условию  $\mu > \frac{m \cos \alpha \sin \alpha}{M + m \cos^2 \alpha}$ .

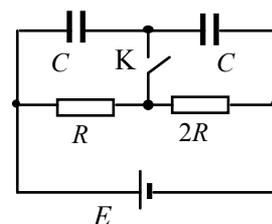
**Решение:** Стержень давит на клин с силой  $mg \cos \alpha$ , направленной перпендикулярно наклонной грани клина ( $g$  – ускорение свободного падения). Горизонтальная компонента этой силы, равная  $mg \cos \alpha \sin \alpha$ , «старается» сдвинуть клин. Этому препятствует сила трения, максимальное значение которой равно  $\mu N$ , где  $\mu$  – коэффициент трения, а  $N$  – сила реакции стола. Учитывая, что  $N = Mg + mg \cos^2 \alpha$ , и записывая условие неподвижности клина в виде

$$\mu(Mg + mg \cos^2 \alpha) > mg \cos \alpha \sin \alpha,$$

получаем

$$\mu > \frac{m \cos \alpha \sin \alpha}{M + m \cos^2 \alpha}.$$

2. (40 баллов) В приведенной на рисунке схеме известны ЭДС батареи  $E$ , емкости конденсаторов  $C$  и сопротивления резисторов  $R$  и  $2R$ . Какой ток пойдет по перемычке сразу после замыкания ключа  $K$  (20 баллов)? Какими будут напряжения на конденсаторах после перехода цепи к стационарному состоянию с замкнутым ключом (20 баллов)? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.



**Ответ:** Сразу после замыкания ключа вверх по перемычке пойдет ток  $E/(4R)$ . На конденсаторах будут напряжения  $E/3$  (на левом) и  $2E/3$  (на правом).

**Решение:** До замыкания ключа на каждом конденсаторе было напряжение  $E/2$ . Напряжения на конденсаторах останутся такими же и сразу после замыкания ключа. После замыкания ключа резисторы становятся подключенными параллельно конденсаторам, поэтому через них пойдут токи  $E/(2R)$  (через левый) и  $E/(4R)$  (через правый). Следовательно, половина тока через левый резистор будет ответвляться в перемычку.

В стационарном состоянии через резисторы идет ток  $E/(3R)$  и, следовательно, напряжения на них равны  $E/3$  (на левом) и  $2E/3$  (на правом). Такими же будут и напряжения на подключенных параллельно резисторам конденсаторах.

3. (30 баллов) Тело прикреплено к стенке пружиной и совершает гармонические колебания, двигаясь по гладкому горизонтальному столу. Во сколько раз изменится амплитуда колебаний, если середину пружины закрепить в момент ее максимального растяжения?

**Ответ:** Амплитуда колебаний уменьшится в 2 раза.

**Решение:** Обозначим коэффициент жесткости пружины через  $k$ , а амплитуду первоначальных колебаний через  $A_1$ . Тогда энергию первоначальных колебаний можно записать как  $kA_1^2/2$ . После закрепления середины пружины энергия колебаний уменьшится в 2 раза (половина первоначальной энергии останется в той половине пружины, которая расположена между точкой закрепления и стенкой). Учитывая, что коэффициент жесткости половины пружины равен  $2k$ , и обозначая амплитуду колебаний после закрепления через  $A_2$ , можно записать соотношение

$$\frac{2kA_2^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{kA_1^2}{2},$$

откуда находим  $A_2 = A_1/2$ .