Межрегиональная олимпиада школьников 2018/2019
«Будущие исследователи – будущее науки»

ОТБОРОЧНЫЙ ТУР

МАТЕМАТИКА

7 класс

1. Решить уравнение: $(2x-1)(x+1)-(x-1)(x+1)=x^2$.

2. Среди прямых на плоскости, заданных уравнениями 1-6, указать пары параллельных прямых:

1) $y=x+1$, 2) $2y=3x+4$, 3) $\frac{y}{2}+1=\frac{x}{5}$, 4) $\frac{x}{2}+1=\frac{y}{5}$, 5) $x=2y/3+10$, 6) $\frac{y-x}{2}=3$.

3. У Николая столько же сестер, сколько и братьев. У его сестры вдвое меньше сестер, чем братьев. Сколько в этой семье мальчиков и сколько девочек?

4. Внутри треугольника AOC произвольным образом отмечена точка X. Доказать, что угол AOC меньше угла AXC.

5. Пароход идет из Казани в Самару 5 суток, а обратно – 7 суток. Сколько времени плывут плоты из Казани в Самару?

6. Постройте график функции $y=\frac{x^2-16}{x-4}-x$.

7. Решить уравнение: $(x^2+1)^2=(x^2-1)(x^2+1)+(x+1)^2-4x+1$.

8. В треугольнике ABC сторона AC=15см. Точка касания вписанной в треугольник окружности делит сторону AB пропорционально числам 2 и 1, начиная от вершины A. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 42см.

9. Какие цифры надо приписать (по одной) справа и слева к числу 43, чтобы вновь полученное число делилось на 15, но не делилось на 30?

10. Пусть $x<y<z$ – произвольные целые числа. Доказать, что найдется хотя бы одна пара чисел, разность которых делится на 2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	итого
4	4	4	8	8	8	12	12	20	20	100

Межрегиональная олимпиада школьников 2018/2019
«Будущие исследователи – будущее науки»

ОТБОРОЧНЫЙ ТУР

МАТЕМАТИКА

8 класс

1. Можно ли от куска материи длиной в 2/3 метра отрезать полметра, не имея под рукой линейки?
2. Семья состоит из трех человек: матери, отца и сына. В настоящее время сумма их возрастов составляет 65 лет. 9 лет назад эта сумма составляла 40 лет. 4 года назад отец был старше сына в 9 раз. Сколько лет отцу?
3. Какие цифры надо приписать (по одной) справа и слева к числу 43, чтобы вновь полученное число делилось на 15, но не делилось на 30?
4. Доказать, что разность двух трехзначных чисел, из которых одно написано теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 99.
5. Доказать, что произведение четырех последовательных натуральных чисел, сложенное с единицей, есть полный квадрат натурального числа.
6. Доказать, что $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=9$
7. a, b, c – такие числа, что $a + b + c = 0$. Доказать, что $ab + bc + ca \leq 0$.
8. Как разделить треугольник с углами 15°, 105°, 60° на три равнобедренных треугольника?
9. Выпуклый многоугольник Г вписан в выпуклый многоугольник Г′. Доказать, что периметр Г не превосходит периметра Г′.
10. Доказать, что ни при каком натуральном k число $2^k + 1$ не делится на 7.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**итого**
4	4	6	6	10	10	10	15	15	20	100

Межрегиональная олимпиада школьников 2018/2019

«Будущие исследователи – будущее науки»

ОТБОРОЧНЫЙ ТУР

МАТЕМАТИКА

9 класс

1. Выпуклый многоугольник Г лежит внутри выпуклого многоугольника Г′. Доказать, что периметр Г не превосходит периметра Г′.

2. Решить уравнение $1+\sqrt{1+x\sqrt{2x^2+4x}}=x$.

3. В ΔABC: $AB=34$, $AC=32$, медиана $AM=17$. Найти площадь S_{ABC}.

4. Доказать, что $\left|\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}\right|+\left|\frac{x+y}{2}+\sqrt{xy}\right|=|x|+|y|$ для любых действительных x и y, имеющих одинаковые знаки.

5. Доказать, что разность двух трехзначных чисел, из которых одно написано теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 99.

6. Имеется два сплава из цинка, меди и олова. Первый содержит 25% цинка, второй – 50% меди. Процентное содержание олова в первом сплаве в два раза больше, чем во втором. Сплав 200 *кг* первого и 300*кг* второго, получили сплав, где 28% олова. Сколько *кг* меди в этом новом сплаве?

7. Доказать, что $1+\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{9999}+\sqrt{10000}}=100$.

8. В уравнении $x^4+ax^3+bx^2+6x+2=0$ один из корней равен $\sqrt{3}+1$. Найти остальные корни уравнения, если a и b – рациональные числа.

9. Доказать, что $(1+a_1)(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)\geq 2^n$, если $a_1,a_2,\ldots,a_n$ – положительные числа и $a_1a_2\ldots a_n=1$.

10. Найти сумму $S=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**итого**
5	5	5	10	10	10	10	15	15	15	100

Межрегиональная олимпиада школьников 2018/2019

«Будущие исследователи – будущее науки»

ОТБОРОЧНЫЙ ТУР

МАТЕМАТИКА

10 класс

1. Представить многочлен x^8-16 в виде произведения многочленов второй степени.

2. Решите уравнение: $|x|^3+|x-1|^3=9$.

3. Число 180 разделили на натуральное число. Оказалось, что остаток составляет 25% от частного. Найдите это натуральное число.

4. Известно, что одна из дробей в два раза больше другой, а сумма квадратов этих дробей равна сумме их кубов. Найдите эти дроби.

5. Доказать, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

6. Вычислить значение выражения: $\cos\frac{2\pi}{31}\cos\frac{4\pi}{31}\cos\frac{8\pi}{31}\cos\frac{16\pi}{31}\cos\frac{32\pi}{31}$.

7. При каких целых значениях параметра a наибольший член последовательности $5+3\sqrt{n-a}-n,\ n\in N$, равен $3\sqrt{2}$?

8. В угол величиной 60° вписаны 5 кругов таким образом, чтобы каждый последующий круг (начиная со второго) касался предыдущего. Во сколько раз сумма площадей всех пяти кругов больше площади меньшего круга.

9. Периметр прямоугольного треугольника ABC ($\angle C=90^0$) равен 72 см, а разность между длинами медианы CM и высоты CH равна 7 см. Найдите длину гипотенузы.

10. Найдите все значения параметра a, при которых в множестве решений неравенства $x(x-2a+6)+a^2<12a-\frac{6a^2}{x}$ нельзя расположить два отрезка длиной 2.5 каждый, которые не имеют общих точек.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**итого**
6	6	6	10	10	10	12	12	13	15	100

Межрегиональная олимпиада школьников 2018/2019
«Будущие исследователи – будущее науки»

ОТБОРОЧНЫЙ ТУР

МАТЕМАТИКА

11 класс

1. При каком положительном значении p один корень уравнения $8x^2-6x+9p^2=0$ равен квадрату другого.

2. Решите уравнение: $$\frac{1+3+\cdots+(2x+1)}{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{342}}=342.$$

3. Вычислить значение выражения:
$\sin(10^\circ)\sin(20^\circ)\sin(30^\circ)\sin(40^\circ)\sin(50^\circ)\sin(60^\circ)\sin(70^\circ)\sin(80^\circ)$.

4. Решите систему уравнений: $\begin{cases} x^{\log_8 y}+y^{\log_8 x}=4, \\ \log_4 x-\log_8 y=1. \end{cases}$

5. Найдите количество целых чисел, принадлежащих множеству значений функции $y=16\log_{\frac{1}{16}}\left(\dfrac{\sin x+\cos x+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$.

6. При каких целых значениях параметра a наибольший член последовательности $5+3\sqrt{n-a}-n,\ n\in N$, равен $3\sqrt{2}$?

7. Пирамида, в основании которой лежит равнобедренный треугольник, вписана в конус заданного постоянного объема. Величину угла при вершине этого треугольника обозначим через γ. При каком значении γ объем пирамиды является наибольшим?

8. За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежегодно сначала в размере 5%, затем 12%, потом $11\frac{1}{9}\%$ и, наконец, 12.5% в год. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число лет, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада выросла на $104\frac{1}{6}\%$. Определите срок хранения вклада.

9. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение имеет ровно два корня
$$2^{x+1}\cdot\left(4^{x+1}+6\right)+2^x\cdot\left(2^{2x}-9\cdot 2^{x+1}\right)=p+4\cdot\left(9\cdot 2^{2x-3}-1\right).$$

10. При каких значениях a сумма $\log_a\left(\dfrac{4+3|x|}{1+|x|}\right)$ и $\log_a\left(\dfrac{6+5|x|}{1+|x|}\right)$ будет больше единицы при всех значениях x?

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**итого**
6	6	6	10	10	10	12	12	13	15	100