Межрегиональная олимпиада школьников
"Будущие исследователи - будущее науки"
2018-2019 уч.г.
г.Саров, Нижегородская обл.
Математика
11 класс.

1. (15 баллов) Найдите сумму всех трехзначных чисел, не делящихся на 11 и имеющих последней цифрой 5.

2. (20 баллов) Найдите все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 1+\frac{1}{xy}=\frac{x-y}{x^2y^2}+\frac{xy}{x-y}, \\ \frac{x-y}{xy}\sqrt{x-y}=2-xy. \end{cases}$$

3. (25 баллов) Решите неравенство $\sqrt{\log_{\frac{x+3|x|}{2}}(4x^2+3)+\frac{1}{\sqrt{|x|}}} \leqslant \log_{\frac{x+3|x|}{2}}(4x^2+3)$.

4. (20 баллов) Окружность касается сторон AC и BC треугольника ABC в точках A и B соответственно. На дуге этой окружности, лежащей вне треугольника, расположена точка K так, что расстояния от нее до продолжений сторон AC и BC равны 39 и 156 соответственно. Найдите расстояние от точки K до прямой AB.

5. (20 баллов) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$x^2-|x-a+6|=|x+a-6|-(a-6)^2$$
имеет единственный корень.

Межрегиональная олимпиада школьников
"Будущие исследователи - будущее науки"
2018-2019 уч.г.
г.Саров, Нижегородская обл.
Математика
11 класс.

1. (15 баллов) Найдите сумму всех трехзначных чисел, не делящихся на 11 и имеющих последней цифрой 5.

2. (20 баллов) Найдите все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 1+\frac{1}{xy}=\frac{x-y}{x^2y^2}+\frac{xy}{x-y}, \\ \frac{x-y}{xy}\sqrt{x-y}=2-xy. \end{cases}$$

3. (25 баллов) Решите неравенство $\sqrt{\log_{\frac{x+3|x|}{2}}(4x^2+3)+\frac{1}{\sqrt{|x|}}} \leqslant \log_{\frac{x+3|x|}{2}}(4x^2+3)$.

4. (20 баллов) Окружность касается сторон AC и BC треугольника ABC в точках A и B соответственно. На дуге этой окружности, лежащей вне треугольника, расположена точка K так, что расстояния от нее до продолжений сторон AC и BC равны 39 и 156 соответственно. Найдите расстояние от точки K до прямой AB.

5. (20 баллов) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение
$$x^2-|x-a+6|=|x+a-6|-(a-6)^2$$
имеет единственный корень.

Межрегиональная олимпиада школьников
"Будущие исследователи - будущее науки"
2018-2019 уч.г.
г.Саров, Нижегородская обл.
Математика
10 класс.

1. (15 баллов) Найдите сумму всех трехзначных чисел, не делящихся на 11 и имеющих последней цифрой 5.

2. (20 баллов) Решите неравенство $\frac{\sqrt{8x^3-6x+2}}{2x+1} \leqslant \sqrt{2x+3}$.

3. (20 баллов) Решите систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} 3x^2y^2 - x^2 + 2xy - 12 = 0, \\ 5x^2y^2 - 2x^2 - 3xy - 6 = 0. \end{array}\right.$$

4. (20 баллов) Окружность касается сторон AC и BC треугольника ABC в точках A и B соответственно. На дуге этой окружности, лежащей вне треугольника, расположена точка K так, что расстояния от нее до продолжений сторон AC и BC равны 39 и 156 соответственно. Найдите расстояние от точки K до прямой AB.

5. (25 баллов) Последовательность чисел a_1,a_2,... задана условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 143$ и $a_{n+1} = 5 \cdot \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ при всех $n \geqslant 2$. Докажите, что все члены последовательности - целые числа.

Межрегиональная олимпиада школьников
"Будущие исследователи - будущее науки"
2018-2019 уч.г.
г.Саров, Нижегородская обл.
Математика
10 класс.

1. (15 баллов) Найдите сумму всех трехзначных чисел, не делящихся на 11 и имеющих последней цифрой 5.

2. (20 баллов) Решите неравенство $\frac{\sqrt{8x^3-6x+2}}{2x+1} \leqslant \sqrt{2x+3}$.

3. (20 баллов) Решите систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} 3x^2y^2 - x^2 + 2xy - 12 = 0, \\ 5x^2y^2 - 2x^2 - 3xy - 6 = 0. \end{array}\right.$$

4. (20 баллов) Окружность касается сторон AC и BC треугольника ABC в точках A и B соответственно. На дуге этой окружности, лежащей вне треугольника, расположена точка K так, что расстояния от нее до продолжений сторон AC и BC равны 39 и 156 соответственно. Найдите расстояние от точки K до прямой AB.

5. (25 баллов) Последовательность чисел a_1,a_2,... задана условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 143$ и $a_{n+1} = 5 \cdot \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ при всех $n \geqslant 2$. Докажите, что все члены последовательности - целые числа.

Межрегиональная олимпиада школьников
"Будущие исследователи - будущее науки"
2018-2019 уч.г.
г.Саров, Нижегородская обл.
Математика
9 класс.

1. (15 баллов) Решите уравнение $(x^4-18x^2+82)^4+(x^2+6x+11)^2=5$.

2. (20 баллов) Решите систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} 3x^2y^2-x^2+2xy-12=0, \\ 5x^2y^2-2x^2-3xy-6=0. \end{array}\right.$$

3. (20 баллов) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a|2+x|+\frac{x^2+x-12}{x+4}=0$ имеет ровно одно решение.

4. (20 баллов) Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки, $AM=4$ и $BM=3$. Касательная к описанной окружности треугольника ABC, проходящая через точку C, пересекает прямую AB в точке D. Найдите CD.

5. (25 баллов) Последовательность чисел a_1,a_2,... задана условиями $a_1=1$, $a_2=143$ и $a_{n+1}=5\cdot\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ при всех $n\geqslant 2$. Докажите, что все члены последовательности - целые числа.

Межрегиональная олимпиада школьников
"Будущие исследователи - будущее науки"
2018-2019 уч.г.
г.Саров, Нижегородская обл.
Математика
9 класс.

1. (15 баллов) Решите уравнение $(x^4-18x^2+82)^4+(x^2+6x+11)^2=5$.

2. (20 баллов) Решите систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} 3x^2y^2-x^2+2xy-12=0, \\ 5x^2y^2-2x^2-3xy-6=0. \end{array}\right.$$

3. (20 баллов) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a|2+x|+\frac{x^2+x-12}{x+4}=0$ имеет ровно одно решение.

4. (20 баллов) Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки, $AM=4$ и $BM=3$. Касательная к описанной окружности треугольника ABC, проходящая через точку C, пересекает прямую AB в точке D. Найдите CD.

5. (25 баллов) Последовательность чисел a_1,a_2,... задана условиями $a_1=1$, $a_2=143$ и $a_{n+1}=5\cdot\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ при всех $n\geqslant 2$. Докажите, что все члены последовательности - целые числа.

Очный тур олимпиады "Будущие исследователи – будущее науки"
11 класс.

1. (15 баллов) Найдите сумму всех трехзначных чисел, не делящихся на 11 и имеющих последней цифрой 5.

Решение: Найдем сумму арифметической прогрессии с первым членом $a_1 = 105$, разностью $d_1 = 10$ и последним членов $a_{n_1} = 995$. Количество членов в такой последовательности равно $n_1 = \frac{995-105}{10} + 1 = 90$. Тогда сумма равна $S_1 = \frac{105+995}{2} \cdot 90 = 49500$.

Но среди членов первой последовательности есть те, что делятся на 11. Они также образуют арифметическую прогрессию с первым членом $b_1 = 165$, разностью $d_2 = 110$ и последним членом $d_{n_2} = 935$. Количество членов второй прогрессии равно $n_2 = \frac{935-165}{110} + 1 = 8$. Тогда их сумма равна $S_2 = \frac{165+935}{2} \cdot 8 = 4400$.

Значит, искомая сумма равна $S = S_1 - S_2 = 45100$.

Ответ: 45100.

2. (20 баллов) Найдите все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 1 + \frac{1}{xy} = \frac{x-y}{x^2y^2} + \frac{xy}{x-y}, \\ \frac{x-y}{xy}\sqrt{x-y} = 2 - xy. \end{cases}$$

Решение: Пусть $u = \sqrt{x-y}, v = xy$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} 1 + \frac{1}{v} = \frac{u^2}{v^2} + \frac{v}{u^2}, (1) \\ \frac{u^3}{v} = 2 - v, (2) \end{cases}$$

где $u > 0$ $(x > y)$, $v \neq 0$ $(xy \neq 0)$.

Уравнение (1) можно переписать как $u^2v^2 - u^4 = v^3 - vu^2$, или $(u^2 - v^2)(u^2 - v) = 0$.

Если $v = u^2$, то из уравнения (2) получаем уравнение $u^2 - u + 2 = 0$, $u = 1(\Rightarrow v = 1)$ или $u = -2(\Rightarrow \varnothing)$, не имеющее действительный решений.

Если $v = u$, то из (2) получаем уравнение $u^2 + u - 2 = 0$, откуда $u = 1$ $(u > 0)$, $v = 1$.

Если $v = -u$, то $u^2 + u + 2 = 0$. Это уравнение не имеет действительных решений.

Итак, $u = 1, v = 1$, т.е. $\sqrt{x-y} = 1$, $xy = 1$, откуда $y^2 + y - 1 = 0$, $y = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}, x = \frac{1}{y}$, откуда получаем решение системы уравнений.

Ответ: $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

3. (25 баллов) Решите неравенство $\sqrt{\log_{\frac{x+3|x|}{2}}(4x^2+3) + \frac{1}{\sqrt{|x|}}} \leqslant \log_{\frac{x+3|x|}{2}}(4x^2+3)$.

Решение: **а)** Пусть $x > 0$, тогда исходное неравенство примет вид $\sqrt{\log_{2x}(4x^2+3) + \frac{1}{\sqrt{x}}} \leqslant \log_{2x}(4x^2+3)$.

Если $0 < x < \frac{1}{2}$, то правая часть отрицательна и неравенство не имеет решений.

Если $x > \frac{1}{2}$, то обе части неравенства положительны; возводя в квадрат, получаем равносильное неравенств $t + \frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant t^2$, где $t = \log_{2x}(4x^2+3) > \log_{2x} 4x^2 = 2$.

Но если $t > 2$, то $t^2 > 2t$. Кроме того, $\frac{1}{\sqrt{x}} < \sqrt{2}$ при $x > \frac{1}{2}$. Поэтому $t + \frac{1}{\sqrt{x}} < t + \sqrt{2} < 2t < t^2$, откуда следует, что неравенство $t + \frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant t^2$ является верным при $x > \frac{1}{2}$.

б) Пусть $x < 0$, тогда исходное неравенство примет вид $\sqrt{\log_{-x}(4x^2+3) + \frac{1}{\sqrt{-x}}} \leqslant \log_{-x}(4x^2+3)$ или $\sqrt{\log_t(4t^2+3) + \frac{1}{\sqrt{t}}} \leqslant \log_t(4t^2+3)$, где $t > 0$, $t \neq 1$.

Если $0 < t < 1$, то последнее неравенство не имеет решений.

Если $t > 1$, то обе части неравенства положительны и оно равносильно неравенству $u + \frac{1}{\sqrt{t}} \leqslant u^2$, где $u = \log_t(4t^2+3) > \log_t t^2 = 2$, $\frac{1}{\sqrt{t}} < 1$. Отсюда следует, что $u^2 > 2u > u + \frac{1}{\sqrt{t}}$, и поэтому неравенство $u + \frac{1}{\sqrt{t}} \leqslant u^2$ является верным при всех $t > 1$, т.е. при $-x > 1$, откуда $x < -1$.

Итак, множество решений неравенства состоит из промежутков $x < -1, x > \frac{1}{2}$.

Ответ: $x < -1, x > \frac{1}{2}$.

4. (20 баллов) Окружность касается сторон AC и BC треугольника ABC в точках A и B соответственно. На дуге этой окружности, лежащей вне треугольника, расположена точка K так, что расстояния от нее до продолжений сторон AC и BC равны 39 и 156 соответственно. Найдите расстояние от точки K до прямой AB.

Решение: Пусть E,F и M – основания перпендикуляров, опущенных из точки K на прямые BC, AC и AB соответственно. Так как $\angle KBE = \angle KAB$, то $\triangle KAM$ подобен $\triangle KBE$, откуда следует, что $\frac{KM}{KA} = \frac{KE}{KB}$ (1).

Аналогично, из подобия треугольников KAF и KBM следует, что $\frac{KM}{KB} = \frac{KF}{KA}$(2).

Перемножая (1) и (2), получаем $KM^2 = KE \cdot KF = 39 \cdot 156$, откуда $KM = 78$.

Ответ: 78.

5. (20 баллов) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - |x - a + 6| = |x + a - 6| - (a-6)^2$$

имеет единственный корень.

Решение: Запишем уравнение в виде $x^2 + (a-6)^2 = |x - a + 6| + |x + a - 6|$.

Если x_0 является корнем исходного уравнения, то и $-x_0$ является его корнем. Значит, исходное уравнение имеет нечетное число корней, только если $x_0 = -x_0$ то есть $x = 0$. Подставим значение $x = 0$ в уравнение:

$$(a-6)^2 = 2|a-6| \Leftrightarrow |a-6| \cdot (|a-6| - 2) = 0,$$

откуда либо $|a-6| = 0 \Leftrightarrow a = 6$, либо $|a-6| = 2 \Leftrightarrow a = 4$ или $a = 8$.

При $a = 6$ уравнение принимает вид $x^2 = 2|x|$. Корнями этого уравнения являются числа -2, 0, 2, т.е. уравнение имеет ровно три корня.

При $a = 4$ и при $a = 8$ уравнение принимает вид $x^2 + 4 = |x-2| + |x+2|$.

При $x < -2$ это уравнение сводится к уравнению $x^2 + 2x + 4 = 0$, которое не имеет корней.

При $-2 \leqslant x \leqslant 2$ получаем уравнение $x^2 = 0$, которое имеет единственное решение $x = 0$.

При $x > 2$ получаем уравнение $x^2 - 2x + 4 = 0$, которое не имеет корней.

Такие образом, при $a = 4$ и при $a = 8$ исходное уравнение имеет единственный корень $x = 0$.

Ответ: $a = 4$ и $a = 8$.

Очный тур олимпиады "Будущие исследователи – будущее науки"
10 класс.

1. (15 баллов) Найдите сумму всех трехзначных чисел, не делящихся на 11 и имеющих последней цифрой 5.

   Решение: Найдем сумму арифметической прогрессии с первым членом $a_1 = 105$, разностью $d_1 = 10$ и последним членов $a_{n_1} = 995$. Количество членов в такой последовательности равно $n_1 = \frac{995-105}{10} + 1 = 90$. Тогда сумма равна $S_1 = \frac{105+995}{2} \cdot 90 = 49500$.
   Но среди членов первой последовательности есть те, что делятся на 11. Они также образуют арифметическую прогрессию с первым членом $b_1 = 165$, разностью $d_2 = 110$ и последним членом $d_{n_2} = 935$. Количество членов второй прогрессии равно $n_2 = \frac{935-165}{110} + 1 = 8$. Тогда их сумма равна $S_2 = \frac{165+935}{2} \cdot 8 = 4400$.

   Значит, искомая сумма равна $S = S_1 - S_2 = 45100$.

   Ответ: 45100.

2. (20 баллов) Решите неравенство $\frac{\sqrt{8x^3-6x+2}}{2x+1} \leqslant \sqrt{2x+3}$.

   Решение: Область допустимых значений определяется системой неравенств

$$\begin{cases} 8x^3 - 6x + 2 \geqslant 0, (1) \\ 2x + 3 \geqslant 0, (2) \\ x \neq -\frac{1}{2}. (3) \end{cases}$$

   Неравенство (1) равносильно каждому из неравенств $8x^3 - 8x + 2(x+1) \geqslant 0 \Leftrightarrow (x+1)(8x^2 - 8x + 2) \geqslant 0 \Leftrightarrow 8(x+1)(x - \frac{1}{2})^2 \geqslant 0$. Откуда $x \geqslant -1$. Поэтому из (2),(3) и условия $x \geqslant -1$ следует, что ОДЗ исходного равенства – промежуток $x \geqslant -1$ с выброшенной точкой $-\frac{1}{2}$.

   Значения $x \in [-1; -\frac{1}{2})$ – решения исходного неравенства, так как его левая часть отрицательна при $x \in (-1; -\frac{1}{2})$ и равна нулю при $x = -1$, а правая часть положительна при $x \in [-1; -\frac{1}{2})$.

   Пусть $x > -\frac{1}{2}$, тогда исходное неравенство равносильно каждому из неравенств $8x^3 - 6x + 2 \leqslant (4x^2+4x+1)(2x+3) \Leftrightarrow 20x^2+20x+1 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{5}})(x+\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{5}}) \geqslant 0$. То на промежутке $x > -\frac{1}{2}$ имеем $x \geqslant \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2}$.

   Ответ: $-1 \leqslant x < -\frac{1}{2}$, $x \geqslant \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2}$.

3. (20 баллов) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2y^2 - x^2 + 2xy - 12 = 0, \\ 5x^2y^2 - 2x^2 - 3xy - 6 = 0. \end{cases}$$

   Решение: Вычтем второе уравнение из первого уравнения, умноженного на 2. В результате получим квадратное уравнение относительно xy: $(xy)^2 + 7xy - 18 = 0$, откуда $xy = 2$ и $xy = -9$.

   а) Если $xy = 2$, то $3x^2y^2 - x^2 + 2xy - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2, y_1 = 1, y_2 = -1$.

   б) Если $xy = -9$, то $x^2 = 213$.

   Ответ: $(2; 1)$, $(-2; -1)$, $\left(\sqrt{213}; -\frac{9}{\sqrt{213}}\right)$, $\left(-\sqrt{213}; \frac{9}{\sqrt{213}}\right)$.

4. (20 баллов) Окружность касается сторон AC и BC треугольника ABC в точках A и B соответственно. На дуге этой окружности, лежащей вне треугольника, расположена точка K так, что расстояния от нее до продолжений сторон AC и BC равны 39 и 156 соответственно. Найдите расстояние от точки K до прямой AB.

Решение: Пусть E,F и M – основания перпендикуляров, опущенных из точки K на прямые BC, AC и AB соответственно. Так как $\angle KBE = \angle KAB$, то $\triangle KAM$ подобен $\triangle KBE$, откуда следует, что $\frac{KM}{KA} = \frac{KE}{KB}$ (1).

Аналогично, из подобия треугольников KAF и KBM следует, что $\frac{KM}{KB} = \frac{KF}{KA}$(2).

Перемножая (1) и (2), получаем $KM^2 = KE \cdot KF = 39 \cdot 156$, откуда $KM = 78$.

Ответ: 78.

5. (25 баллов) Последовательность чисел a_1,a_2,... задана условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 143$ и $a_{n+1} = 5 \cdot \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ при всех $n \geqslant 2$. Докажите, что все члены последовательности - целые числа.

Решение: Число $a_3 = 5 \cdot 72 = 360$ целое. При $n \geqslant 4$ будут верны равенства $a_n = 5 \cdot \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}}{n-1}$ и $a_{n-1} = 5 \cdot \frac{a_1+a_2+\ldots+a_{n-2}}{n-2}$, откуда следует, что $a_n = \frac{5}{n-1}\left(\frac{n-2}{5}a_{n-1} + a_{n-1}\right) = \frac{n+3}{n-1}a_{n-1}$.

Значит, если $n \geqslant 4$, то число $a_n = \frac{(n+3)(n+2)\cdot\ldots\cdot 7}{(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 3} \cdot a_3 = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{6\cdot5\cdot4\cdot3} \cdot 360 = (n+3)(n+2)(n+1)n$ является целым, что и требовалось доказать.

Очный тур олимпиады "Будущие исследователи – будущее науки"
9 класс.

1. (15 баллов) Решите уравнение $(x^4 - 18x^2 + 82)^4 + (x^2 + 6x + 11)^2 = 5$.

Решение: Выделим полные квадраты в каждой скобке.

$((x^2 - 9)^2 + 1)^4 + ((x+3)^2 + 2)^2 = 5$.

Т.к. $(x^2 - 9)^2 \geqslant 0$, то $(x^2 - 9)^2 + 1 \geqslant 1$, а $((x^2 - 9)^2 + 1)^4 \geqslant 1$.

Аналогично, $(x+3)^2 \geqslant 0$, $(x+3)^2 + 2 \geqslant 2$, тогда $((x+3)^2 + 2)^2 \geqslant 4$.

Значит, $((x^2-9)^2+1)^4+((x+3)^2+2)^2 \geqslant 5$, и при этом равенство возможно тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} x^2 - 9 = 0, \\ x + 3 = 0. \end{cases}$$

Решением данной системы является $x = -3$.

Ответ: $x = -3$.

2. (20 баллов) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2y^2 - x^2 + 2xy - 12 = 0, \\ 5x^2y^2 - 2x^2 - 3xy - 6 = 0. \end{cases}$$

Решение: Вычтем второе уравнение из первого уравнения, умноженного на 2. В результате получим квадратное уравнение относительно xy: $(xy)^2 + 7xy - 18 = 0$, откуда $xy = 2$ и $xy = -9$.

а) Если $xy = 2$, то $3x^2y^2 - x^2 + 2xy - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$, $y_1 = 1$, $y_2 = -1$.

б) Если $xy = -9$, то $x^2 = 213$.

Ответ: $(2;1)$, $(-2;-1)$, $\left(\sqrt{213}; -\frac{9}{\sqrt{213}}\right)$, $\left(-\sqrt{213}; \frac{9}{\sqrt{213}}\right)$.

3. (20 баллов) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $a|2+x| + \frac{x^2+x-12}{x+4} = 0$ имеет ровно одно решение.

Решение: При условии $x \neq -4$ данное уравнение равносильно уравнению $a|x+2| = 3 - x$. График правой части уравнения – прямая $y = x - 3$. График левой части уравнения – это “уголок” с вершиной в точке $(-2;0)$, наклон ветвей которого определяется параметром a.

Правая ветвь “уголка” пересекает прямую при $a > -1$, левая ветвь пересекает прямую при $a > 1$ и $a \neq \frac{7}{2}$ (при $a = \frac{7}{2}$ правая ветвь проходит через выколотую точку прямой – точку $(-4;7)$). Следовательно, ровно одно решение получается при $a \in (-1;1] \cup \left\{\frac{7}{2}\right\}$.

Ответ: $a \in (-1;1] \cup \left\{\frac{7}{2}\right\}$.

4. (20 баллов) Биссектриса CM треугольника ABC делит сторону AB на отрезки, $AM = 4$ и $BM = 3$. Касательная к описанной окружности треугольника ABC, проходящая через точку C, пересекает прямую AB в точке D. Найдите CD.

Решение: Так как CD – касательная, а DA – секущая, то $CD^2 = DB \cdot DA = DB \cdot (DB + 7)$.

$\angle DCB = \frac{1}{2}\smile BC$ как угол между касательной и хордой. $\angle CAD = \frac{1}{2}\smile BC$ как вписанный. Значит, $\angle DCB = \angle CAD$. Так как CM биссектриса, то $\angle ACM =$

$\angle MCB$. Тогда $\angle CMD = \angle BAC + \angle ACM$ как внешний для треугольника CMA. Заметим, что $\angle MCD = \angle MCB + \angle BCD = \angle BAC + \angle ACM = \angle CMD$. Значит, треугольник CDM равнобедренный и $CD = DM = DB + BM = DB + 3$.

Следовательно, $(BD+3)^2 = DB \cdot (DB+7) \Leftrightarrow BD^2 + 6BD + 9 = BD^2 + 7DB \Leftrightarrow BD = 9$. Тогда $CD^2 = 9 \cdot 16 = 144 \Rightarrow CD = 12$.

Ответ: $CD = 12$.

5. (25 баллов) Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots$ задана условиями $a_1 = 1$, $a_2 = 143$ и $a_{n+1} = 5 \cdot \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ при всех $n \geqslant 2$. Докажите, что все члены последовательности - целые числа.

   Решение: Число $a_3 = 5 \cdot 72 = 360$ целое. При $n \geqslant 4$ будут верны равенства $a_n = 5 \cdot \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}}{n-1}$ и $a_{n-1} = 5 \cdot \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-2}}{n-2}$, откуда следует, что $a_n = \frac{5}{n-1} \left(\frac{n-2}{5} a_{n-1} + a_{n-1} \right) = \frac{n+3}{n-1} a_{n-1}$.

   Значит, если $n \geqslant 4$, то число $a_n = \frac{(n+3)(n+2) \cdot \ldots \cdot 7}{(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3} \cdot a_3 = \frac{(n+3)(n+2)(n+1)n}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} \cdot 360 = (n+3)(n+2)(n+1)n$ является целым, что и требовалось доказать.