

Межрегиональная олимпиада школьников  
«Будущие исследователи – будущее науки»  
2018-2019уч.г.

г.Саров, Нижегородская область

Математика  
Отборочный тур  
9 класс

Решения и ответы необходимо набрать в редакторе **Word**,  
затем распечатать, **подписать каждую страницу**,  
после чего отсканировать в **ОДИН файл формата PDF**  
и прислать полученный **PDF-файл вместе с заявкой и тезисами**  
исследовательской работы  
по электронной почте **kh.read@expd.vniief.ru** до 6 ноября 2018 года

- 1. (20 баллов)** Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых  $(x, y)$  удовлетворяют системе неравенств
$$\begin{cases} y - 1 \leq \sqrt{2x - x^2}, \\ x - 1 \leq \sqrt{2y - y^2}. \end{cases}$$
и вычислите площадь полученной фигуры.
- 2. (20 баллов)** Найдите все целые  $n$ , при которых дробь  $\frac{n^3+18n^2+13n-611}{n+9}$  является целым числом.
- 3. (20 баллов)** Найдите все пары чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих уравнению
$$\sqrt{4x^2 - 12x + 9} + |\sqrt{y} - x| = 4 - \frac{4}{|3-2x|}.$$
- 4. (20 баллов)** Докажите, что для любого натурального  $n$  выполнено
$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$
- 5. (10 баллов)** Решите уравнение  $\sqrt{(16x^4 - 8x^2 + 2)^2 + (x^2 + x + 1)^2} = 1,25$ .
- 6. (10 баллов)** На стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник. Найдите расстояние между его центром и вершиной  $C$ , если  $AB = c$  и  $\angle C = 120^\circ$ .

Межрегиональная олимпиада школьников  
«Будущие исследователи – будущее науки»  
2018-2019уч.г.

г.Саров, Нижегородская область

Математика  
Отборочный тур  
10 класс

Решения и ответы необходимо набрать в редакторе **Word**,  
затем распечатать, **подписать каждую страницу**,  
после чего отсканировать в **ОДИН файл формата PDF**  
и прислать полученный **PDF-файл вместе с заявкой и тезисами**  
исследовательской работы  
по электронной почте **kh.read@expd.vniief.ru** до 6 ноября 2018 года

1. (20 баллов) Решите неравенство  $\frac{\sqrt{-x^2-2x+3}}{|x^2+2x-3|-|x^2+6x+5|} \geq 0$ .

2. (20 баллов) Найдите все пары решений в целых числах уравнения

$$x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 + 1).$$

3. (20 баллов) Сколькими способами можно заменить все звездочки на 3 четных и 3 нечетных цифры (не обязательно различных) в числе  $2017*7**13**112*$  так, чтобы полученное число делилось на 12?

4. (20 баллов) Найдите все пары чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих уравнению

$$\sqrt{4x^2 - 12x + 9} + |\sqrt{y} - x| = 4 - \frac{4}{|3-2x|}.$$

5. (20 баллов) В параллелограмме  $ABCD$  окружность радиуса 1 с центром на отрезке  $BC$  проходит через точку  $C$  и касается отрезка  $AB$  в точке  $E$  такой, что  $\operatorname{tg}\angle AEC = 2$ . Найдите высоту параллелограмма  $CF$  и длину отрезка  $BC$ .  
Найдите площадь параллелограмма, если дополнительно известно, что  $AD=AE$ .

Межрегиональная олимпиада школьников  
«Будущие исследователи – будущее науки»  
2018-2019уч.г.

г.Саров, Нижегородская область

Математика  
Отборочный тур

11 класс

Решения и ответы необходимо набрать в редакторе **Word**,  
затем распечатать, **подписать каждую страницу**,  
после чего отсканировать в **ОДИН файл формата PDF**  
и прислать полученный **PDF-файл вместе с заявкой и тезисами**  
**исследовательской работы**  
по электронной почте **kh.read@expd.vniief.ru** до **6 ноября 2018 года**

- (10 баллов)** Гипотенуза  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  равна 17. Окружности  $S_1, S_2, S_3$  имеют радиус 2, а их центрами являются точки  $A, B, C$  соответственно. Найдите радиус окружности, которая внешним образом касается каждой из окружностей  $S_1, S_2, S_3$ .
- (10 баллов)** Каждый из корней уравнения  $x(x-a)(x+b) = 0$  является также корнем уравнения  $(a-1)x^2 + (a-b-3)x + a-b-c = 0$ . Найдите значения параметров  $a, b$  и  $c$ .
- (15 баллов)** Решите неравенство  $\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + 3x - 4} > x + \frac{1}{2}$ .
- (15 баллов)** Известно, что  $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} = \frac{20}{21}$ . Найдите значение выражения  $xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}$ .
- (15 баллов)** В равнобедренную трапецию  $ABCD$  с бóльшим основанием  $AD$  вписана окружность, касающаяся боковых сторон  $AB$  и  $CD$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Точка  $T$  – середина отрезка  $AD$ . Определите, в каком отношении прямая  $BT$  делит отрезок  $PQ$ .
- (15 баллов)** Найдите все значения параметра  $a$  такие, что уравнение  $x^3 + x^2 + 14x + a = 0$  имеет три различных корня, образующих геометрическую прогрессию.
- (20 баллов)** Саша и Маша решили полить огород. Саша открыл кран, наполнил свою лейку, и сразу вслед за ним Маша подставила свою лейку под струю. Машина лейка наполняется за 10 секунд, а Сашина за 15 секунд. Наполнив свою лейку, каждый из них начинает сразу поливать огород. Из Сашиней лейки вода выливается за 1 минуту, а из Машиной – за  $\frac{3}{4}$  минуты. Как только лейка оказывается пустой, каждый из них мгновенно подставляет её под струю воды, а если в это время воду набирает другой, то ждёт, пока кран не освободится, и сразу же начинает наполнять свою лейку. Когда никто не набирает воду, она льётся в бочку, стоящую под краном. Если бы никто не забирал воду, бочка наполнилась бы за 21 минуту. За сколько времени после включения крана наполнится бочка, если Саша и Маша всё это время продолжают поливать огород?