**Олимпиада "Будущие исследователи – будущее науки"**

 **Математика. Отборочный тур. Вариант 16.11.2019**

**7 класс**

**7.1**. На итоговой контрольной среди седьмых классов школы присутствовало 80 человек. В результате все получили положительные отметки (тройки, четвёрки или пятёрки), а средний балл оказался равен 3,45. Докажите, что четвёрок было четное количество.

**Решение**. Обозначим через *x*, *y*, *z* количество троек, четверок и пятерок, соответственно. Тогда будем иметь два уравнения:  и . Если из второго уравнения вычесть первое, умноженное на 3, то получим . Значит,  – четное число.

**7.2**. Петя говорит Коле: «Я расставил некоторые числа в вершинах куба, а затем на каждой грани написал сумму четырёх чисел в ее вершинах. Потом я сложил все шесть чисел на гранях и у меня получилось 2019. Сможешь ли ты узнать, чему равна сумма восьми чисел в вершинах куба?» А как бы вы на месте Коли ответили на этот вопрос?

**Ответ:** 673. **Решение**. Каждая вершина куба принадлежит трем граням (которые сходятся в этой вершине) и поэтому число, поставленное в этой вершине, участвует трижды при подсчете сумм на гранях. Таким образом, сумма чисел в вершинах равна 2019 : 3 = 673. *Комментарий*: другой способ решения (непосредственный) такой: обозначив 8 неизвестных чисел в вершинах куба и выразив через низ сумму чисел на гранях, после вынесения за скобки тройки, в скобках получим сумму всех чисел в вершинах

**7.3**. Докажите, что делится на 6 для любого натурального *п*.

**Решение.** Соседние множители *п* + 20, *п* + 201 имеют разную четность, и поэтому их произведение делится на 2. Далее заметим, что три множителя дают разные остатки при делении на 3, т.к. разность чисел любой пары из этих множителей не делится на 3. Значит, они дают все три остатка, и поэтому среди этих множителей есть кратный 3. Итак, данное произведение делится и на 2 и на 3, т.е. делится на 6. (*Замечание:* делимость на 3 можно также установить, рассмотрев три случая в зависимости от остатка *п* при делении на 3.)

**7.4**. Какое наименьшее количество королей надо поставить на шахматную доску так, чтобы они били все не занятые ими клетки? (Король бьёт клетки, соседние с его клеткой по стороне или вершине).

1. **Ответ**:.9 королей. **Решение.** На рисунке показано требуемое расположение девяти королей. Докажем, что меньшим числом нельзя обойтись. Действительно, рассмотрим 9 прямоугольных зон, выделенных на рисунке жирными линиями. Если предположить противное, то хотя бы в одной из этих зон нет короля. Но тогда клетка в этой зоне, отмеченная крестиком, не будет побита ни одним королем, находящимся в другой зоне, т.к. эта клетка не граничит с другими зонами.

**8 класс**

**8.1**. На итоговой контрольной среди седьмых классов школы присутствовало 80 человек. В результате все получили положительные отметки (тройки, четвёрки или пятёрки), а средний балл оказался равен 3,45. Докажите, что четвёрок было четное количество.

**Решение**. См. задачу 7.1.

**8.2**. Петя говорит Коле: «Я расставил некоторые числа в вершинах куба, а затем на каждой грани написал сумму четырёх чисел в ее вершинах. Потом я сложил все шесть чисел на гранях и у мен получилось 2019. Сможешь ли ты узнать, чему равна сумма восьми чисел в вершинах куба?» А как бы вы на месте Коли ответили на этот вопрос?

**Ответ**:673. **Решение.** См. задачу 7.2.

**8.3**. Имеется пять палочек, длина каждой больше 2 см, но меньше 8 см. Докажите, что можно взять три палочки из этих пяти и сложить из них треугольник.

**Решение.** Упорядочим длины палочек по возрастанию: . Предположив противное, будем иметь: . Далее,  и / Таким образом, получили противоречие с условием задачи.

**8.4**. Дан треугольник *АВС* с медианой *ВМ.* На медиане отметили произвольную точку *Р* и через *Р* провели прямую, параллельную *АВ*, а через точку *С* провели прямую, параллельную *ВМ*. Эти прямые пересеклись в точке *Q*. Докажите, что отрезок *ВР* делится пополам в точке пересечения с прямой *АQ*.

*C*

*B*

*A*

*D*

*M*

*Q*

*E*

*Р*

**Решение**. Пусть *D* – точка пересечения прямых *АВ* и *CQ* и *Е* – точка пересечения прямых *АР* и *CQ*. Рассмотрим треугольник *ADE* и покажем, что  *PBQ* – серединный треугольник в  *ADE* . Действительно, точка *Р* – середина отрезка *АЕ* (т.к. *М* – середина *АС* и *CQ* || *MP*). Далее, отрезки *РВ* и *PQ* – средние линии в  *ADE* , т.к. они проведены через середину стороны параллельно другим двум сторонам треугольника. Итак,  *PBQ* – серединный треугольник, и поэтому *ABQP* – параллелограмм; поэтому его диагонали в точке пересечения делятся пополам.

**9 класс**

**9.1**. Внутри прямоугольника *ABCD* отметили точку *М* и на отрезках *АМ*, *ВМ*, *СМ* и *DM* построили как на диаметрах четыре круга. Пусть  – соответственно, площади этих кругов. Докажите, что .

**Решение**. Пусть *AB* = *a*, *AD* = *b* и *х*, *у* – расстояния от точки *М* до сторон *АВ* и *AD* соответственно. Тогда по теореме Пифагора и формуле площади круга будем иметь , , , . Отсюда непосредственно следует требуемое соотношение.

**9.2**. Имеется пять палочек, длина каждой больше 2 см, но меньше 8 см. Докажите, что можно взять три палочки из этих пяти и сложить из них треугольник.

**Решение.** См. задачу 8.3.

**9.3**. Дан треугольник *АВС* с медианой *ВМ.* На медиане отметили произвольную точку *Р* и через *Р* провели прямую, параллельную *АВ*, а через точку *С* провели прямую, параллельную *ВМ*. Эти прямые пересеклись в точке *Q*. Докажите, что отрезок *ВР* делится пополам в точке пересечения с прямой *АQ*.

**Решение**. См. задачу 8.4.

**9.4**. Сколько существует трехзначных натуральных чисел *п*, для которых число *n*3 – *n*2 является точным квадратом?

**Ответ:** 22**. Решение.** Пусть  для некоторого натурального *т*. Тогда  и поэтому  тоже должно быть точным квадратом: . Значит,  и . Таким образом, требуется найти все трехзначные числа *п*, на единицу большие точных квадратов. Такими числами являются  (следующий квадрат 322 = 1024 – уже не подходит).

**10 класс**

**10.1**. Внутри прямоугольника *ABCD* отметили точку *М* и на отрезках *АМ*, *ВМ*, *СМ* и *DM* построили как на диаметрах четыре круга. Пусть  – соответственно, площади этих кругов. Докажите, что .

**Решение**. См. задачу 9.2.

**10.2**. Найдите все значения параметра *а*, для которых уравнение  имеет ровно три корня.

**Ответ:** или . **Решение.** Область определения:  или . Числа  и  уже дают два корня, а третьим корнем корень должен быть тот корень квадратного трехчлена , который лежит вне отрезка [-1, 3]. Если *а* = 0, то корень *х* = 0 не принадлежит области определения. Рассмотрим два случая:  и . В первом случае должны быть выполнены неравенства . Во втором случае имеем неравенства .

**10.3**. Биссектриса *ВК* треугольника *АВС* в точке *I* пересечения биссектрис делится в отношении . Докажите, что угол *В* острый.

**Решение**. .Пусть , , . По свойству биссектрисы в треугольниках *АВК* и *ВСК* имеем: . Обозначим . Отсюда . Тогда . Чтобы узнать, является ли угол *В* острым, нужно выяснить знак выражения . Поскольку , значение в правой части больше, чем . Значит, угол *В* – острый.

**10.4**. Сколько существует трехзначных натуральных чисел *п*, для которых число *n*3 – *n*2 является точным квадратом?

**Ответ:** 22**. Решение.** См. задачу 9.4.

**11 класс**

**11.1**. Решите уравнение .

**Ответ:** . *х* = 0. **Решение**. Левая часть уравнения не превосходит единицы, причем она может равняться единице лишь при условии одновременного выполнения двух равенств:  и . Отсюда  и , . Тогда , т.е.  при некоторых целых *n*, *k*. Поскольку  – иррациональное число, то из последнего равенства следует, что обязано равняться нулю. Значит, *k* = *n* = 0 .и *х* = 0.

.

**11.2**. Найдите все значения параметра *а*, для которых уравнение  имеет ровно три корня.

**Ответ:** или . **Решение**. См. задачу 10.2.

**11.3**.  Биссектриса *ВК* треугольника *АВС* в точке *I* пересечения биссектрис делится в отношении . Докажите, что угол *В* острый.

**Решение**. См. задачу 10.3.

**11.4**. *п* векторов в пространстве таковы, что любая пара из них образует тупой угол. Какое наибольшее значение может принимать *п*?

**Ответ:** 4. **Решение**. Пусть .– данные векторы. Направим ось *z* координатного пространства вдоль . Тогда *z*-координата остальных векторов должна быть отрицательна (это следует из формулы для косинуса угла между векторами через скалярное произведение векторов). Пусть  – координаты векторов и пусть двумерные векторы  – это проекции данных векторов на плоскость *хОу*. Тогда угол между любой парой векторов  и  тупой: действительно, , т.к.  (в первом из данных неравенств использовано то, что *zi* и *zj* отрицательны, а во втором – то, что угол между  и  тупой). Итак, на плоскости *хОу* векторы  обладают тем же свойством, а именно: угол между любой парой из них тупой. Поэтому  ( это легко показать, если, отложив векторы из одной точки, сложить соседние углы по кругу, т.к. в сумме они дают 360°). Таким образом, получаем оценку . Пример для четырех векторов можно привести такой: , где – достаточно малое положительное число, можно взять  = 0.1.

**Олимпиада "Будущие исследователи – будущее науки"**

 **Математика. Отборочный тур. Вариант 17.11.2019**

**7 класс**

**7.1**. В 7а классе по списку 60% девочек. Когда из-за болезни в класс не пришли два мальчика и одна девочка, то девочек присутствовало 62,5%. Сколько в классе по списку девочек и мальчиков?

**Ответ**:21 девочка и 14 мальчиков. **Указание**. Пусть по списку в классе *d* девочек и *m* мальчиков. Из условий задачи имеем два уравнения:  и . Из первого уравнения . Подставив  во второе уравнение и решив его, получим *d* = 21, и тогда *m* = 14.

**7.2**. В вершинах куба расставили *n* положительных и (8–*n*) отрицательных чисел, а затем для каждой грани подсчитали произведение четырех чисел в вершинах этой грани. Могло ли оказаться так, что все шесть подсчитанных произведений отрицательны, если: **а**) *n*= 4; **б**) *n*= 5?

**Ответ: а)** могло; **б**) нет. **Решение**. **а)** Пусть *ABCD* – нижняя грань куба, а над ней грань *A*1*B*1*C*1*D*1.. Расставим отрицательные числа в вершине *А* и еще в трех вершинах, соединенных с А ребрами куба, т.е. в вершинах *A*1, *B* и *D,*. а в остальных четырех вершинах расставим положительные числа. Тогда в трех граня с вершиной *А* будет по три «отрицательных вершины, а в остальных трех гранях –- по одной, и все произведения в гранях будут отрицательны. **б**) Предположим, от противного, что можно расставить нужным образом 3 отрицательных числа. Тогда в каждой грани должно быть нечетное количество «отрицательных» вершин (одна или три). Рассмотрим две параллельные грани – верхнюю и нижнюю. Они содержат все 8 вершин куба и в сумме количество «отрицательных» вершин окажется четным (как сумма двух нечетных). Поскольку 3 – число нечетное, получаем противоречие.

**7.3**. Сколько существует дробей , обладающих такими свойствами: *п* и *т* – двузначные натуральные числа, причём значение дроби не изменится, если к *п* прибавить 20, а к *т* прибавить 19?

**Ответ:** 4. **Решение**. Из соотношения  получим . Поскольку 20 и 19 взаимно просты, *т* должно делиться на 19, а *п* – на 20. Значит, , тогда , где *k* – натуральное число. Из ограничений  и  получим  и соответствующие 4 дроби: , ,  и .

**7.4**. Двое играют в такую игру: шоколадку размером долек первый игрок разламывает (вдоль углублений) на две прямоугольные части и съедает любую часть. С оставшейся частью второй игрок поступает аналогично, и т.д. Проигрывает тот, кто не имеет хода (когда есть всего одна долька). Кто выиграет при правильной игре?

**Ответ**:выиграет первый игрок. **Решение**. Стратегия первого игрока такая: после своего хода оставлять шоколадный квадрат, т.е. сначала он отламывает и съедает прямоугольник , оставляя квадрат . Второй игрок после своего первого хода оставляет прямоугольник , и первый игрок вторым ходом оставляет квадрат  и т.д., пока (не более чем за 8 ходов) первый игрок не оставит второму одну дольку.

**8 класс**

**8.1**. 8а классе по списку 60% девочек. Когда из-за болезни в класс не пришли два мальчика и одна девочка, то девочек присутствовало 62,5%. Сколько в классе по списку девочек и мальчиков?

**Ответ**:21 девочка и 14 мальчиков/ **Решение**. См. задачу 7.1.

**8.2**. Сколько существует дробей , обладающих такими свойствами: *п* и *т* – двузначные натуральные числа, причём значение дроби не изменится, если к *п* прибавить 20, а к *т* прибавить 19?

**Ответ:** 4. **Решение.** См. задачу 7.3.

**8.3**. На ребрах куба в некотором порядке расставили числа 1, 2, ..., 12 и для каждой грани подсчитали сумму четырех чисел на ее ребрах. Докажите, что есть грань, для которой эта сумма больше 25.

**Решение.** Подсчитаем на каждой грани соответствующую сумму и затем сложим эти суммы для всех шести граней. Получим в результате (1 + 2 + … + 12)⋅2, так как при таком подсчете любое ребро будет засчитано дважды. Итак, общая сумма 156, и тогда хотя бы для одной грани ее сумма не меньше . (Действительно, в противном случае мы получили бы общую сумму не больше ).

**8.4**. Дан прямоугольный треугольник, у которого высота, опущенная на гипотенузу, в 4 раза меньше гипотенузы. Найдите острые углы этого треугольника.

**Ответ:** 15° и 75°. **Решение**. Пусть *АВС* – данный треугольник, *СМ* – высота из вершины *С* прямого угла и *СО* – медиана. Рассмотрим прямоугольный треугольник *СМО*. По свойству медианы из вершины прямого угла , а значит (по условию) *СО* вдвое больше *СМ*. Поэтому (по свойству прямоугольного треугольника с катетом, равным половине гипотенузы) ∠ *СОМ* = 30°. Тогда, рассматривая равнобедренный  *COB* с внешним углом *СОМ*, получаем ∠ *ОСВ* =∠ *ОВС* = 15°, ∠ *САВ* = 90° – 15° = 75°.

**9 класс**

**9.1**. **а)** Докажите, что для любого числа *d* > 0 существует прямоугольный треугольник, у которого больший катет отличается по длине и от меньшего катета и от гипотенузы на *d*. **б)** Докажите, что радиус вписанной окружности такого треугольника равен *d.*

**Решение**. **а)** Пусть *a* < *b* – длины катетов, *с* – длина гипотенузы. Тогда должны выполняться равенства ,  и по теореме Пифагора  и значит, . Очевидная проверка (обратная теорема Пифагора) показывает, что такой треугольник прямоугольный (и подобный пифагорову треугольнику со сторонами 3, 4, 5). **б)** Из пункта а) следует, что такой треугольник единственный, его стороны 3*d*, 4*d*, 5*d*, и для него *.*

**9.2**. На ребрах куба в некотором порядке расставили числа 1, 2, ..., 12 и для каждой грани подсчитали сумму четырех чисел на ее ребрах. Докажите, что есть грань, для которой эта сумма больше 25.

**Решение.** См. задачу 8.3.

**9.3**. Дан прямоугольный треугольник, у которого высота, опущенная на гипотенузу, в 4 раза меньше гипотенузы. Найдите острые углы этого треугольника.

**Ответ:** 15° и 75°. **Решение**. См. задачу 8.4.

**9.4.** Существует ли такое натуральное *п*, что число  делится на 100?

**Ответ:** не существует. **Решение.** Преобразуем выражение . Если данная сумма делится на 100 (а значит, и на 10), то число  должно делиться на 10,а тогда оно делится на 100 (в разложении точного квадрата на простые множители все показатели степеней – четные числа). Но 2010 не делится на 100, и поэтому искомого числа *п* не существует.

**10 класс**

**10.1**. **а)** Докажите, что для любого числа *d* > 0 существует прямоугольный треугольник, длины сторон которого образуют арифметическую прогрессию с разностью *d*. **б)** Докажите, что радиус вписанной окружности такого треугольника равен *d.*

**Решение**. См. задачу 9.1.

**10.2**. Даны числа *a*, *b* (не обязательно различные) и рассмотрены соответствующие квадратные трехчлены  и . Оказалось, что эти трехчлены имеют общий корень. Могут ли *a* и *b* быть ненулевыми числами?

**Ответ**:не могут. **Решение**.Пусть  и , где *х*. – общий корень. Вычитая эти равенства, получим . Если *a* = *b*, то += 0, но дискриминант данного уравнения  отрицательный при . Если же , то  (т.к. у этого квадратного трехчлена переменной *а* дискриминант  при ).

**10.3**. Существует ли такое натуральное *п*, что число  делится на 100?

**Ответ:** не существует. **Решение**. См. задачу 9.4.

**10.4**. Даны треугольник и четырехугольник, про которые известно следующее: для любых двух углов треугольника найдется угол в четырехугольнике, по величине равный сумме этих двух углов треугольника. Докажите, что треугольник равнобедренный.

**Решение.** .Пусть , ,  – углы треугольника. Если предположить, от противного, что все эти углы различны, то числа ( + ), ( + ) и ( + ) все будут различными, и в четырехугольнике будет три разных вершины с такими углами. Сумма этих трех углов равна 2⋅180° = 360°, но это противоречит тому, что в четырехугольнике сумма всех четырех углов равна 360°.

**11 класс**

**11.1**. Решите уравнение .

**Ответ:** . **Решение.** Найдем область определения. Имеем  или . При этом получаем четыре значения , для которых подкоренное выражение обращается в нуль. Первый множитель уравнения  обращается в нуль только при условии  (т.к. ). Таким образом, , но в область определения попадают лишь два значения, а именно  из указанной серии (неравенство  следует из неравенств  и ).

**11.2**. Дан прямоугольник с целочисленными координатами вершин на координатной плоскости. Пусть  – угол между его диагоналями. Обязательно ли рациональным числом является **а)** ?; **б)** ?

**Ответ: а)** да; **б)** да. **Решение**. **а)** Пусть ***ABCD* –** данный прямоугольник и *O* – его центр. Тогда , . Поскольку  – число рациональное, то  – тоже рациональное число. **б)** Заметим, что  – число рациональное, т.к.  – это угол между прямыми с рациональными угловыми коэффициентами –, скажем,  и , и . Поэтому и  – число рациональное..

**11.3**.  Существует ли такое натуральное *п*, что число  делится на 100?

**Ответ:** не существует. **Решение**. См. задачу 10.3

**11.4.** Даны треугольник и четырехугольник, про которые известно следующее: для любых двух углов треугольника найдется угол в четырехугольнике, по величине равный сумме этих двух углов треугольника. Докажите, что треугольник равнобедренный.

**Решение**. См. задачу 10.4.