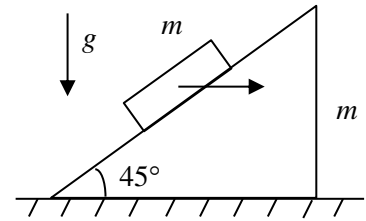


РЕШЕНИЯ

11 класс

1. (30 баллов) Брусок массы m положили на гладкую наклонную грань клина той же массы с углом 45° при основании, расположенного на гладком горизонтальном столе (см. рис.). Какую горизонтальную силу нужно приложить к бруску, чтобы его ускорение было направлено вертикально? Ускорение свободного падения равно g .



Ответ: Нужно приложить силу $mg/2$.

Решение: Обозначив через F искомую силу, а через N силу давления клина на брусок, запишем второй закон Ньютона для бруска в проекции на горизонтальную ось

$$0 = F - N \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(здесь учтено, что ускорение бруска направлено по вертикали) и на вертикальную ось

$$ma_1 = mg - N \frac{\sqrt{2}}{2},$$

где a_1 – ускорение бруска. Второй закон Ньютона для клина в проекции на горизонтальную ось запишем в виде

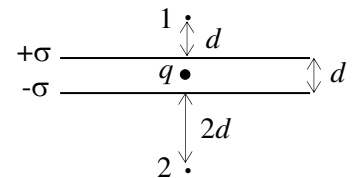
$$ma_2 = N \frac{\sqrt{2}}{2},$$

где a_2 – ускорение клина. Из условия равенства проекций ускорений бруска и клина на ось, перпендикулярную наклонной грани клина (кинематическая связь), следует, что

$$a_1 = a_2.$$

Из системы записанных уравнений находим, что $F = mg/2$.

2. (40 баллов) Положительный точечный заряд q находится посередине между двумя параллельными плоскостями с равномерно нанесенными на них зарядами противоположных знаков. Плотности зарядов на плоскостях равны $+\sigma$ и $-\sigma$, расстояние между плоскостями равно d . Найти разность потенциалов между указанными на рисунке точками 1 и 2. *Указание.* Величина напряженности электрического поля заряженной плоскости равна $\sigma/(2\epsilon_0)$, где ϵ_0 – электрическая постоянная.



Ответ: Разность потенциалов равна $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{15\pi\epsilon_0 d} + \frac{\sigma d}{\epsilon_0}$.

Решение: Разность потенциалов равна сумме разностей потенциалов, вносимых точечным зарядом

$$\frac{2q}{12\pi\epsilon_0 d} - \frac{2q}{20\pi\epsilon_0 d} = \frac{q}{15\pi\epsilon_0 d},$$

и заряженными плоскостями

$$\frac{\sigma d}{\epsilon_0}.$$

При записи последней формулы учтено, что электрическое поле, создаваемое пластинами, равно сумме величин полей пластин в пространстве между ними и равно нулю снаружи. Суммируя приведенные выражения, находим ответ.

3. (30 баллов) После отклонения маятника (груза на нити) на некоторый угол возникшие колебания постепенно затухают из-за трения о воздух, при этом сила трения совершает работу -20 мДж. Какую работу совершит сила трения, если после отклонения маятника на тот же угол середину нити закрепить?

Ответ: Сила трения совершит работу -10 мДж.

Решение: Работа силы трения равна разности механических энергий шарика в конечном (колебания затухли и шарик неподвижно висит на вертикальной нити) и начальном (нить с шариком отклонена на максимальный угол) состояниях. Разность механических энергий равна разности потенциальных энергий в этих состояниях, т.е. $-mgL(1 - \cos\alpha_{\max})$, где m – масса шарика, g – ускорение свободного падения, L – длина маятника, α_{\max} – максимальный угол отклонения нити. После закрепления середины нити длина маятника уменьшилась в 2 раза, соответственно в 2 раза уменьшилось абсолютное значение работы силы трения.

10 класс

1. (30 баллов) Под каким углом к горизонту было брошено тело, если на половине максимальной высоты подъема его скорость уменьшилась на $1/4$?

Ответ: Тангенс искомого угла равен $\sqrt{7}$.

Решение: Обозначив через V_{0x} и V_{0y} горизонтальную и вертикальную компоненты начальной скорости тела, а через V_y вертикальную компоненту скорости на половине максимальной высоты подъема H , запишем следующие соотношения:

$$V_{0y}^2 - V_y^2 = 2g \frac{H}{2}, \quad V_{0y}^2 = 2gH.$$

Отсюда находим, что $V_y^2 = \frac{V_{0y}^2}{2}$. Учитывая, что горизонтальная компонента скорости не меняется во время полета, выразим полную скорость на высоте $H/2$ как

$$\sqrt{V_{0x}^2 + \frac{V_{0y}^2}{2}}.$$

По условию задачи эта скорость равна $\frac{3}{4} \sqrt{V_{0x}^2 + V_{0y}^2}$, т.е.

$$\sqrt{V_{0x}^2 + \frac{V_{0y}^2}{2}} = \frac{3}{4} \sqrt{V_{0x}^2 + V_{0y}^2}.$$

Из последнего соотношения находим, что $V_{0y}/V_{0x} = \sqrt{7}$, что и определяет тангенс угла, под которым было брошено тело.

2. (30 баллов) Брусок массы m положили на гладкую наклонную грань клина той же массы с углом 45° при основании, расположенного на гладком горизонтальном столе (см. рис.). Какую горизонтальную силу нужно приложить к бруску, чтобы его ускорение было направлено вертикально? Ускорение свободного падения равно g .

Ответ: Нужно приложить силу $mg/2$.

Решение: Обозначив через F искомую силу, а через N силу давления клина на брусок, запишем второй закон Ньютона для бруска в проекции на горизонтальную ось

$$0 = F - N \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(здесь учтено, что ускорение бруска направлено по вертикали) и на вертикальную ось

$$ma_1 = mg - N \frac{\sqrt{2}}{2},$$

где a_1 – ускорение бруска. Второй закон Ньютона для клина в проекции на горизонтальную ось запишем в виде

$$ma_2 = N \frac{\sqrt{2}}{2},$$

где a_2 – ускорение клина. Из условия равенства проекций ускорений бруска и клина на ось, перпендикулярную наклонной грани клина (кинематическая связь), следует, что

$$a_1 = a_2.$$

Из системы записанных уравнений находим, что $F = mg/2$.

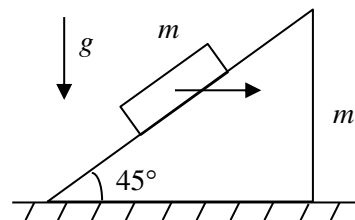
3. (40 баллов) Гантель в виде жесткого невесомого стержня с двумя шариками одинаковой массы на концах стоит вертикально на гладком горизонтальном столе. Из-за неустойчивости гантель приходит в движение. Какой угол будет составлять с вертикалью стержень гантели в момент, когда скорость верхнего шарика будет направлена под углом 45° к вертикали?

Ответ: Тангенс искомого угла равен $0,5$.

Решение: Чтобы вектор скорости верхнего шарика составлял угол 45° с вертикалью, горизонтальная и вертикальная компоненты скорости этого шарика должны быть равны по величине. Из закона сохранения импульса по горизонтали следует, что такой же должна быть и скорость нижнего шарика. Обозначим все эти скорости через V , а угол отклонения стержня от вертикали через α . Из неизменности длины стержня следует равенство проекций скоростей шариков на направление стержня, т.е.

$$V \sin \alpha = V \cos \alpha - V \sin \alpha.$$

Отсюда получаем $\operatorname{tg} \alpha = 0,5$.



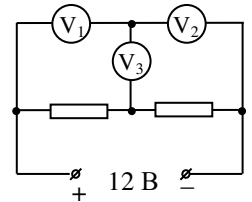
9 класс

1. (30 баллов) Движущаяся прямолинейно с постоянным ускорением частица проходит за промежуток времени от 0 до t_1 путь S_1 , а за промежуток от 0 до $2t_1$ путь $4S_1/3$. Какой путь пройдет частица к моменту времени $3t_1$?

Ответ: Частица пройдет путь $\frac{5}{3}S_1$.

Решение: Из условия задачи можно понять, что ускорение частицы направлено против начальной скорости и в момент $2t_1$ скорость частицы обращается в нуль. Отсюда следует, что за промежуток времени от $2t_1$ до $3t_1$ частица пройдет такой же путь, как от t_1 до $2t_1$, т.е. $S_1/3$. В итоге, полный путь за время $3t_1$ будет равен $5S_1/3$.

2. (40 баллов) В цепи, приведенной на рисунке, все вольтметры одинаковые, напряжение источника равно 12 В, вольтметр V_1 показывает 5 В. Чему равно отношение сопротивлений резисторов, если эти сопротивления малы по сравнению с сопротивлением вольтметра?



Ответ: Сопротивление правого на схеме резистора больше сопротивления левого в 3 раза.

Решение: Сумма напряжений на вольтметрах V_1 и V_2 равна напряжению источника 12 В. Следовательно, напряжение на вольтметре V_2 равно $12\text{ В} - 5\text{ В} = 7\text{ В}$. Поскольку сопротивления вольтметров одинаковы, ток через V_2 в $7/5$ раз больше, чем через V_1 . Это означает, что через вольтметр V_3 к V_2 подтекает дополнительный ток, составляющий $2/5$ от тока через V_1 . Следовательно, напряжение на V_3 равно 2 В. Напряжение на левом резисторе равно разности напряжений на V_1 и V_2 , т.е. $5\text{ В} - 2\text{ В} = 3\text{ В}$, а на правом – сумме напряжений на V_3 и V_2 , т.е. $2\text{ В} + 7\text{ В} = 9\text{ В}$. Поскольку токи через резисторы можно считать одинаковыми (токи через вольтметры малы в силу их большого сопротивления), а напряжения на резисторах отличаются в 3 раза, то приходим к выводу, что сопротивление правого резистора в 3 раза больше сопротивления левого.

3. (30 баллов) Сплошной цилиндр из льда поставили на дно пустого цилиндрического сосуда, дно которого подогревается. Считая, что таяние происходит только в месте контакта льда с дном, найти, какая часть льда растает к моменту, когда лед станет плавать. Площадь дна сосуда в два раза больше площади основания ледяного цилиндра.

Ответ: Растает половина льда.

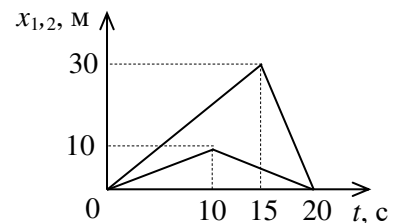
Решение: Введем следующие обозначения: H – начальная высота ледяного цилиндра, x – высота его растаявшей к указанному моменту части, y – высота уровня образовавшейся из растаявшего льда воды, S – площадь основания ледяного цилиндра, $\rho_{\text{л}}$ – плотность льда (900 кг/м^3), $\rho_{\text{в}}$ – плотность воды (1000 кг/м^3). Приравняем массы растаявшего льда и образовавшейся воды:

$$\rho_{\text{л}}xS = \rho_{\text{в}}y(2S - S),$$

откуда получаем $y = 0,9x$. Далее учтем, что лед начнет плавать, когда под водой окажется $0,9$ его оставшегося объема или, что то же, оставшейся высоты (площадь сечения ледяного цилиндра не меняется), т.е. при $y = 0,9(H - x)$. Исключая y из двух полученных уравнений, находим $x = H/2$, т.е. растает половина цилиндра.

8 класс

1. (30 баллов) Графики зависимости от времени координат x_1 и x_2 двух тел, совершающих движение вдоль оси x , приведены на рисунке. В течение какого времени тела удаляются друг от друга? Чему равна максимальная скорость удаления тел?



Ответ: Тела удаляются друг от друга в течение первых 15 секунд движения. Максимальная скорость удаления достигается на промежутке от 10 с до 15 с и равна 3 м/с.

Решение: На интервале 0-10 с первое тело удаляется от начала оси со скоростью 2 м/с, а второе – со скоростью 1 м/с. При этом первое тело удаляется от второго со скоростью 1 м/с. На интервале 10-15 с первое тело продолжает удаляться от начала оси с той же скоростью, а второе – приближается к началу оси со скоростью 1 м/с. При этом скорость удаления тел друг от друга равна 3 м/с. На интервале 15-20 с оба тела движутся в одну сторону – к началу оси. При этом первое тело догоняет второе, т.е. тела сближаются. Таким образом, тела удаляются друг от друга на интервале 0-15 с, максимальная скорость удаления тел друг от друга достигается на интервале 10-15 с и равна 3 м/с.

2. (40 баллов) Сплошной цилиндр из льда поставили на дно пустого цилиндрического сосуда, дно которого подогревается. Считая, что таяние происходит только в месте контакта льда с дном, найти, какая часть льда растает к моменту, когда лед станет плавать. Площадь дна сосуда в два раза больше площади основания ледяного цилиндра.

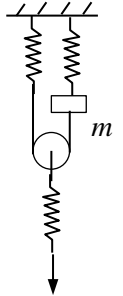
Ответ: Растает половина льда.

Решение: Введем следующие обозначения: H – начальная высота ледяного цилиндра, x – высота его растаявшей к указанному моменту части, y – высота уровня образовавшейся из растаявшего льда воды, S – площадь основания ледяного цилиндра, $\rho_{\text{л}}$ – плотность льда (900 кг/м^3), $\rho_{\text{в}}$ – плотность воды (1000 кг/м^3). Приравняем массы растаявшего льда и образовавшейся воды:

$$\rho_{\text{л}}xS = \rho_{\text{в}}y(2S - S),$$

откуда получаем $y = 0,9x$. Далее учтем, что лед начнет плавать, когда под водой окажется $0,9$ его оставшегося объема или, что то же, оставшейся высоты (площадь сечения ледяного цилиндра не меняется), т.е. при $y = 0,9(H - x)$. Исключая y из двух полученных уравнений, находим $x = H/2$, т.е. растает половина цилиндра.

3. (30 баллов) В системе, показанной на рисунке, масса груза равна m , все пружины одинаковы, блок, нить и пружины невесомы. Найти силу, приложенную к нижней пружине, если известно, что две пружины растянуты одинаково. Ускорение свободного падения равно g .

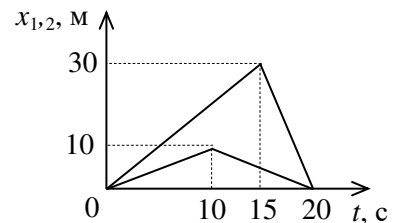


Ответ: Приложенная сила равна $2mg$.

Решение: Одинаково растянутыми могут быть только нижняя и правая из верхних пружин. Обозначим приложенную к нижней пружине силу через F . Тогда натяжение нити, перекинутой через блок, равно $F/2$. Правая верхняя пружина растягивается суммарной силой $mg + F/2$, а нижняя – силой F . Поскольку деформации этих пружин одинаковы, то равны и растягивающие их силы, т.е. $mg + F/2 = F$. Отсюда находим $F = 2mg$.

7 класс

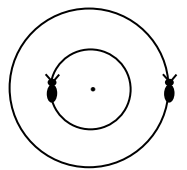
1. (40 баллов) Графики зависимости от времени координат x_1 и x_2 двух тел, совершающих движение вдоль оси x , приведены на рисунке. В течение какого времени тела удаляются друг от друга? Чему равна максимальная скорость удаления тел?



Ответ: Тела удаляются друг от друга в течение первых 15 секунд движения. Максимальная скорость удаления достигается на промежутке от 10 с до 15 с и равна 3 м/с.

Решение: На интервале 0-10 с первое тело удаляется от начала оси со скоростью 2 м/с, а второе – со скоростью 1 м/с. При этом первое тело удаляется от второго со скоростью 1 м/с. На интервале 10-15 с первое тело продолжает удаляться от начала оси с той же скоростью, а второе – приближается к началу оси со скоростью 1 м/с. При этом скорость удаления тел друг от друга равна 3 м/с. На интервале 15-20 с оба тела движутся в одну сторону – к началу оси. При этом первое тело догоняет второе, т.е. тела сближаются. Таким образом, тела удаляются друг от друга на интервале 0-15 с, максимальная скорость удаления тел друг от друга достигается на интервале 10-15 с и равна 3 м/с.

2. (30 баллов) Два жучка одновременно начинают равномерное движение со скоростью V по концентрическим окружностям радиусов R и $2R$ из положений, показанных на рисунке. Через какое минимальное время относительная скорость жучков станет максимальной? Чему равно это максимальное значение?



Ответ: Максимальная относительная скорость жучков достигается через минимальное время $2\pi R/(3V)$ и равна $2V$.

Решение: Максимальная относительная скорость жучков равна $2V$ и достигается в моменты, когда скорости жучков направлены противоположно. В эти моменты жучки и центр окружностей находятся на одной прямой. Первый раз это достигается, когда жучок, движущийся по окружности большего радиуса, пройдет $1/3$ своей окружности, а другой – пройдет $2/3$ своей, т.е. через время $2\pi R/(3V)$ после начала движения.

3. (30 баллов) Два аквариума в форме прямоугольных параллелепипедов, площади дна которых отличаются в два раза, стоят рядом на горизонтальном столе и соединены вблизи дна тонкой трубкой, образуя таким образом сообщающиеся сосуды. В сообщающихся сосудах уровень жидкости всегда одинаков. Аквариумы частично заполнены водой, так что в каждом из них остается свободный объем 4 литра. В аквариум с меньшей площадью дна доливают 10 литров воды. Сколько воды выльется из аквариума с большей площадью дна?

Ответ: Выльется 4 литра воды.

Решение: У широкого аквариума край находится над первоначальным уровнем воды на вдвое меньшей высоте, чем у узкого аквариума. При наливании воды в узкий аквариум уровень воды в обоих аквариумах будет подниматься до тех пор, пока не достигнет края широкого аквариума. При этом в узком аквариуме над

уровнем воды остается еще объем 2 л. При дальнейшем наливании воды в узкий аквариум уровень воды в нем будет оставаться постоянным, а наливаемая вода, перетекая в широкий аквариум, будет выливаться через его край. Таким образом, без перелива можно налить 6 л, из которых 4 л заполнят широкий аквариум а 2 л – половину свободного объема узкого аквариума. При наливании 10 л через край широкого аквариума перельется 4 л.