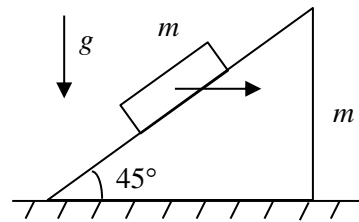


РЕШЕНИЯ

11 класс

1. (30 баллов) Брусок массы  $m$  положили на гладкую наклонную грань клина той же массы с углом  $45^\circ$  при основании, расположенного на гладком горизонтальном столе (см. рис.). Чему равно ускорение бруска, если оно оказалось направленным вертикально? Ускорение свободного падения равно  $g$ .



**Ответ:** Ускорение бруска равно  $g/2$ .

**Решение:** Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекции на вертикальную ось

$$ma_1 = mg - N \frac{\sqrt{2}}{2},$$

где  $a_1$  – ускорение бруска и  $N$  – сила давления клина на брусок. Запишем далее второй закон Ньютона для клина в проекции на горизонтальную ось

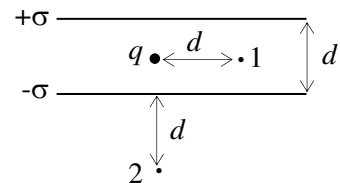
$$ma_2 = N \frac{\sqrt{2}}{2},$$

где  $a_2$  – ускорение клина. Из условия равенства проекций ускорений бруска и клина на ось, перпендикулярную наклонной грани клина (кинематическая связь), следует, что

$$a_1 = a_2.$$

Из системы записанных уравнений находим, что  $a_1 = g/2$ .

2. (40 баллов) Положительный точечный заряд  $q$  находится посередине между двумя параллельными плоскостями с равномерно нанесенными на них зарядами противоположных знаков. Плотности зарядов на плоскостях равны  $+\sigma$  и  $-\sigma$ , расстояние между плоскостями равно  $d$ . Найти разность потенциалов между указанными на рисунке точками 1 и 2. *Указание.* Величина напряженности электрического поля заряженной плоскости равна  $\sigma/(2\epsilon_0)$ , где  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная.



**Ответ:** Разность потенциалов равна  $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{12\pi\epsilon_0 d} + \frac{\sigma d}{2\epsilon_0}$ .

**Решение:** Разность потенциалов равна сумме разностей потенциалов, вносимых точечным зарядом

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 d} - \frac{q}{6\pi\epsilon_0 d} = \frac{q}{12\pi\epsilon_0 d},$$

и заряженными плоскостями

$$\frac{\sigma d}{2\epsilon_0}.$$

При записи последней формулы учтено, что электрическое поле, создаваемое пластинами, равно сумме величин полей пластин в пространстве между ними и равно нулю снаружи. Суммируя приведенные выражения, находим ответ.

3. (30 баллов) После отклонения маятника (груза на нити) на некоторый угол возникшие колебания постепенно затухают из-за трения о воздух, при этом выделяется 30 мДж тепла. Какое тепло выделится, если после отклонения маятника на тот же угол середину нити закрепить?

**Ответ:** Выделится 15 мДж тепла.

**Решение:** Выделившееся тепло равно убыли механической энергии шарика при переходе из начального состояния (нить с шариком отклонена на максимальный угол) в конечное (колебания затухли и шарик неподвижно висит на вертикальной нити). Убыль механической энергии равна убыли потенциальной энергии, т.е.  $mgL(1 - \cos\alpha_{\max})$ , где  $m$  – масса шарика,  $g$  – ускорение свободного падения,  $L$  – длина маятника,  $\alpha_{\max}$  – максимальный угол отклонения нити. После закрепления середины нити длина маятника уменьшилась в 2 раза, соответственно в 2 раза уменьшилось количество выделившегося тепла.

### 10 класс

1. (30 баллов) Скорость брошенного под углом к горизонту тела составила  $3/4$  от начальной при подъеме на половину максимальной высоты. Найти отношение начальной скорости к скорости тела на максимальной высоте.

**Ответ:** Отношение скоростей равно  $2\sqrt{2}$ .

**Решение:** Обозначив через  $V_{0x}$  и  $V_{0y}$  горизонтальную и вертикальную компоненты начальной скорости тела, а через  $V_y$  вертикальную компоненту скорости на половине максимальной высоты подъема  $H$ , запишем следующие соотношения:

$$V_{0y}^2 - V_y^2 = 2g \frac{H}{2}, \quad V_{0y}^2 = 2gH.$$

Отсюда находим, что  $V_y^2 = \frac{V_{0y}^2}{2}$ . Учитывая, что горизонтальная компонента скорости не меняется во время полета, выразим полную скорость на высоте  $H/2$  как

$$\sqrt{V_{0x}^2 + \frac{V_{0y}^2}{2}}.$$

По условию задачи эта скорость равна  $\frac{3}{4} \sqrt{V_{0x}^2 + V_{0y}^2}$ , т.е.

$$\sqrt{V_{0x}^2 + \frac{V_{0y}^2}{2}} = \frac{3}{4} \sqrt{V_{0x}^2 + V_{0y}^2}.$$

Из последнего соотношения находим, что  $V_{0y}/V_{0x} = \sqrt{7}$ . Искомое отношение равно  $\frac{V_0}{V_{0x}} = \frac{\sqrt{V_{0x}^2 + V_{0y}^2}}{V_{0x}} =$

$$\sqrt{1 + \frac{V_{0y}^2}{V_{0x}^2}} = 2\sqrt{2}.$$

2. (30 баллов) Брусок массы  $m$  положили на гладкую наклонную грань клина той же массы с углом  $45^\circ$  при основании, расположенного на гладком горизонтальном столе (см. рис.). Чему равно ускорение бруска, если оно оказалось направленным вертикально? Ускорение свободного падения равно  $g$ .

**Ответ:** Ускорение бруска равно  $g/2$ .

**Решение:** Запишем второй закон Ньютона для бруска в проекции на вертикальную ось

$$ma_1 = mg - N \frac{\sqrt{2}}{2},$$

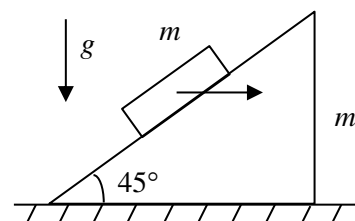
где  $a_1$  – ускорение бруска и  $N$  – сила давления клина на брусок. Запишем далее второй закон Ньютона для клина в проекции на горизонтальную ось

$$ma_2 = N \frac{\sqrt{2}}{2},$$

где  $a_2$  – ускорение клина. Из условия равенства проекций ускорений бруска и клина на ось, перпендикулярную наклонной грани клина (кинематическая связь), следует, что

$$a_1 = a_2.$$

Из системы записанных уравнений находим, что  $a_1 = g/2$ .



3. (40 баллов) Гантель в виде жесткого невесомого стержня с двумя шариками на концах стоит вертикально на гладком горизонтальном столе. Масса нижнего шарика вдвое больше массы верхнего. Из-за неустойчивости гантель приходит в движение. Какой угол будет составлять с вертикалью стержень гантели в момент, когда скорость верхнего шарика будет направлена под углом  $45^\circ$  к вертикали?

**Ответ:** Тангенс искомого угла равен  $2/3$ .

**Решение:** Чтобы вектор скорости верхнего шарика составлял угол  $45^\circ$  с вертикалью, горизонтальная и вертикальная компоненты скорости этого шарика должны быть равны по величине. Из закона сохранения импульса по горизонтали следует, что скорость нижнего шарика должна быть в 2 раза меньше горизонтальной компоненты скорости верхнего шарика. Обозначим компоненты скорости верхнего шарика через  $V$ , а угол отклонения стержня от вертикали через  $\alpha$ . Из неизменности длины стержня следует равенство проекций скоростей шариков на направление стержня, т.е.

$$0,5Vsina = Vcos\alpha - Vsina.$$

Отсюда получаем  $tg\alpha = 2/3$ .

### 9 класс

1. (30 баллов) Движущаяся прямолинейно с постоянным ускорением частица проходит за промежуток времени от 0 до  $t_1$  путь  $S_1$ , а за промежуток от 0 до  $2t_1$  путь  $4S_1/3$ . Чему будет равна скорость частицы в момент  $3t_1$ ?

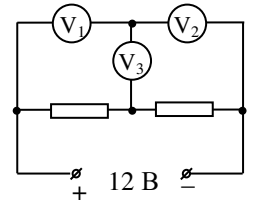
**Ответ:** Скорость частицы будет равна  $\frac{2S_1}{3t_1}$ .

**Решение:** Из условия задачи можно понять, что ускорение частицы направлено против начальной скорости и в момент  $2t_1$  скорость частицы обращается в нуль. Отсюда следует, что за промежуток времени от  $2t_1$  до  $3t_1$  частица пройдет такой же путь, как от  $t_1$  до  $2t_1$ , т.е.  $S_1/3$ . Записывая уравнения

$$\frac{1}{3}S_1 = \frac{at_1^2}{2}, \quad V = at_1,$$

где  $a$  – ускорение частицы,  $V$  – искомая скорость, получаем из них, что  $V = \frac{2S_1}{3t_1}$ .

2. (40 баллов) В цепи, приведенной на рисунке, все вольтметры одинаковые, напряжение источника равно 12 В, вольтметр  $V_1$  показывает 5 В. Что показывают вольтметры  $V_2$  и  $V_3$ ?



**Ответ:** Вольтметр  $V_2$  показывает 7 В, вольтметр  $V_3$  показывает 2 В.

**Решение:** Сумма напряжений на вольтметрах  $V_1$  и  $V_2$  равна напряжению источника 12 В. Следовательно, напряжение на вольтметре  $V_2$  равно  $12 \text{ В} - 5 \text{ В} = 7 \text{ В}$ . Поскольку сопротивления вольтметров одинаковы, ток через  $V_2$  в  $7/5$  раз больше, чем через  $V_1$ . Это означает что через вольтметр  $V_3$  к  $V_2$  подтекает дополнительный ток, составляющий  $2/5$  от тока через  $V_1$ . Следовательно, напряжение на  $V_3$  равно 2 В.

3. (30 баллов) Сплошной цилиндр из льда поставили на дно пустого цилиндрического сосуда, дно которого подогревается. Считая, что таяние происходит только в месте контакта льда с дном, найти, какую часть от первоначального объема льда будет составлять объем воды в сосуде к моменту, когда лед станет плавать. Площадь дна сосуда в два раза больше площади основания ледяного цилиндра.

**Ответ:** Объем воды будет составлять 0,45 первоначального объема льда.

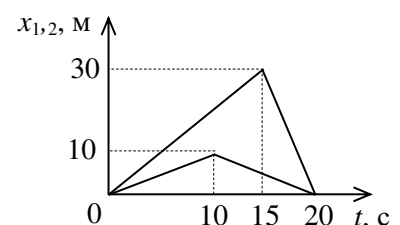
**Решение:** Введем следующие обозначения:  $H$  – начальная высота ледяного цилиндра,  $x$  – высота его растаявшей к указанному моменту части,  $y$  – высота уровня образовавшейся из растаявшего льда воды,  $S$  – площадь основания ледяного цилиндра,  $\rho_{\text{л}}$  – плотность льда ( $900 \text{ кг/м}^3$ ),  $\rho_{\text{в}}$  – плотность воды ( $1000 \text{ кг/м}^3$ ). Приравняем массы растаявшего льда и образовавшейся воды:

$$\rho_{\text{л}}xS = \rho_{\text{в}}y(2S - S),$$

откуда получаем  $y = 0,9x$ . Далее учтем, что лед начнет плавать, когда под водой окажется 0,9 его оставшегося объема или, что то же, оставшейся высоты (площадь сечения ледяного цилиндра не меняется), т.е. при  $y = 0,9(H - x)$ . Исключая  $x$  из двух полученных уравнений, находим  $y = 0,45H$ . Поскольку площадь дна под столбом воды равна площади основания цилиндра ( $2S - S = S$ ), то искомое отношение объемов будет также равно 0,45.

### 8 класс

1. (30 баллов) Графики зависимости от времени координат  $x_1$  и  $x_2$  двух тел, совершающих движение вдоль оси  $x$ , приведены на рисунке. В течение какого времени тела сближаются? Чему равна скорость сближения?



**Ответ:** Тела сближаются на интервале от 15 с до 20 с. Скорость сближения равна 5 м/с.

**Решение:** Как видно из графика, разность координат тел (расстояние между телами) уменьшается на интервале 15-20 с, т.е. именно на этом интервале тела сближаются. При этом скорость одного (догоняющего) тела равна 6 м/с, а второго 1 м/с. Следовательно, скорость сближения равна 5 м/с.

2. (40 баллов) Сплошной цилиндр из льда поставили на дно пустого цилиндрического сосуда, дно которого подогревается. Считая, что таяние происходит только в месте контакта льда с дном, найти, какую часть от первоначального объема льда будет составлять объем воды в сосуде к моменту, когда лед станет плавать. Площадь дна сосуда в два раза больше площади основания ледяного цилиндра.

**Ответ:** Объем воды будет составлять 0,45 первоначального объема льда.

**Решение:** Введем следующие обозначения:  $H$  – начальная высота ледяного цилиндра,  $x$  – высота его растаявшей к указанному моменту части,  $y$  – высота уровня образовавшейся из растаявшего льда воды,  $S$  – площадь основания ледяного цилиндра,  $\rho_{\text{л}}$  – плотность льда ( $900 \text{ кг/м}^3$ ),  $\rho_{\text{в}}$  – плотность воды ( $1000 \text{ кг/м}^3$ ). Приравняем массы растаявшего льда и образовавшейся воды:

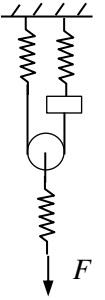
$$\rho_{\text{л}}xS = \rho_{\text{в}}y(2S - S),$$

откуда получаем  $y = 0,9x$ . Далее учтем, что лед начнет плавать, когда под водой окажется  $0,9$  его оставшегося объема или, что то же, оставшейся высоты (площадь сечения ледяного цилиндра не меняется), т.е. при  $y = 0,9(H - x)$ . Исключая  $x$  из двух полученных уравнений, находим  $y = 0,45H$ . Поскольку площадь дна под столбом воды равна площади основания цилиндра ( $2S - S = S$ ), то искомое отношение объемов будет также равно  $0,45$ .

**3. (30 баллов)** В системе, показанной на рисунке, все пружины одинаковы, блок, нить и пружины невесомы, приложенная к нижней пружине сила равна  $F$ . Найти массу груза, если известно, что две пружины растянуты одинаково. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

**Ответ:** Масса груза равна  $F/(2g)$ .

**Решение:** Одинаково растянутыми могут быть только нижняя и правая из верхних пружин. Натяжение нити, перекинутой через блок, равно  $F/2$ . Правая верхняя пружина растягивается суммарной силой  $mg + F/2$ , где  $m$  – искомая масса груза, а нижняя – силой  $F$ . Поскольку деформации этих пружин одинаковы, то равны и растягивающие их силы, т.е.  $mg + F/2 = F$ . Отсюда находим  $m = F/(2g)$ .

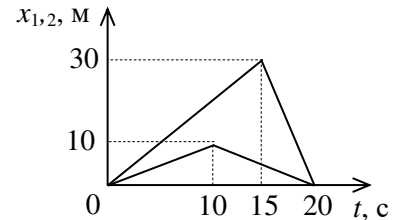


### 7 класс

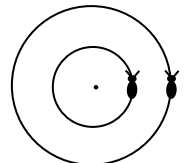
**1. (40 баллов)** Графики зависимости от времени координат  $x_1$  и  $x_2$  двух тел, совершающих движение вдоль оси  $x$ , приведены на рисунке. В течение какого времени тела сближаются? Чему равна скорость сближения?

**Ответ:** Тела сближаются на интервале от 15 с до 20 с. Скорость сближения равна 5 м/с.

**Решение:** Как видно из графика, разность координат тел (расстояние между телами) уменьшается на интервале 15-20 с, т.е. именно на этом интервале тела сближаются. При этом скорость одного (догоняющего) тела равна 6 м/с, а второго 1 м/с. Следовательно, скорость сближения равна 5 м/с.



**2. (30 баллов)** Два жучка одновременно начинают равномерное движение со скоростью  $V$  по концентрическим окружностям радиусов  $R$  и  $2R$  из положений, показанных на рисунке. Через какое минимальное время относительная скорость жучков станет максимальной? Чему равно это максимальное значение?



**Ответ:** Максимальная относительная скорость жучков достигается через минимальное время  $2\pi R/V$  и равна  $2V$ .

**Решение:** Максимальная относительная скорость жучков равна  $2V$  и достигается в моменты, когда скорости жучков направлены противоположно. В эти моменты жучки и центр окружностей находятся на одной прямой. Первый раз это достигается, когда жучок, движущийся по окружности большего радиуса, пройдет половину своей окружности, а другой – сделает полный оборот, т.е. через время  $2\pi R/V$  после начала движения.

**3. (30 баллов)** Два аквариума в форме прямоугольных параллелепипедов, площади дна которых отличаются в два раза, стоят рядом на горизонтальном столе и соединены вблизи дна тонкой трубкой, образуя таким образом сообщающиеся сосуды. В сообщающихся сосудах уровень жидкости всегда одинаков. Аквариумы частично заполнены водой, так что в каждом из них остается свободный объем 4 литра. В аквариум с меньшей площадью дна доливают 10 литров воды. Сколько воды перетечет по трубке?

**Ответ:** Перетечет 8 литров воды.

**Решение:** У широкого аквариума край находится над первоначальным уровнем воды на вдвое меньшей высоте, чем у узкого аквариума. При наливании воды в узкий аквариум уровень воды в обоих аквариумах будет подниматься до тех пор, пока не достигнет края широкого аквариума. При этом в узком аквариуме над уровнем воды остается еще объем 2 л. При дальнейшем наливании воды в узкий аквариум уровень воды в нем будет оставаться постоянным, а наливаемая вода, перетекая в широкий аквариум, будет выливаться через его край. Таким образом, из 10 л литров налитой в узкий аквариум воды 2 л останется в этом аквариуме, а 8 л перетечет по трубке в широкий аквариум.