

Межрегиональная олимпиада школьников

“Будущие исследователи – будущее науки”

2019-2020 уч.г.

г.Саров, Нижегородская область

Математика

Заключительный тур

9 класс

1. (15 баллов) Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{xy} - \frac{1}{x+y} = \frac{1}{12} \\ x^2y + xy^2 = 12. \end{cases}$$

2. (15 баллов) $|x^2 - 3x| + |x + 1| = |x^2 - 4x - 1|$

3. (20 баллов) В треугольник ABC вписана окружность с центром O , к которой проведена касательная, пересекающая стороны AC и AB в точках M и N соответственно. Найдите $\angle A$ треугольника ABC , если $\angle MON = 32^\circ$

4. (25 баллов) Мастер изготавливает за 1 час целое число деталей(причем это число более 5), а ученик - на 2 детали меньше. Мастер в одиночку выполняет заказ за целое число часов, а два его ученика, работающие одинаково друг с другом,- такой же заказ на один час быстрее. Из какого количества деталей состоит заказ?

5. (25 баллов) Найдите все значения a , при которых уравнения $4x^2 + 2ax + 1 = 0$ и $4x^2 + 2x + a = 0$ равносильны.

**Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»
2019-2020уч.г.**

г.Саров, Нижегородская область

Математика

Финальный тур

11 класс

Задача №1. (20 баллов). Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 4, 8, 9, чтобы каждая цифра входила в число не более одного раза? Найдите сумму всех этих чисел.

Задача №2. (20 баллов). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{x+y} = 6, \\ \sqrt{x+y} - y + x = 2. \end{cases}$$

Задача №3. (20 баллов). Решите уравнение

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} \cos 2x\right) = \cos\left(\frac{4}{3}\pi \sin x\right).$$

Задача №4. (20 баллов). Найдите все значения параметра a , при котором уравнение

$$3 - a - |a - x| + \sqrt{2 - x} = 0$$

имеет единственное решение.

Задача №5. (20 баллов). В равнобедренном треугольнике ABC стороны $AB = BC = 8$, $AC = 4$. На стороне BC выбрана точка M так, что окружности, вписанные в треугольники ABM и в ACM , касаются друг друга. Найдите площади треугольников ABM и ACM .

11 класс

1. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 4, 8, 9, чтобы каждая цифра входила в число не более одного раза? Найдите сумму всех этих чисел.

Ответ: $N = 5 \cdot 5! = 600$; $\Sigma = (0 + 1 + 2 + 4 + 8 + 9) \cdot 11111 \cdot 5! - (1 + 2 + 4 + 8 + 9) \cdot 1111 \cdot 4! = 31359744$.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{x+y} = 6, \\ \sqrt{x+y} - y + x = 2. \end{cases}$$

Ответ: (2; 2).

3. Решите уравнение

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} \cos 2x\right) = \cos\left(\frac{4}{3}\pi \sin x\right).$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $\pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{5}{6}\right) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

4. Найдите все значения параметра a , при котором уравнение

$$3 - a - |a - x| + \sqrt{2 - x} = 0$$

имеет единственное решение.

Ответ: $(-\infty; \frac{5}{2}) \cup \{\frac{21}{8}\}$.

5. В равнобедренном треугольнике ABC стороны $AB = BC = 8, AC = 4$. На стороне BC выбрана точка M так, что окружности, вписанные в треугольник ABM и в ACM , касаются друг друга. Найдите площади треугольников ABM и ACM .

Ответ: $S_{ABM} = 3\sqrt{15}, S_{ACM} = \sqrt{15}$.

9 класс

1. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 4, 8, 9, чтобы каждая цифра входила в число не более одного раза? Найдите сумму всех этих чисел.

Ответ: $N = 5 \cdot 5! = 600$; $\Sigma = (0 + 1 + 2 + 4 + 8 + 9) \cdot 11111 \cdot 5! - (1 + 2 + 4 + 8 + 9) \cdot 1111 \cdot 4! = 31359744$.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{x+y} = 6, \\ \sqrt{x+y} - y + x = 2. \end{cases}$$

Ответ: (2; 2).

3. Решить неравенство $|x - 3|^3 + (x - 3)^2(x^2 - 6x + 7) - 2(x^2 - 6x + 7)^3 \geq 0$.

Ответ: [1; 5].

4. Найдите все значения параметра a , при котором уравнение

$$3 - a - |a - x| + \sqrt{2 - x} = 0$$

имеет единственное решение.

Ответ: $(-\infty; \frac{5}{2}) \cup \{\frac{21}{8}\}$.

5. В равнобедренном треугольнике ABC стороны $AB = BC = 8, AC = 4$. На стороне BC выбрана точка M так, что окружности, вписанные в треугольник ABM и в ACM , касаются друг друга. Найдите площади треугольников ABM и ACM .

Ответ: $S_{ABM} = 3\sqrt{15}, S_{ACM} = \sqrt{15}$.