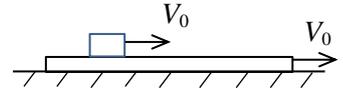


11 класс

1. (30 баллов) На доску, лежащую на горизонтальном столе, поставили брусок и сообщили ему и доске одинаковую скорость  $V_0$  (см. рис.). На какое расстояние сместится брусок относительно доски, если его масса равна массе доски, коэффициент трения между бруском и доской  $\mu$ , а между доской и столом  $2\mu$ ? Ускорение свободного падения равно  $g$ . Считать, что брусок не соскальзывает с доски.



**Ответ:** Брусок сместится относительно доски на  $V_0^2/(3\mu g)$ .

**Решение:** На брусок действует направленная против скорости сила трения  $\mu mg$  ( $m$  – масса бруска) со стороны доски, на доску – направленная по скорости сила трения  $\mu mg$  со стороны бруска и направленная против скорости сила трения  $4\mu mg$  со стороны стола. В результате доска и брусок будут двигаться равнозамедленно, брусок – с ускорением  $\mu g$ , доска – с ускорением  $3\mu g$ . Скорость доски запишем в виде

$$V_1 = V_0 - 3\mu gt,$$

а скорость бруска как

$$V_2 = V_0 - \mu gt.$$

Доска остановится через время  $t_1 = V_0/(3\mu g)$ , совершив относительно стола перемещение

$$L_1 = V_0^2/(6\mu g).$$

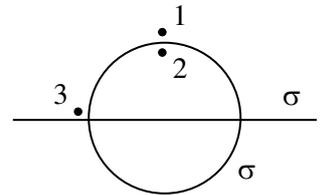
Брусок остановится через время  $t_2 = V_0/(\mu g)$ , совершив относительно стола перемещение

$$L_2 = V_0^2/(2\mu g).$$

Смещение бруска относительно доски находим как

$$L_2 - L_1 = V_0^2/(3\mu g).$$

2. (40 баллов) Плоскость, по которой равномерно распределен электрический заряд с плотностью  $\sigma$ , проходит через центр сферы с той же поверхностной плотностью заряда  $\sigma$  (см. рис.). Во сколько раз отличаются напряженности электрического поля в точках 1 и 2? Чему равна напряженность поля в точке 3? *Указание.* Величина напряженности электрического поля заряженной плоскости равна  $\sigma/(2\epsilon_0)$ , где  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная.



**Ответ:** Отношение напряженностей поля в точках 1 и 2 равно  $E_1/E_2 = 3$ . Напряженность поля в точке 3 равна  $E_3 = \sqrt{5}\sigma/(2\epsilon_0)$ .

**Решение:** Сфера не создает поля внутри себя, поле снаружи направлено радиально и вблизи сферы имеет величину

$$E_{\text{сферы}} = \frac{\sigma 4\pi R^2}{4\pi \epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

(здесь через  $R$  обозначен радиус сферы). Поле в точке 1 равно сумме одинаково направленных полей плоскости и сферы:

$$E_1 = E_{\text{плоск}} + E_{\text{сферы}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{3\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Поле в точке 2 равно полю плоскости

$$E_2 = E_{\text{плоск}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Таким образом,  $E_1/E_2 = 3$ .

Поле в точке 3 равно векторной сумме перпендикулярных друг другу полей плоскости и сферы, так что его величина равна

$$E_3 = \sqrt{E_{\text{плоск}}^2 + E_{\text{сферы}}^2} = \frac{\sqrt{5}\sigma}{2\epsilon_0}.$$

3. (30 баллов) Прикрепленный к стене пружиной груз совершает колебания на гладком горизонтальном столе (см. рис.). В момент максимального растяжения пружины ее середину закрепляют. Во сколько раз изменится амплитуда колебаний?



**Ответ:** Амплитуда колебаний уменьшится в 2 раза.

**Решение:** В момент максимального растяжения пружины скорость груза равна нулю, и вся энергия колебаний сосредоточена в пружине. Закрепление середины пружины выводит из колебаний половину энергии, поэтому можно записать соотношение

$$\frac{1}{2} k A_1^2 = \frac{2k A_2^2}{2},$$

где  $A_1$  и  $A_2$  – амплитуды колебаний до и после закрепления и учтено, что в результате закрепления жесткость пружины увеличивается в 2 раза, с  $k$  до  $2k$ . В результате получаем  $A_2 = A_1/2$ .

Тот же ответ можно получить другим способом. В момент максимального растяжения пружины смещение ее центра равно  $A_1/2$ , а смещение конца пружины равно  $A_1$ . Таким образом, смещение конца пружины относительно ее центра (точки закрепления пружины половинной длины) равно  $A_1/2$ . Это расстояние и равно новой амплитуде колебаний.

### 10 класс

**1.** (30 баллов) Тело, брошенное вертикально вверх с некоторой высоты, находилось в полете 3 с и прошло путь, втрое больший начальной высоты. Найти максимальную высоту подъема тела над землей. Ускорение свободного падения считать равным  $10 \text{ м/с}^2$ .

**Ответ:** Максимальная высота подъема равна  $9(3 - 2\sqrt{2})g$ , где  $g$  – ускорение свободного падения, т.е. примерно 15 м.

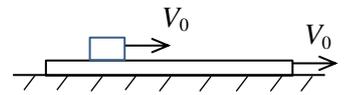
**Решение:** Пройденный путь втрое больше начальной высоты только в том случае, если максимальная высота подъема тела в два раза больше начальной. Обозначим время подъема тела до верхней точки через  $t_1$ , а время падения от верхней точки до земли через  $t_2$ . Очевидно, что  $t_1$  равно также времени падения тела с максимальной высоты до начальной (половины максимальной), поэтому можно записать уравнение

$$\frac{gt_1^2}{2} = \frac{gt_2^2}{2},$$

откуда следует  $t_2 = \sqrt{2}t_1$ . Учитывая также, что  $t_1 + t_2 = 3$  с, находим  $t_2 = 3\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)$  с. Для максимальной высоты получаем

$$\frac{gt_2^2}{2} = 9(3 - 2\sqrt{2})g \approx 15 \text{ м.}$$

**2.** (30 баллов) На доску, лежащую на горизонтальном столе, поставили брусок и сообщили ему и доске одинаковую скорость  $V_0$  (см. рис.). На какое расстояние сместится брусок относительно доски, если его масса равна массе доски, коэффициент трения между бруском и доской  $\mu$ , а между доской и столом  $2\mu$ ? Ускорение свободного падения равно  $g$ . Считать, что брусок не соскальзывает с доски.



**Ответ:** Брусок сместится относительно доски на  $V_0^2/(3\mu g)$ .

**Решение:** На брусок действует направленная против скорости сила трения  $\mu mg$  ( $m$  – масса бруска) со стороны доски, на доску – направленная по скорости сила трения  $\mu mg$  со стороны бруска и направленная против скорости сила трения  $4\mu mg$  со стороны стола. В результате доска и брусок будут двигаться равнозамедленно, брусок – с ускорением  $\mu g$ , доска – с ускорением  $3\mu g$ . Скорость доски запишем в виде

$$V_1 = V_0 - 3\mu gt,$$

а скорость бруска как

$$V_2 = V_0 - \mu gt.$$

Доска остановится через время  $t_1 = V_0/(3\mu g)$ , совершив относительно стола перемещение

$$L_1 = V_0^2/(6\mu g).$$

Брусок остановится через время  $t_2 = V_0/(\mu g)$ , совершив относительно стола перемещение

$$L_2 = V_0^2/(2\mu g).$$

Смещение бруска относительно доски находим как

$$L_2 - L_1 = V_0^2/(3\mu g).$$

**3.** (40 баллов) Подвешенный на нити шарик отклонили от вертикали так, что нить образовала прямой угол с вертикалью, и отпустили. Чему равна вертикальная компонента ускорения шарика в момент, когда горизонтальная компонента принимает значение  $1,5g$  ( $g$  – ускорение свободного падения)?

**Ответ:** Вертикальная компонента ускорения равна  $0,5g$ .

**Решение:** Пусть в рассматриваемый момент нить составляет с вертикалью угол  $\alpha$ . Запишем второй закон Ньютона для шарика в проекции на направление нити в виде

$$\frac{mV^2}{L} = T - mg \cos \alpha,$$

где  $m$  и  $V$  – масса и скорость шарика,  $L$  – длина нити,  $T$  – сила натяжения нити. Из закона сохранения энергии также следует

$$\frac{mV^2}{2} = mgL \cos \alpha.$$

Из записанных уравнений находим, что  $T = 3mg \cos \alpha$ . Горизонтальное ускорение шарика определяется горизонтальной проекцией силы  $T$  и равно  $3g \cos \alpha \sin \alpha$ . С другой стороны, по условию эта проекция ускорения равна  $1,5g$ . Таким образом, приходим к уравнению

$$3g \cos \alpha \sin \alpha = 1,5g,$$

откуда получаем, что  $\alpha = 45^\circ$  и, следовательно,  $T = 3mg/\sqrt{2}$ . Записывая второй закон Ньютона в проекции на вертикальное направление в виде

$$ma_{\text{верт}} = T \cos \alpha - mg,$$

находим вертикальную проекцию ускорения

$$a_{\text{верт}} = 0,5g.$$

### 9 класс

1. (30 баллов) Тело, брошенное вертикально вверх с некоторой высоты, находилось в полете 3 с и прошло путь, втрое больший начальной высоты. Найти максимальную высоту подъема тела над землей. Ускорение свободного падения считать равным  $10 \text{ м/с}^2$ .

**Ответ:** Максимальная высота подъема равна  $9(3 - 2\sqrt{2})g$ , где  $g$  – ускорение свободного падения, т.е. примерно 15 м.

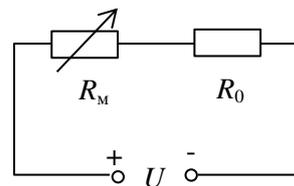
**Решение:** Пройденный путь втрое больше начальной высоты только в том случае, если максимальная высота подъема тела в два раза больше начальной. Обозначим время подъема тела до верхней точки через  $t_1$ , а время падения от верхней точки до земли через  $t_2$ . Очевидно, что  $t_1$  равно также времени падения тела с максимальной высоты до начальной (половины максимальной), поэтому можно записать уравнение

$$\frac{gt_1^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{gt_2^2}{2},$$

откуда следует  $t_2 = \sqrt{2}t_1$ . Учитывая также, что  $t_1 + t_2 = 3$  с, находим  $t_2 = 3\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)$  с. Для максимальной высоты получаем

$$\frac{gt_2^2}{2} = 9(3 - 2\sqrt{2})g \approx 15 \text{ м}.$$

2. (40 баллов) Цепь, составленная из резистора с сопротивлением  $R_0 = 55$  Ом и магазина сопротивлений, который может принимать дискретные (с шагом 2 Ом) значения  $R_M = 2, 4, 6 \dots 100$  Ом, подключена к источнику с напряжением  $U = 100$  В (см. рис.). Какую максимальную мощность можно получить на магазине сопротивлений?



**Ответ:** Максимальная мощность на магазине равна 45,45 Вт.

**Решение:** Выделяющаяся на магазине сопротивлений мощность определяется формулой

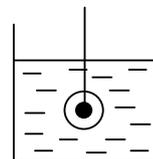
$$P = \frac{U^2 R_M}{(R_M + R_0)^2},$$

которую для анализа полезно преобразовать к виду

$$P = \frac{U^2}{R_0 \left( \sqrt{\frac{R_M}{R_0}} + \sqrt{\frac{R_0}{R_M}} \right)^2}.$$

Сумма взаимно обратных величин в знаменателе имеет минимум при  $R_M = R_0$ . При этом выделяющаяся мощность имеет максимум. Поскольку условие  $R_M = 55$  Ом не может быть выполнено точно, нужно взять близкие к 55 омам значения  $R_M$ , т.е. проверить на максимум мощности значения 54 Ом и 56 Ом. При обоих этих значениях получается одинаковая мощность 45,45 Вт, которая и является максимально достижимой.

3. (30 баллов) Кусок металла с замороженным на него льдом висит на нити, находясь полностью под водой и не касаясь дна сосуда с водой (см. рис.). Сила натяжения нити равна 3 Н. Когда лед растаял, сила натяжения возросла до 3,5 Н. Найти массу льда и массу металла. Плотность металла равна  $4500 \text{ кг/м}^3$ , льда  $900 \text{ кг/м}^3$  и воды  $1000 \text{ кг/м}^3$ . Ускорение свободного падения считать равным  $10 \text{ м/с}^2$ .



**Ответ:** Масса льда равна 0,45 кг. Масса металла также равна 0,45 кг.

**Решение:** Запишем условие равновесия для куска металла со льдом

$$T_1 + \rho_{\text{в}}(V_{\text{л}} + V_{\text{м}})g = \rho_{\text{л}}V_{\text{л}}g + \rho_{\text{м}}V_{\text{м}}g$$

и для куска металла после таяния льда

$$T_2 + \rho_{\text{в}}V_{\text{м}}g = \rho_{\text{м}}V_{\text{м}}g.$$

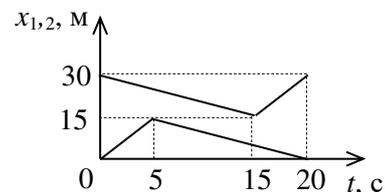
Здесь  $T_{1,2}$  – значения силы натяжения нити,  $g$  – ускорение свободного падения, а  $\rho_{\text{в}}$ ,  $\rho_{\text{л}}$  и  $\rho_{\text{м}}$  – плотности воды, льда и металла соответственно. Вычитая первое уравнение из второго, получаем

$$T_2 - T_1 = (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})V_{\text{л}}g.$$

Учитывая, что  $T_2 - T_1 = 0,5$  Н, находим отсюда объем льда  $V_{\text{л}} = 0,5$  л, а умножая его на плотность льда, находим и массу льда  $\rho_{\text{л}}V_{\text{л}} = 0,45$  кг. Из второго условия равновесия находим объем металла  $V_{\text{м}} = 0,1$  л, а умножая на плотность металла, находим массу металла  $\rho_{\text{м}}V_{\text{м}} = 0,45$  кг.

### 8 класс

1. (30 баллов) Графики зависимости от времени координат  $x_1$  и  $x_2$  двух тел, совершающих движение вдоль оси  $x$ , приведены на рисунке. На какое минимальное расстояние сближаются тела? В течение какого времени тела удаляются друг от друга?



**Ответ:** Минимальное расстояние между телами равно 10 м. Тела удаляются друг от друга в течение 5 с на интервале от 15 до 20 с.

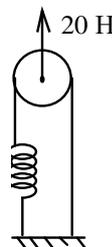
**Решение:** На интервале 0-5 с тела двигаются навстречу друг другу. К моменту  $t = 5$  с тело, двигающееся из точки  $x = 0$ , проходит 15 м, а тело, двигающееся из точки  $x = 30$  м, проходит 5 м. Таким образом, в момент  $t = 5$  с достигается минимальное расстояние между телами, равное 20 м. На интервале 5-15 с расстояние между телами остается неизменным. На интервале 15-20 с тела удаляются друг от друга.

2. (30 баллов) Два стоящих на столе сосуда цилиндрической формы, поперечные сечения которых отличаются в два раза, сообщаются внизу через трубку и частично заполнены водой. Какой объем воды перейдет из одного сосуда в другой, если в узкий сосуд пустить плавать тело массой  $m$ ? Плотность воды равна  $\rho$ . Считать, что вода не достигает краев сосудов.

**Ответ:** Перейдет объем воды  $2m/(3\rho)$ .

**Решение:** Плавающее тело вытеснит объем воды  $m/\rho$ . Чтобы уровни воды в сосудах остались одинаковыми, вытесненный объем воды долженделиться между сосудами в отношении 1:2, причем в широкий сосуд должны перейти 2 части этого объема, т.е.  $2m/(3\rho)$ .

3. (40 баллов) На сколько сместится ось блока в системе, приведенной на рисунке, если к оси приложить силу 20 Н? Жесткость пружины равна 100 Н/м. Массой блока и пружины пренебречь, нить считать идеальной.

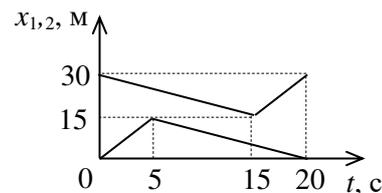


**Ответ:** Ось блока сместится на 5 см.

**Решение:** На блок действует направленная вверх сила 20 Н и две одинаковые, направленные вниз силы со стороны левой и правой частей нити. Из условия равновесия блока (равенства нулю суммы действующих на него сил) следует, что сила натяжения нити равна 10 Н. С этой силой и растягивается пружина, а значит, ее растяжение равно 10 см. Из-за растяжения пружины точка прикрепления нити к пружине поднимается на 10 см, и высвободившаяся нить разделится пополам (по 5 см) между левой и правой от блока частями нити. Таким образом, блок поднимется на 5 см.

### 7 класс

1. (30 баллов) Графики зависимости от времени координат  $x_1$  и  $x_2$  двух тел, совершающих движение вдоль оси  $x$ , приведены на рисунке. На какое минимальное расстояние сближаются тела? В течение какого времени тела удаляются друг от друга?



**Ответ:** Минимальное расстояние между телами равно 10 м. Тела удаляются друг от друга в течение 5 с на интервале от 15 до 20 с.

**Решение:** На интервале 0-5 с тела двигаются навстречу друг другу. К моменту  $t = 5$  с тело, двигающееся из точки  $x = 0$ , проходит 15 м, а тело, двигающееся из точки  $x = 30$  м, проходит 5 м. Таким образом, в момент  $t = 5$  с достигается минимальное расстояние между телами, равное 20 м. На интервале 5-15 с расстояние между телами остается неизменным. На интервале 15-20 с тела удаляются друг от друга.

2. (30 баллов) Два велосипедиста одновременно начинают движение из одной точки кругового трека радиуса  $R$  в противоположных направлениях, один – со скоростью  $V_1$ , другой – со скоростью  $V_2$ . Через какое время велосипедисты начнут сближаться?

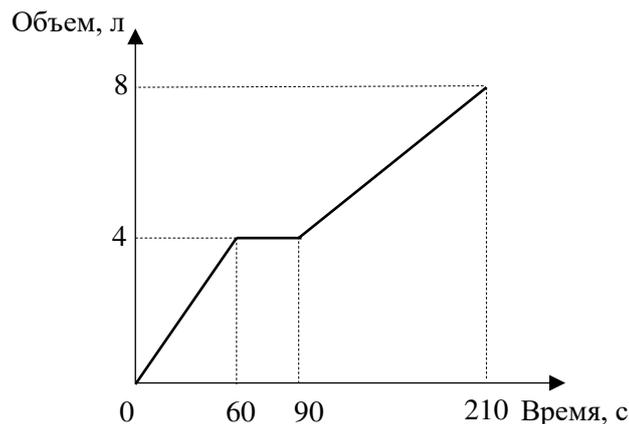
**Ответ:** Велосипедисты начнут сближаться через время  $\pi R/(V_1 + V_2)$ .

**Решение:** Велосипедисты удаляются друг от друга до момента  $t$ , когда окажутся в противоположных точках диаметра. После этого они начнут сближаться. К указанному моменту велосипедисты вместе проходят половину длины окружности трека, т.е.  $V_1 t + V_2 t = \pi R$ , откуда находим  $t = \pi R/(V_1 + V_2)$ .

3. (30 баллов) Два одинаковых аквариума в форме прямоугольных параллелепипедов стоят рядом на горизонтальном столе и соединены на середине высоты тонкой трубкой, образуя таким образом сообщающиеся сосуды. Один из сосудов на четверть заполнен 2 литрами воды, другой пуст. С момента  $t = 0$  в пустой сосуд равномерно наливают воду с темпом 1 литр за 15 секунд. Нарисовать график зависимости объема воды в сосуде, в который наливают воду, от времени. График рисовать до полного заполнения водой обоих сосудов. Объемом соединительной трубки пренебречь.

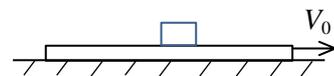
**Ответ:** См. рис.

**Решение:** После наливания 4 л в пустой сосуд вода начнет переливаться в частично заполненный сосуд. При этом объем воды в том сосуде, куда воду наливают, меняться не будет. После наливания еще 2 л воды ее уровни в сосудах сравняются, и наливаемая вода будет делиться поровну между сосудами. При этом в каждом сосуде объем воды будет расти на 1 литр за 30 секунд.



11 класс

1. (30 баллов) На доску, лежащую на горизонтальном столе, поставили брусок и сообщили доске скорость  $V_0$  (см. рис.). Через какое время движение в системе прекратится, если масса бруска равна массе доски, коэффициент трения между бруском и доской  $\mu$ , а между доской и столом  $2\mu$ ? Ускорение свободного падения равно  $g$ . Считать, что брусок не соскальзывает с доски.



**Ответ:** Движение прекратится через время  $V_0/(3\mu g)$ .

**Решение:** На брусок действует направленная вдоль скорости доски сила трения  $\mu mg$  ( $m$  – масса бруска) со стороны доски, на доску – направленная против скорости сила трения  $\mu mg$  со стороны бруска и направленная в ту же сторону сила трения  $4\mu mg$  со стороны стола. В результате брусок будет двигаться равноускоренно с ускорением  $\mu g$ , доска – равнозамедленно с ускорением  $5\mu g$ . Скорость доски запишем в виде

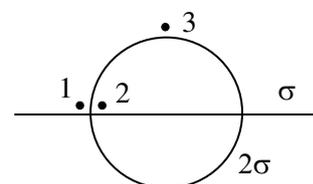
$$V_1 = V_0 - 5\mu g t,$$

а скорость бруска как

$$V_2 = \mu g t.$$

Через время  $t_1 = V_0/(6\mu g)$  скорости бруска и доски примут одинаковое значение  $V_0/6$ . После этого оба тела будут замедляться, причем доска будет замедляться быстрее бруска: на нее будет действовать направленная против скорости сила трения  $4\mu mg$  со стороны стола и направленная вдоль скорости сила трения  $\mu mg$  со стороны бруска, т.е. суммарная тормозящая сила  $3\mu mg$ , тогда как брусок будет тормозиться силой  $\mu mg$ . Таким образом, у доски будет ускорение  $3\mu g$ , а у бруска  $\mu g$ . Доска остановится через время  $t_2$ , которое находится из условия  $V_0/6 - 3\mu g t = 0$  и равно  $t_2 = V_0/(18\mu g)$ . Брусок же остановится через время  $t_3$ , которое находится из условия  $V_0/6 - \mu g t = 0$  и равно  $t_3 = V_0/(6\mu g)$ . Как видно,  $t_3 > t_2$ . Таким образом, движение в системе полностью прекратится через время  $t_1 + t_3 = V_0/(3\mu g)$ .

2. (40 баллов) Плоскость, по которой равномерно распределен электрический заряд с плотностью  $\sigma$ , проходит через центр сферы с той же поверхностной плотностью заряда  $\sigma$  (см. рис.). Во сколько раз отличаются напряженности электрического поля в точках 1 и 2? Чему равна напряженность поля в точке 3? *Указание.* Величина напряженности электрического поля заряженной плоскости равна  $\sigma/(2\epsilon_0)$ , где  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная.



**Ответ:** Отношение напряженностей поля в точках 1 и 2 равно  $E_1/E_2 = \sqrt{5}$ . Напряженность поля в точке 3 равна  $E_3 = 3\sigma/(2\epsilon_0)$ .

**Решение:** Сфера не создает поля внутри себя, поле снаружи направлено радиально и вблизи сферы имеет величину

$$E_{\text{сферы}} = \frac{\sigma 4\pi R^2}{4\pi \epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

(здесь через  $R$  обозначен радиус сферы). Поле в точке 1 равно векторной сумме перпендикулярных друг другу полей плоскости и сферы, так что его величина равна

$$E_1 = \sqrt{E_{\text{плоск}}^2 + E_{\text{сферы}}^2} = \frac{\sqrt{5}\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Поле в точке 2 равно полю плоскости

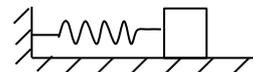
$$E_2 = E_{\text{плоск}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Таким образом,  $E_1/E_2 = \sqrt{5}$ .

Поле в точке 3 равно сумме одинаково направленных полей плоскости и сферы:

$$E_3 = E_{\text{плоск}} + E_{\text{сферы}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{3\sigma}{2\epsilon_0}.$$

3. (30 баллов) Прикрепленный к стене пружиной груз совершает колебания на гладком горизонтальном столе (см. рис.). В момент прохождения грузом положения равновесия середину пружины закрепляют. Во сколько раз изменится амплитуда колебаний?



**Ответ:** Амплитуда колебаний уменьшится в  $\sqrt{2}$  раз.

**Решение:** В момент прохождения грузом положения равновесия пружина не деформирована, значит ее энергия в этот момент равна нулю и вся энергия колебаний находится в форме кинетической энергии груза. При этом закрепление середины пружины не меняет энергию колебаний. Учитывая, что жесткость пружины  $k$  после закрепления возрастает вдвое, условие сохранения энергии можно записать в виде

$$\frac{kA_1^2}{2} = \frac{2kA_2^2}{2},$$

где  $A_1$  и  $A_2$  – амплитуды колебаний до и после закрепления. В результате получаем  $A_2/A_1 = 1/\sqrt{2}$ .

### 10 класс

1. (30 баллов) Тело, брошенное вертикально вверх с некоторой высоты, находилось в полете 3 с и прошло путь, вдвое больший начальной высоты. С какой высоты было брошено тело? Ускорение свободного падения считать равным  $10 \text{ м/с}^2$ .

**Ответ:** Начальная высота равна  $9(3 - 2\sqrt{2})g/2$ , где  $g$  – ускорение свободного падения, т.е. примерно 7,7 м.

**Решение:** Пройденный путь вдвое больше начальной высоты только в том случае, если максимальная высота подъема тела в два раза больше начальной. Обозначим время подъема тела до верхней точки через  $t_1$ , а время падения от верхней точки до земли через  $t_2$ . Очевидно, что  $t_1$  равно также времени падения тела с максимальной высоты до начальной (половины максимальной), поэтому можно записать уравнение

$$\frac{gt_1^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{gt_2^2}{2},$$

откуда следует  $t_2 = \sqrt{2}t_1$ . Учитывая также, что  $t_1 + t_2 = 3$  с, находим  $t_1 = 3(\sqrt{2} - 1)$  с. Для максимальной высоты получаем

$$\frac{gt_1^2}{2} = 9(3 - 2\sqrt{2})g \approx 7,7 \text{ м.}$$

2. (30 баллов) На доску, лежащую на горизонтальном столе, поставили брусок и сообщили доске скорость  $V_0$  (см. рис.). Через какое время движение в системе прекратится, если масса бруска равна массе доски, коэффициент трения между бруском и доской  $\mu$ , а между доской и столом  $2\mu$ ? Ускорение свободного падения равно  $g$ . Считать, что брусок не соскальзывает с доски.



**Ответ:** Движение прекратится через время  $V_0/(3\mu g)$ .

**Решение:** На брусок действует направленная вдоль скорости доски сила трения  $\mu mg$  ( $m$  – масса бруска) со стороны доски, на доску – направленная против скорости сила трения  $\mu mg$  со стороны бруска и направленная в ту же сторону сила трения  $4\mu mg$  со стороны стола. В результате брусок будет двигаться равноускоренно с ускорением  $\mu g$ , доска – равнозамедленно с ускорением  $5\mu g$ . Скорость доски запишем в виде

$$V_1 = V_0 - 5\mu gt,$$

а скорость бруска как

$$V_2 = \mu gt.$$

Через время  $t_1 = V_0/(6\mu g)$  скорости бруска и доски примут одинаковое значение  $V_0/6$ . После этого оба тела будут замедляться, причем доска будет замедляться быстрее бруска: на нее будет действовать направленная против скорости сила трения  $4\mu mg$  со стороны стола и направленная вдоль скорости сила трения  $\mu mg$  со стороны бруска, т.е. суммарная тормозящая сила  $3\mu mg$ , тогда как брусок будет тормозиться силой  $\mu mg$ . Таким образом, у доски будет ускорение  $3\mu g$ , а у бруска  $\mu g$ . Доска остановится через время  $t_2$ , которое находится из условия  $V_0/6 - 3\mu gt = 0$  и равно  $t_2 = V_0/(18\mu g)$ . Брусок же остановится через время  $t_3$ , которое находится из условия  $V_0/6 - \mu gt = 0$  и равно  $t_3 = V_0/(6\mu g)$ . Как видно,  $t_3 > t_2$ . Таким образом, движение в системе полностью прекратится через время  $t_1 + t_3 = V_0/(3\mu g)$ .

3. (40 баллов) Подвешенный на нити шарик массы  $m$  отклонили от вертикали так, что нить образовала прямой угол с вертикалью, и отпустили. Чему равна сила натяжения нити в момент, когда горизонтальная компонента ускорения шарика принимает значение  $1,5g$  ( $g$  – ускорение свободного падения)?

**Ответ:** Сила натяжения нити равна  $3mg/\sqrt{2}$ .

**Решение:** Пусть в рассматриваемый момент нить составляет с вертикалью угол  $\alpha$ . Запишем второй закон Ньютона для шарика в проекции на направление нити в виде

$$\frac{mV^2}{L} = T - mg \cos \alpha,$$

где  $V$  – скорость шарика,  $L$  – длина нити,  $T$  – сила натяжения нити. Из закона сохранения энергии также следует

$$\frac{mV^2}{2} = mgL \cos \alpha.$$

Из записанных уравнений находим, что  $T = 3mg \cos \alpha$ . Горизонтальное ускорение шарика определяется горизонтальной проекцией силы  $T$  и равно  $3g \cos \alpha \sin \alpha$ . С другой стороны, по условию эта проекция ускорения равна  $1,5g$ . Таким образом, приходим к уравнению

$$3g \cos \alpha \sin \alpha = 1,5g,$$

откуда получаем, что  $\alpha = 45^\circ$  и, следовательно,  $T = 3mg/\sqrt{2}$ .

### 9 класс

1. (30 баллов) Тело, брошенное вертикально вверх с некоторой высоты, находилось в полете 3 с и прошло путь, втрое больший начальной высоты. С какой высоты было брошено тело? Ускорение свободного падения считать равным  $10 \text{ м/с}^2$ .

**Ответ:** Начальная высота равна  $9(3 - 2\sqrt{2})g/2$ , где  $g$  – ускорение свободного падения, т.е. примерно 7,7 м.

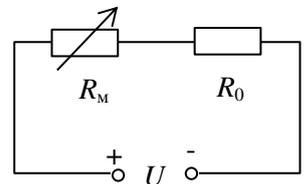
**Решение:** Пройденный путь втрое больше начальной высоты только в том случае, если максимальная высота подъема тела в два раза больше начальной. Обозначим время подъема тела до верхней точки через  $t_1$ , а время падения от верхней точки до земли через  $t_2$ . Очевидно, что  $t_1$  равно также времени падения тела с максимальной высоты до начальной (половины максимальной), поэтому можно записать уравнение

$$\frac{gt_1^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{gt_2^2}{2},$$

откуда следует  $t_2 = \sqrt{2}t_1$ . Учитывая также, что  $t_1 + t_2 = 3$  с, находим  $t_1 = 3(\sqrt{2} - 1)$  с. Для максимальной высоты получаем

$$\frac{gt_1^2}{2} = 9(3 - 2\sqrt{2})g \approx 7,7 \text{ м.}$$

2. (40 баллов) Цепь, составленная из резистора с сопротивлением  $R_0 = 55$  Ом и магазина сопротивлений, который может принимать дискретные (с шагом 3 Ом) значения  $R_M = 3, 6, 9 \dots 99$  Ом, подключена к источнику с напряжением  $U = 100$  В (см. рис.). Какую максимальную мощность можно получить на магазине сопротивлений?



**Ответ:** Максимальная мощность на магазине равна 45,45 Вт.

**Решение:** Выделяющаяся на магазине сопротивлений мощность определяется формулой

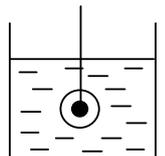
$$P = \frac{U^2 R_M}{(R_M + R_0)^2},$$

которую для анализа полезно преобразовать к виду

$$P = \frac{U^2}{R_0 \left( \sqrt{\frac{R_M}{R_0}} + \sqrt{\frac{R_0}{R_M}} \right)^2}.$$

Сумма взаимно обратных величин в знаменателе имеет минимум при  $R_M = R_0$ . При этом выделяющаяся мощность имеет максимум. Поскольку условие  $R_M = 55$  Ом не может быть выполнено точно, нужно взять близкие к 55 омам значения  $R_M$ , т.е. проверить на максимум мощности значения 54 Ом и 57 Ом. При  $R_M = 54$  Ом мощность равна 45,45 Вт, а при  $R_M = 57$  Ом равна 45,44 Вт. Таким образом, максимально достижимой является мощность 45,45 Вт.

3. (30 баллов) Кусок металла с замороженным на него льдом висит на нити, находясь полностью под водой и не касаясь дна сосуда с водой (см. рис.). Сила натяжения нити равна 3 Н. Когда лед растаял, сила натяжения возросла до 3,5 Н. Найти массу льда и массу металла. Плотность металла равна  $4500 \text{ кг/м}^3$ , льда  $900 \text{ кг/м}^3$  и воды  $1000 \text{ кг/м}^3$ . Ускорение свободного падения считать равным  $10 \text{ м/с}^2$ .



**Ответ:** Масса льда равна 0,45 кг. Масса металла равна 0,45 кг.

**Решение:** Запишем условие равновесия для куска металла со льдом

$$T_1 + \rho_B(V_L + V_M)g = \rho_L V_L g + \rho_M V_M g$$

и для куска металла после таяния льда

$$T_2 + \rho_B V_M g = \rho_M V_M g.$$

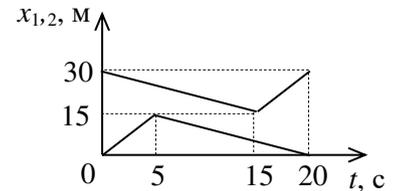
Здесь  $T_{1,2}$  – значения силы натяжения нити,  $g$  – ускорение свободного падения, а  $\rho_B$ ,  $\rho_L$  и  $\rho_M$  – плотности воды, льда и металла соответственно. Вычитая первое уравнение из второго, получаем

$$T_2 - T_1 = (\rho_B - \rho_L) V_L g.$$

Учитывая, что  $T_2 - T_1 = 0,5$  Н, находим отсюда объем льда  $V_L = 0,5$  л, а умножая его на плотность льда, находим и массу льда  $\rho_L V_L = 0,45$  кг. Из второго условия равновесия находим объем металла  $V_M = 0,1$  л, а умножая на плотность металла, находим массу металла  $\rho_M V_M = 0,45$  кг.

### 8 класс

1. (30 баллов) Графики зависимости от времени координат  $x_1$  и  $x_2$  двух тел, совершающих движение вдоль оси  $x$ , приведены на рисунке. На какое минимальное расстояние сближаются тела? В течение какого времени тела удаляются друг от друга?



**Ответ:** Минимальное расстояние между телами равно 10 м. Тела удаляются друг от друга в течение 5 с на интервале от 15 до 20 с.

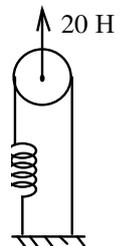
**Решение:** На интервале 0-5 с тела двигаются навстречу друг другу. К моменту  $t = 5$  с тело, двигающееся из точки  $x = 0$ , проходит 15 м, а тело, двигающееся из точки  $x = 30$  м, проходит 5 м. Таким образом, в момент  $t = 5$  с достигается минимальное расстояние между телами, равное 20 м. На интервале 5-15 с расстояние между телами остается неизменным. На интервале 15-20 с тела удаляются друг от друга.

2. (30 баллов) Два стоящих на столе сосуда цилиндрической формы, поперечные сечения которых отличаются в два раза, сообщаются внизу через трубку и частично заполнены водой. Какой объем воды перейдет из одного сосуда в другой, если в широкий сосуд пустить плавать тело массой  $m$ ? Плотность воды равна  $\rho$ . Считать, что вода не достигает краев сосудов.

**Ответ:** Перейдет объем воды  $m/(3\rho)$ .

**Решение:** Плавающее тело вытеснит объем воды  $m/\rho$ . Чтобы уровни воды в сосудах остались одинаковыми, вытесненный объем воды долженделиться между сосудами в отношении 2:1, причем в узкий сосуд должна перейти 1 часть этого объема, т.е.  $m/(3\rho)$ .

3. (40 баллов) На сколько сместится ось блока в системе, приведенной на рисунке, если к оси приложить силу 20 Н? Жесткость пружины равна 200 Н/м. Массой блока и пружины пренебречь, нить считать идеальной.

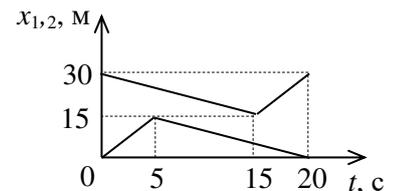


**Ответ:** Ось блока сместится на 2,5 см.

**Решение:** На блок действует направленная вверх сила 20 Н и две одинаковые, направленные вниз силы со стороны левой и правой частей нити. Из условия равновесия блока (равенства нулю суммы действующих на него сил) следует, что сила натяжения нити равна 10 Н. С этой силой и растягивается пружина, а значит, ее растяжение равно 5 см. Из-за растяжения пружины точка прикрепления нити к пружине поднимается на 5 см, и высвободившаяся нить разделится пополам (по 2,5 см) между левой и правой от блока частями нити. Таким образом, блок поднимется на 2,5 см.

### 7 класс

1. (30 баллов) Графики зависимости от времени координат  $x_1$  и  $x_2$  двух тел, совершающих движение вдоль оси  $x$ , приведены на рисунке. На какое минимальное расстояние сближаются тела? В течение какого времени тела удаляются друг от друга?



**Ответ:** Минимальное расстояние между телами равно 10 м. Тела удаляются друг от друга в течение 5 с на интервале от 15 до 20 с.

**Решение:** На интервале 0-5 с тела двигаются навстречу друг другу. К моменту  $t = 5$  с тело, двигающееся из точки  $x = 0$ , проходит 15 м, а тело, двигающееся из точки  $x = 30$  м, проходит 5 м. Таким образом, в момент  $t = 5$  с достигается минимальное расстояние между телами, равное 20 м. На интервале 5-15 с расстояние между телами остается неизменным. На интервале 15-20 с тела удаляются друг от друга.

2. (30 баллов) Два велосипедиста одновременно начинают движение из одной точки кругового трека радиуса  $R$  в одном направлении, один – со скоростью  $V_1$ , другой – со скоростью  $V_2$ . Через какое время велосипедисты начнут сближаться?

**Ответ:** Велосипедисты начнут сближаться через время  $\pi R/|V_1 - V_2|$ .

**Решение:** Велосипедисты удаляются друг от друга до момента  $t$ , когда окажутся в противоположных точках диаметра. После этого они начнут сближаться. К указанному моменту разница пройденных велосипедистами путей должна равняться половине длины окружности трека, т.е.  $V_1 t - V_2 t = \pi R$  (считаем, например, что  $V_1 > V_2$ ), откуда находим  $t = \pi R/(V_1 - V_2)$ .

3. (30 баллов) Два одинаковых аквариума в форме прямоугольных параллелепипедов стоят рядом на горизонтальном столе и соединены на середине высоты тонкой трубкой, образуя таким образом сообщающиеся сосуды. Один из аквариумов на четверть заполнен 2 литрами воды, а другой пуст. С момента  $t = 0$  в частично заполненный аквариум равномерно наливают воду с темпом 1 литр за 15 секунд. Нарисовать график зависимости объема воды в этом аквариуме от времени. График рисовать до полного заполнения водой обоих сосудов. Объемом соединительной трубки пренебречь.

**Ответ:** См. рис.

**Решение:** После наливания 2 л в частично заполненный сосуд вода начнет переливаться в пустой сосуд. При этом объем воды в том сосуде, куда воду наливают, меняться не будет. После наливания еще 4 л воды ее уровни в сосудах сравняются, и наливаемая вода будет делиться поровну между сосудами. При этом в каждом сосуде объем воды будет расти на 1 литр за 30 секунд.

