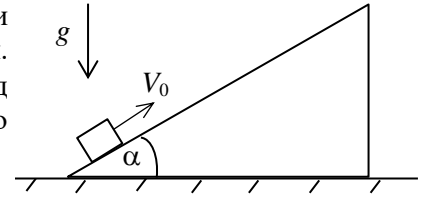


11 класс

1. (40 баллов) Кубику массой m сообщили скорость V_0 вдоль поверхности гладкого клина массой $2m$, стоящего на гладком горизонтальном столе (см. рис.). Угол при основании клина равен α . Какую работу совершит над кубиком сила реакции клина к моменту, когда скорость кубика относительно клина обратится в нуль? Ускорение свободного падения равно g .



Ответ. Работа силы реакции будет равна $-\frac{1}{9}mV_0^2 \cos^2 \alpha$.

Решение. В момент остановки кубика на клине оба тела имеют относительно стола одну и ту же скорость, направленную горизонтально. Обозначим ее через V_1 . Из сохранения проекции импульса на горизонтальное направление следует соотношение

$$mV_0 \cos \alpha = 3mV_1,$$

откуда находим

$$V_1 = \frac{1}{3}V_0 \cos \alpha.$$

По закону сохранения механической энергии для системы тел «кубик + клин» запишем

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{3mV_1^2}{2} + mgh,$$

где через h обозначена высота подъема кубика над столом. Работа силы реакции клина над кубиком равна изменению механической энергии кубика, т.е.

$$A = \frac{mV_1^2}{2} + mgh - \frac{mV_0^2}{2}.$$

Исключая mgh из двух последних уравнений, получаем

$$A = -mV_1^2.$$

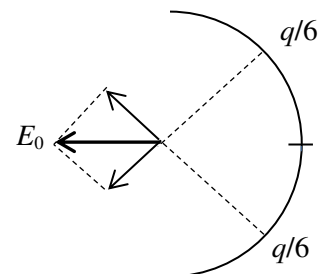
(Это соотношение можно также получить из соображений, что работа клина над кубиком равна с обратным знаком работе кубика над клином, т.е. приращению кинетической энергии клина.) Используя найденное выше значение V_1 , окончательно получаем

$$A = -\frac{1}{9}mV_0^2 \cos^2 \alpha.$$

2. (30 баллов) По тонкому непроводящему кольцу распределен электрический заряд так, что $1/3$ заряда равномерно распределена по одной половине кольца, а $2/3$ – по другой. При этом напряженность электрического поля в центре кольца равна E_0 . Какой станет напряженность в центре кольца, если весь заряд равномерно распределить по четверти кольца?

Ответ. Напряженность станет равной $3\sqrt{2}E_0$.

Решение. Обозначим заряд кольца через q и представим кольцо как суперпозицию равномерно заряженного кольца с зарядом $2q/3$ и полукольца, по которому равномерно распределен заряд $q/3$. Равномерно заряженное кольцо не создает поля в центре, поэтому напряженность E_0 создается только полукольцом с зарядом $q/3$. Это поле можно представить как суперпозицию полей, создаваемых четвертями кольца с зарядами $q/6$ (см. рис.). Учитывая, что поля четвертей направлены под углом 45° к результирующему полю E_0 , находим, что величины этих полей равны $E_1 = E_0/\sqrt{2}$. Поле, создаваемое четвертью кольца, пропорционально находящемуся на нем заряду. Поэтому четверть с зарядом q будет создавать в 6 раз большее поле, чем четверть с зарядом $q/6$, т.е. искомое поле равно $3\sqrt{2}E_0$.



3. (30 баллов) К вбитому в стену гвоздю привязали на нитях длиной L два куска пластилина так, чтобы получившиеся маятники могли совершать колебания в одной параллельной стене плоскости. Для возбуждения колебаний оба маятника отклонили на небольшой угол α_0 от вертикали, затем отпустили один из них, а когда тот достиг вертикального положения, отпустили и второй. Через какое время после

освобождения второго маятника он столкнется с первым? Каким будет максимальный угол отклонения маятника, получившегося в результате слипания кусков пластилина при столкновении? Ускорение свободного падения равно g .

Ответ. Столкновение произойдет через время $t = \frac{3\pi}{4} \sqrt{\frac{L}{g}}$. Максимальный угол будет равен $\alpha_0/\sqrt{2}$.

Решение. Примем за начало отсчета времени момент, когда отпустили второй маятник. Тогда зависимость от времени углов отклонения маятников от вертикали можно записать в виде

$$\alpha_1 = -\alpha_0 \sin \omega t, \quad \alpha_2 = \alpha_0 \cos \omega t,$$

где угловая частота колебаний определяется формулой $\omega = \sqrt{g/L}$. Столкновению маятников отвечает условие $\alpha_1 = \alpha_2$, откуда находим, что $\omega t = 3\pi/4$ и, следовательно,

$$t = \frac{3\pi}{4\omega} = \frac{3\pi}{4} \sqrt{\frac{L}{g}}$$

т.е., столкновение происходит через $3/8$ периода колебаний $T = 2\pi/\omega$. В момент столкновения маятники отклонены на угол $-\alpha_0/\sqrt{2}$.

Поскольку в момент столкновения маятники находятся на одной высоте, их скорости равны по величине. При этом направления скоростей противоположны. По закону сохранения импульса в результате столкновения скорость слипшихся маятников обратится в нуль, поэтому модуль угла отклонения слипшихся маятников в момент столкновения $\alpha_0/\sqrt{2}$ будет их максимальным углом отклонения.

10 класс

1. (30 баллов) Два тела одновременно бросили под одним и тем же углом к горизонту с начальными скоростями, отличающимися по величине в два раза. При каком угле броска величины скоростей тел могут оказаться равными в некоторый момент полета тел?

Ответ. Угол броска должен быть больше 60° .

Решение. Обозначим начальные скорости тел через V_0 и $2V_0$, а угол броска через α . Запишем квадраты скоростей тел в произвольный момент времени t как

$$V_1^2 = (V_0 \cos \alpha)^2 + (V_0 \sin \alpha - gt)^2, \quad V_2^2 = (2V_0 \cos \alpha)^2 + (2V_0 \sin \alpha - gt)^2$$

и составим разность квадратов:

$$V_2^2 - V_1^2 = 3V_0^2 - 2V_0 \sin \alpha gt.$$

Равенство скоростей достигается в момент

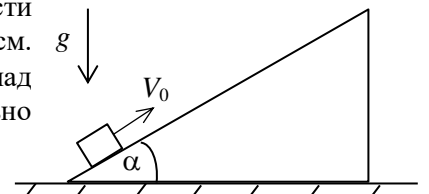
$$t = \frac{3V_0}{2g \sin \alpha}$$

при условии, что это время меньше времени полета тела, брошенного с меньшей скоростью, т.е. меньше, чем $2V_0 \sin \alpha / g$. Из данного условия получаем, что

$$\sin \alpha > \frac{\sqrt{3}}{2},$$

т.е. $\alpha > 60^\circ$.

2. (40 баллов) Кубику массой m сообщили скорость V_0 вдоль поверхности гладкого клина массой $2m$, стоящего на гладком горизонтальном столе (см. рис.). Угол при основании клина равен α . Какую работу совершит над кубиком сила реакции клина к моменту, когда скорость кубика относительно клина обратится в нуль? Ускорение свободного падения равно g .



Ответ. Работа силы реакции будет равна $-\frac{1}{9} m V_0^2 \cos^2 \alpha$.

Решение. В момент остановки кубика на клине оба тела имеют относительно стола одну и ту же скорость, направленную горизонтально. Обозначим ее через V_1 . Из сохранения проекции импульса на горизонтальное направление следует соотношение

$$mV_0 \cos \alpha = 3mV_1,$$

откуда находим

$$V_1 = \frac{1}{3}V_0 \cos \alpha.$$

По закону сохранения механической энергии для системы тел «кубик + клин» запишем

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{3mV_1^2}{2} + mgh,$$

где через h обозначена высота подъема кубика над столом. Работа силы реакции клина над кубиком равна изменению механической энергии кубика, т.е.

$$A = \frac{mV_1^2}{2} + mgh - \frac{mV_0^2}{2}.$$

Исключая mgh из двух последних уравнений, получаем

$$A = -mV_1^2.$$

(Это соотношение можно также получить из соображений, что работа клина над кубиком равна с обратным знаком работе кубика над клином, т.е. приращению кинетической энергии клина.) Используя найденное выше значение V_1 , окончательно получаем

$$A = -\frac{1}{9}mV_0^2 \cos^2 \alpha.$$

3. (30 баллов) Подвешенный на нити длины L шарик отклонили от вертикали так, что нить образовала прямой угол с вертикалью, и отпустили. При прохождении нижнего положения шарик испытал абсолютно неупругое соударение с движущимся навстречу другим шариком той же массы. Какой была скорость этого шарика, если натяжение нити не изменилось в результате соударения? Ускорение свободного падения равно g .

Ответ. Скорость шарика была равной $2\sqrt{2gL}$.

Решение. Записывая закон сохранения энергии для шарика на нити в виде

$$\frac{mV_0^2}{2} = mgL,$$

где m – масса шарика, находим скорость этого шарика в нижней точке перед соударением с другим шариком

$$V_0 = \sqrt{2gL}.$$

Обозначив скорость другого шарика через V_1 , запишем закон сохранения импульса системы из двух шариков в виде

$$mV_0 - mV_1 = 2mV_2,$$

где V_2 – скорость слипшихся шариков после соударения. Запишем далее второй закон Ньютона для шарика на нити в проекции на направление нити непосредственно перед ударом в виде

$$\frac{mV_0^2}{L} = T - mg,$$

откуда выразим силу натяжения нити перед ударом

$$T = \frac{mV_0^2}{L} + mg.$$

После соударения второй закон Ньютона для слипшихся шариков принимает вид

$$\frac{2mV_2^2}{L} = T' - 2mg,$$

откуда выражаем силу натяжения нити сразу после удара

$$T' = \frac{2mV_2^2}{L} + 2mg.$$

Приравняв силы, получаем соотношение

$$2V_2^2 + gL = V_0^2.$$

Подставляя в него найденное выше значение $V_0 = \sqrt{2gL}$, находим, что

$$V_2 = \pm\sqrt{gL/2} = \pm V_0/2.$$

Подстановка данного выражения в записанный выше закон сохранения импульса дает $V_1 = 0$ при выборе верхнего (положительного) знака (это решение не соответствует условию) и $V_1 = 2V_0 = 2\sqrt{2gL}$ при выборе нижнего (отрицательного) знака.

9 класс

1. (30 баллов) Две частицы одновременно начинают равноускоренное движение вдоль одного направления из одной точки. Первая частица имеет начальную скорость V_0 и ускорение a_1 , вторая — нулевую начальную скорость и ускорение a_2 , причем $a_2 > a_1$. На какое максимальное расстояние первая частица обгонит вторую?

Ответ. Первая частица обгонит вторую на максимальное расстояние $\frac{V_0^2}{2(a_2 - a_1)}$.

Решение. Выберем ось x в направлении движения частиц с началом в точке, откуда частицы начинают движение. Запишем зависимость координат частиц x_1 и x_2 от времени t в виде

$$x_1 = V_0 t + \frac{a_1 t^2}{2}, \quad x_2 = \frac{a_2 t^2}{2},$$

а расстояние между частицами как

$$x_1 - x_2 = V_0 t - \frac{(a_2 - a_1)t^2}{2}.$$

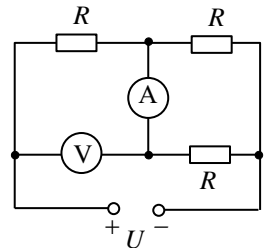
Зависимость $x_1 - x_2$ от t — параболическая с максимумом в момент $t = V_0/(a_2 - a_1)$. Соответствующее максимальное значение $x_2 - x_1$ равно

$$(x_1 - x_2)_{\max} = \frac{V_0^2}{2(a_2 - a_1)}.$$

2. (30 баллов) Цепь из трех одинаковых резисторов с сопротивлением R , амперметра с пренебрежимо малым сопротивлением и вольтметра с очень большим сопротивлением подключена к источнику с напряжением U (см. рис.). Найти показания приборов.

Ответ. Вольтметр показывает напряжение $(2/3)U$. Амперметр показывает ток $U/(3R)$.

Решение. Цепь эквивалентна включению резистора R последовательно с двумя включенными параллельно резисторами R , имеющими общее сопротивление $R/2$. Полное сопротивление цепи равно $3R/2$, следовательно, по ней протекает ток $2U/(3R)$. Напряжение на левом резисторе равно $(2/3)U$, его и показывает вольтметр, подключенный фактически параллельно к этому резистору. Через амперметр течет половина полного тока, т.е. $U/(3R)$.



3. (40 баллов) Цилиндрический сосуд высотой 0,8 м с площадью дна $0,01 \text{ м}^2$ до половины наполнен водой, в которой плавает кусок льда массой 0,9 кг, прикрепленный к дну недеформированной пружины. При доливании воды в сосуд сила упругости пружины вначале растет, а после достижения водой уровня 0,6 м перестает меняться. Сколько воды долили в сосуд к этому моменту? Чему равно максимальное значение силы упругости? Сколько воды будет в сосуде после того, как его заполнили до краев и подождали до полного таяния льда? Плотность льда 900 кг/м^3 , воды 1000 кг/м^3 . Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2 . Объемом пружины пренебречь.

Ответ. Долили воды объемом $1,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$. Максимальное значение силы упругости равно 1 Н. В сосуде останется $7,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ воды.

Решение. Объем куска льда составляет $V_{\text{л}} = 0,9/900 = 10^{-3} \text{ м}^3$. Перед доливанием воды над ней выступает $0,1V_{\text{л}}$ часть этого объема, т.е. 10^{-4} м^3 . При подъеме уровня до 0,6 м лед полностью погружается в воду. Для подъема уровня воды от 0,4 м до 0,6 м требуется долить объем воды, равный $0,2 \text{ м} \cdot 0,01 \text{ м}^2 - 0,1V_{\text{л}} = 1,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$.

Максимальное значение силы упругости F_{max} соответствует полностью погруженному льду, условие равновесия которого можно записать в виде

$$\rho_{\text{л}} V_{\text{л}} g + F_{\text{max}} = \rho_{\text{в}} V_{\text{л}} g,$$

где $\rho_{\text{в}}$ и $\rho_{\text{л}}$ — плотности воды и льда. Отсюда находим

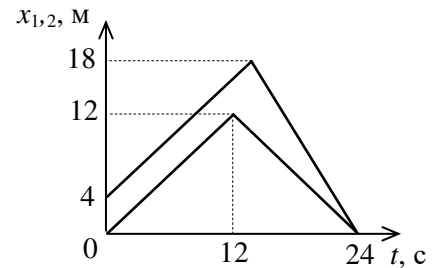
$$F_{\max} = (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})V_{\text{л}}g = 1 \text{ Н.}$$

В результате таяния лед объемом $V_{\text{л}}$ превратится в воду объемом $0,9V_{\text{л}}$. При этом объем воды в сосуде станет равным

$$0,8 \text{ м} \cdot 0,01 \text{ м}^2 - 0,1V_{\text{л}} = 7,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

8 класс

1. (30 баллов) График зависимости от времени координат x_1 и x_2 двух тел, совершающих движение вдоль оси x , приведен на рисунке. На какое максимальное расстояние тела удаляются друг от друга?



Ответ. Максимальное расстояние между телами равно 8 м.

Решение. Достижению координаты 18 м одним из тел соответствует момент времени 14 с. Тела удаляются друг от друга на интервале от 12 до 14 с. Максимальное расстояние между ними достигается в момент 14 с и равно 8 м.

2. (40 баллов) Цилиндрический сосуд высотой 0,8 м с площадью дна $0,01 \text{ м}^2$ до половины наполнен водой, в которой плавает кусок льда массой 0,9 кг, прикрепленный к дну недеформированной пружины. При доливании воды в сосуд сила упругости пружины вначале растет, а после достижения водой уровня 0,6 м перестает меняться. Сколько воды долили в сосуд к этому моменту? Чему равно максимальное значение силы упругости? Сколько воды будет в сосуде после того, как его заполнили до краев и подождали до полного таяния льда? Плотность льда 900 кг/м^3 , воды 1000 кг/м^3 . Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2 . Объемом пружины пренебречь.

Ответ. Долили воды объемом $1,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$. Максимальное значение силы упругости равно 1 Н. В сосуде останется $7,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ воды.

Решение. Объем куска льда составляет $V_{\text{л}} = 0,9/900 = 10^{-3} \text{ м}^3$. Перед доливанием воды над ней выступает $0,1V_{\text{л}}$ часть этого объема, т.е. 10^{-4} м^3 . При подъеме уровня до 0,6 м лед полностью погружается в воду. Для подъема уровня воды от 0,4 м до 0,6 м требуется долить объем воды, равный $0,2 \text{ м} \cdot 0,01 \text{ м}^2 - 0,1V_{\text{л}} = 1,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$.

Максимальное значение силы упругости F_{\max} соответствует полностью погруженному льду, условие равновесия которого можно записать в виде

$$\rho_{\text{л}}V_{\text{л}}g + F_{\max} = \rho_{\text{в}}V_{\text{л}}g,$$

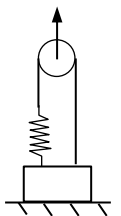
где $\rho_{\text{в}}$ и $\rho_{\text{л}}$ – плотности воды и льда. Отсюда находим

$$F_{\max} = (\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})V_{\text{л}}g = 1 \text{ Н.}$$

В результате таяния лед объемом $V_{\text{л}}$ превратится в воду объемом $0,9V_{\text{л}}$. При этом объем воды в сосуде станет равным

$$0,8 \text{ м} \cdot 0,01 \text{ м}^2 - 0,1V_{\text{л}} = 7,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

3. (30 баллов) Для поднятия лежащего на горизонтальном столе груза используют систему, состоящую из нити, пружины и подвижного блока (см. рис.). Жесткость пружины равна 100 Н/м , массы блока, пружины и нити пренебрежимо малы, нить нерастяжима. После того, как к блоку приложили некоторую силу, пружина растянулась на 10 см, а сила давления груза на стол уменьшилась вдвое. На сколько при этом сместился блок? Чему равна масса груза? Какую минимальную силу необходимо приложить к блоку, чтобы оторвать груз от стола? Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2 .



Ответ. Блока сместился на 5 см. Масса груза равна 4 кг. Минимальная сила равна 40 Н.

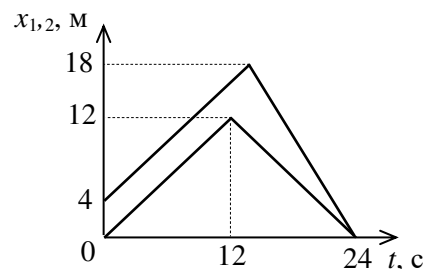
Решение. Из-за растяжения пружины точка прикрепления нити к пружине поднимается на 10 см, и высвободившаяся нить разделится пополам (по 5 см) между левой и правой от блока частями нити. Таким образом, блок поднимется на 5 см.

Сила упругости пружины равна 10 Н. На груз действуют вверх две силы – сила упругости пружины и равная ей сила натяжения нити, в сумме равные 20 Н. Это составляет половину действующей на груз силы тяжести. Следовательно, полная сила тяжести равна 40 Н, а масса груза 4 кг.

Чтобы поднять груз, нужно подействовать на него вверх силой 40 Н. Для этого сила упругости пружины и сила натяжения нити должны каждая составлять 20 Н. На блок действует вверх внешняя сила и две одинаковые, направленные вниз силы со стороны левой и правой частей нити. Из условия равновесия блока (равенства нулю суммы действующих на него сил) следует, что приложенная внешняя сила должна быть равна 40 Н.

7 класс

1. (30 баллов) График зависимости от времени координат x_1 и x_2 двух тел, совершающих движение вдоль оси x , приведен на рисунке. На какое максимальное расстояние тела удаляются друг от друга?



Ответ. Максимальное расстояние между телами равно 8 м.

Решение. Достижению координаты 18 м одним из тел соответствует момент времени 14 с. Тела удаляются друг от друга на интервале от 12 до 14 с. Максимальное расстояние между ними достигается в момент 14 с и равно 8 м.

2. (30 баллов) Поднимаясь по неподвижному эскалатору, человек преодолевает N_0 ступенек. Сколько ступенек он преодолеет, поднимаясь по движущемуся вниз эскалатору, если скорость эскалатора V_1 , а скорость человека относительно эскалатора V_2 ($V_2 > V_1$)?

Ответ. Человек преодолеет $N_0 V_2 / (V_2 - V_1)$ ступенек.

Решение: Можно измерять скорость в количестве ступенек, преодолеваемых в единицу времени. Тогда время подъема по движущемуся вниз эскалатору будет равно $t = N_0 / (V_2 - V_1)$. За это время человек, двигаясь относительно эскалатора со скоростью V_2 , преодолеет число ступенек, равное $V_2 t = N_0 V_2 / (V_2 - V_1)$.

3. (40 баллов) Уровень жидкости в сообщающихся (соединенных трубкой) сосудах всегда одинаков. Два расположенных вертикально сообщающихся сосуда цилиндрической формы, радиусы которых отличаются в два раза, заполнены водой так, что в сосуде меньшего радиуса над уровнем воды остается незаполненным объем 5 литров, а в сосуде большего радиуса – 2 литра. В сосуд меньшего радиуса наливают 5 литров воды. Сколько воды выльется из сосуда большего радиуса? Какой объем останется незаполненным водой в сосуде меньшего радиуса?

Ответ. Из сосуда большего радиуса выльется 2,5 л. В сосуде меньшего радиуса останется незаполненным объем 4,5 л.

Решение. Сосуд вдвое меньшего радиуса имеет в четыре раза меньшую площадь сечения. Поэтому при одинаковой высоте воды в сосудах в сосуде меньшего радиуса будет в четыре раза меньший ее объем. Объему 2 л в широком сосуде соответствует объем 0,5 л в узком сосуде. Следовательно, после наливания 2,5 л воды широкий сосуд становится заполненным до краев, и оставшая вода будет выливаться из него. В узком сосуде так и останутся заполненными только 0,5 л из 5 л.