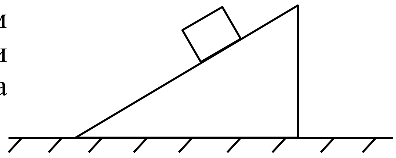
ОЛИМПИАДА “БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ – БУДУЩЕЕ НАУКИ” 2022-2023

Физика, I тур, вариант 2

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

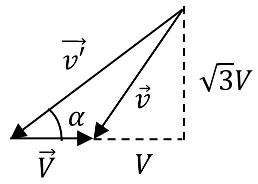
11 класс

1. (30 баллов) На гладкую наклонную грань клина, стоящего на гладком горизонтальном столе, кладут брусок той же массы, что и клин. При соскальзывании бруска его скорость в каждый момент времени в два раза больше скорости клина. Найти угол при основании клина.



Ответ. Угол при основании клина равен $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 41°$.

Решение. Скорость бруска относительно стола $\vec{v}$ может быть записана как сумма скорости бруска относительно клина $\overrightarrow{v'}$ и скорости клина $\vec{V}$: $\vec{v} = \overrightarrow{v'} + \vec{V}$ (соответствующий треугольник скоростей изображен на рисунке). Из сохранения проекции импульса системы «брусок-клин» на горизонтальное направление следует, что горизонтальная проекция $\vec{v}$ равна по величине V (см. рис.). Учитывая соотношение $v = 2V$, находим, что вертикальная компонента скорости бруска равна $\sqrt{3}V$. Из прямоугольного треугольника с гипотенузой $\overrightarrow{v'}$ находим, что



$$\text{t}g\,\alpha = \sqrt{3}V/(2V) = \sqrt{3}/2$$

и $\alpha \approx 41°$.

2. (40 баллов) В вершинах правильного треугольника со стороной a расположены одинаковые точечные электрические заряды. Найти точки на прямой, проходящей через центр треугольника перпендикулярно его плоскости, в которых величина электрического поля не изменится после удаления двух из зарядов на бесконечность.

Ответ. Точки расположены на расстоянии $a/\sqrt{24}$ от центра треугольника по обе стороны от плоскости треугольника.

Решение. В силу симметрии исходной системы зарядов электрическое поле этой системы на прямой, проходящей через центр треугольника перпендикулярно его плоскости, направлено вдоль этой прямой. Обозначая величину каждого заряда через q, запишем величину электрического поля E_1 в точке прямой, расположенной на расстоянии x от центра треугольника, в виде

$$E_1 = 3\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + a^2/3)} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2/3}},$$

где ε_0 – электрическая постоянная. После того, как три заряда убрали, поле стало равным полю одного заряда (направленному под углом к вышеуказанной прямой)

$$E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(x^2 + a^2/3)}.$$

Из условия $E_1 = E_2$ получаем уравнение

$$\frac{3x}{\sqrt{x^2 + a^2/3}} = 1,$$

откуда находим, что $x = a/\sqrt{24}$.

3. (30 баллов) Груз массы m, подвешенный на пружине жесткости k, совершает колебания в вертикальной плоскости. При прохождении грузом верхнего положения упругая энергия пружины в 4 раз меньше, чем при прохождении нижнего положения. Найти амплитуду колебаний груза. Ускорение свободного падения равно g.

Ответ. Возможны два значения амплитуды $mg/(3k)$ и $3mg/k$.

Решение. Учтем, что маятник колеблется около положения равновесия, в котором пружина растянута на длину mg/k. Обозначив амплитуду колебаний через A, запишем энергию в верхнем положении как

$$W_{\text{верх}} = \frac{k(mg/k - A)^2}{2},$$

а в нижнем как

$$W_{\text{ниж}} = \frac{k(mg/k + A)^2}{2}.$$

Накладывая условие $W_{\text{ниж}} = 4W_{\text{верх}}$, приходим к уравнению

$$mg/k + A = \pm 2(mg/k - A),$$

откуда находим

$$A = mg/(3k);\ 3mg/k.$$

10 класс

1. (30 баллов) Тело, брошенное под углом к горизонту с начальной скоростью V_0, через время t_1 оказалось на расстоянии R от точки броска. Через какое время тело упадет на землю? Ускорение свободного падения равно g.

Ответ. Тело упадет на землю через время $\frac{t_1}{2} + \frac{2V_0^2}{g^2 t_1} - \frac{2R^2}{g^2 t_1^3}$.

Решение. Обозначим через α угол, под которым было брошено тело, и запишем горизонтальную (x) и вертикальную (y) координаты тела в момент времени t_1 как

$$x = V_0 \cos\alpha\, t_1, \quad y = V_0 \sin\alpha\, t_1 - gt_1^2/2.$$

Запишем квадрат расстояния R^2 как

$$R^2 = x^2 + y^2 = V_0^2 t_1^2 - V_0 \sin\alpha\, g t_1^3 + g^2 t_1^4/4,$$

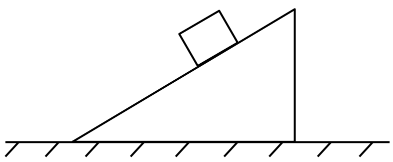
откуда выражаем

$$V_0 \sin\alpha = \frac{gt_1}{4} + \frac{V_0^2}{gt_1} - \frac{R^2}{gt_1^3}.$$

Подставляя найденное выражение в формулу для времени полета $T = 2V_0 \sin\alpha/g$, окончательно получаем

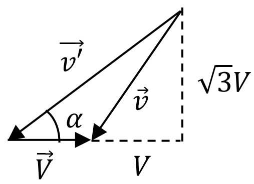
$$T = \frac{t_1}{2} + \frac{2V_0^2}{g^2 t_1} - \frac{2R^2}{g^2 t_1^3}.$$

2. (40 баллов) На гладкую наклонную грань клина, стоящего на гладком горизонтальном столе, кладут брусок той же массы, что и клин. При соскальзывании бруска его скорость в каждый момент времени в два раза больше скорости клина. Найти угол при основании клина.



Ответ. Угол при основании клина равен $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 41°$.

Решение. Скорость бруска относительно стола $\vec{v}$ может быть записана как сумма скорости бруска относительно клина $\vec{v'}$ и скорости клина $\vec{V}$: $\vec{v} = \vec{v'} + \vec{V}$ (соответствующий треугольник скоростей изображен на рисунке). Из сохранения проекции импульса системы «брусок-клин» на горизонтальное направление следует, что горизонтальная проекция $\vec{v}$ равна по величине V (см. рис.). Учитывая соотношение $v = 2V$, находим, что вертикальная компонента скорости бруска равна $\sqrt{3}V$. Из прямоугольного треугольника с гипотенузой $\vec{v'}$ находим, что



$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}V/(2V) = \sqrt{3}/2$$

и $\alpha \approx 41°$.

3. (30 баллов) Для изготовления модели глобуса взяли два проволочных кольца радиуса a, расположили их во взаимно перпендикулярных плоскостях как меридианы и спаяли на «полюсах». Третье кольцо расположили как экватор и спаяли в точках касания с «меридианами». Найти сопротивление между «полюсами» получившегося «глобуса», если сопротивление единицы длины проволоки равно R_1.

Ответ: Сопротивление равно $\frac{\pi a R_1}{4}$.

Решение. Из соображений симметрии следует, что ток не течет по участкам экваториального кольца. Их можно для наглядности удалить. При этом получаем четыре полукольца длины πa, параллельно включенных между полюсами. Их общее сопротивление равно

$$\frac{1}{4}\pi a R_1.$$

9 класс

1. (40 баллов) Частица движется прямолинейно с постоянным ускорением. Пройденный частицей путь и ее перемещение за промежуток времени $0 \le t \le t_1$ отличаются в три раза, скорость в момент t_1 меньше по величине скорости при $t = 0$. В какой момент скорость частицы обращалась в нуль?

Ответ. В момент $t_1/\left(1 + 1/\sqrt{2}\right)$.

Решение. Ясно, что вектор ускорения частицы направлен против вектора начальной скорости и на интервале времени $0 \le t \le t_1$ частица движется сначала в одну сторону, затем, после остановки, в обратную. Меньшая величина скорости в момент t_1 по сравнению с начальной (в момент $t = 0$) означает, что частица не успевает вернуться в начальную точку к моменту t_1. Обозначим через L перемещение частицы к моменту t_1, т.е. ее удаление от начальной точки в этот момент. Тогда, очевидно, пройденный путь $3L$ можно разделить следующим образом: $2L$ – это путь от начальной точки до точки остановки и L – путь в обратном направлении. Обозначив время движения от начальной точки до точки остановки через t_0 и ускорение частицы через a, запишем соотношения

$$\frac{at_0^2}{2} = 2L, \qquad \frac{a(t_1-t_0)^2}{2} = L,$$

откуда находим, что $t_0 = t_1/\left(1 + 1/\sqrt{2}\right)$.

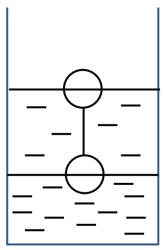
2. (30 баллов) Для изготовления модели глобуса взяли два проволочных кольца радиуса a, расположили их во взаимно перпендикулярных плоскостях как меридианы и спаяли на «полюсах». Третье кольцо расположили как экватор и спаяли в точках касания с «меридианами». Найти сопротивление между «полюсами» получившегося «глобуса», если сопротивление единицы длины проволоки равно R_1.

Ответ. Сопротивление равно $\frac{\pi a R_1}{4}$.

Решение. Из соображений симметрии следует, что ток не течет по участкам экваториального кольца. Их можно для наглядности удалить. При этом получаем четыре полукольца длины πa, параллельно включенных между полюсами. Их общее сопротивление равно

$$\frac{1}{4}\pi a R_1.$$

3. (30 баллов) В цилиндрический сосуд налиты две жидкости разной плотности. Два связанных нитью шара одинакового радиуса R плавают в них так, что половина каждого шара находится в менее плотной жидкости (см. рис.). После того, как в сосуд долили менее плотной жидкости, оба шара стали плавать в ней целиком, касаясь границ раздела с более плотной жидкостью и воздухом. Чему равно отношение плотностей жидкостей? На сколько изменилась сила натяжения нити после доливания жидкости, если плотность жидкости равна ρ? Ускорение свободного падения равно g.



Ответ. Отношение плотностей жидкостей равно 2. Сила натяжения нити возросла на $2\pi R^3\rho g/3$.

Решение. Запишем условия плавания связанных нитью шаров вначале

$$(m_1 + m_2)g = \rho_1 V g + \rho_2 \frac{V}{2} g$$

и после доливания жидкости

$$(m_1 + m_2)g = 2\rho_1 V g.$$

Здесь через m_1, m_2 и V обозначены массы и объемы ($V = 4\pi R^3/3$) шаров, а через ρ_1 и ρ_2 – плотности жидкостей, $\rho_2 > \rho_1$. Из записанных уравнений находим, что $\rho_2 = 2\rho_1$.

Записывая условия равновесия любого из шаров, например, верхнего, вначале

$$m_1 g + F_1 = \rho_1 \frac{V}{2} g$$

и после доливания жидкости

$$m_1 g + F_2 = \rho_1 V g$$

и исключая из этих уравнений $m_1 g$, находим разницу сил натяжения нити:

$$F_2 - F_1 = \rho_1 \frac{V}{2} g = \frac{2}{3} \pi R^3 \rho_1 g.$$

8 класс

1. (30 баллов) Два велосипедиста ездят по круговому треку длиной 300 м в противоположных направлениях. Скорость одного велосипедиста 52,5 км/час, другого 55,5 км/час. Через какое время происходят встречи велосипедистов?

Ответ. Через 10 с.

Решение. За время t между двумя последовательными встречами велосипедисты вместе проходят расстояние $L = 300$ м, т.е. можно составить такое уравнение

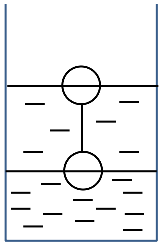
$$L = V_1 t + V_2 t,$$

где через V_1 и V_2 обозначены скорости велосипедистов. Тогда искомое время t можно выразить как

$$t = \frac{L}{V_1 + V_2}.$$

Учитывая, что $V_1 + V_2 = 108$ км/час $= 30$ м/с, находим $t = 10$ с.

2. (40 баллов) В цилиндрический сосуд налиты две жидкости разной плотности. Два связанных нитью шара одинакового радиуса R плавают в них так, что половина каждого шара находится в менее плотной жидкости (см. рис.). После того, как в сосуд долили менее плотной жидкости, оба шара стали плавать в ней целиком, касаясь границ раздела с более плотной жидкостью и воздухом. Чему равно отношение плотностей жидкостей? На сколько изменилась сила натяжения нити после доливания жидкости, если плотность жидкости равна ρ? Ускорение свободного падения равно g.



Ответ. Отношение плотностей жидкостей равно 2. Сила натяжения нити возросла на $2\pi R^3 \rho g/3$.

Решение. Запишем условия плавания связанных нитью шаров вначале

$$(m_1 + m_2) g = \rho_1 V g + \rho_2 \frac{V}{2} g$$

и после доливания жидкости

$$(m_1 + m_2) g = 2 \rho_1 V g.$$

Здесь через m_1, m_2 и V обозначены массы и объемы ($V = 4\pi R^3/3$) шаров, а через ρ_1и ρ_2 – плотности жидкостей, $\rho_2 > \rho_1$. Из записанных уравнений находим, что $\rho_2 = 2\rho_1$.

Записывая условия равновесия любого из шаров, например, верхнего, вначале

$$m_1 g + F_1 = \rho_1 \frac{V}{2} g$$

и после доливания жидкости

$$m_1 g + F_2 = \rho_1 V g$$

и исключая из этих уравнений $m_1 g$, находим разницу сил натяжения нити:

$$F_2 - F_1 = \rho_1 \frac{V}{2} g = \frac{2}{3} \pi R^3 \rho_1 g.$$

3. (30 баллов) В спиртовом термометре окрашенный спирт полностью занимает стеклянную колбочку и частично – тонкую стеклянную трубку, выходящую из колбочки. Объем колбочки равен 0,3 см^3. При нагревании спирт расширяется, его объем увеличивается по закону $V = V_0(1 + \beta\Delta t)$, где Δt – изменение температуры в градусах, $\beta = 0{,}0011$ 1/град – коэффициент объемного расширения спирта, а V_0 – начальный (до нагревания) объем спирта. В термометре при нагревании на 1 градус длина столбика увеличивается на ¾ мм. Найти площадь сечения трубки. Объем спирта в трубке много меньше объема колбочки.

Ответ. Площадь сечения трубки равна 0,44 мм^2.

Решение. Увеличение длины спиртового столбика в трубке происходит в основном из-за расширения спирта в колбочке. Увеличение объема спирта $\Delta V = V - V_0$ можно приближенно записать как

$$\Delta V = V_0\beta\Delta t.$$

С другой стороны, ΔV можно записать через увеличение длины столбика ΔL и площадь сечения трубки S как

$$\Delta V = S\Delta L.$$

Сравнивая две формулы, получаем выражение для площади сечения трубки

$$S = V_0\beta\Delta t/\Delta L.$$

Подставляя в полученное выражение $\Delta t = 1$ град, $\beta = 0{,}0011$ 1/град, $V_0 = 300$ мм^3 и $\Delta L = ¾$ мм, получаем

$$S = 0{,}44 \text{ мм}^2.$$

7 класс

1. (30 баллов) Два велосипедиста ездят по круговому треку длиной 300 м в противоположных направлениях. Скорость одного велосипедиста 52,5 км/час, другого 55,5 км/час. Через какое время происходят встречи велосипедистов?

Ответ. Через 10 с.

Решение. За время t между двумя последовательными встречами велосипедисты вместе проходят расстояние $L = 300$ м, т.е. можно составить такое уравнение

$$L = V_1 t + V_2 t,$$

где через V_1 и V_2 обозначены скорости велосипедистов. Тогда искомое время t можно выразить как

$$t = \frac{L}{V_1 + V_2}.$$

Учитывая, что $V_1 + V_2 = 108 \text{ км/час} = 30 \text{ м/с}$, находим $t = 10$ с.

2. (40 баллов) На столе стоят два цилиндрических сосуда, соединенные на высоте H тонкой трубкой. Площади дна сосудов S и $S/8$. Сосуд с большей площадью дна заполнен водой до уровня $3H/4$. На дно этого сосуда ставят сплошной цилиндр с площадью основания $S/2$ и высотой H. Какими станут уровни воды в сосудах?

Ответ. Вода в сосудах будет на одном уровне $\frac{10}{9}H$.

Решение. Из объема, первоначально занятого водой, цилиндр вытеснит воду объемом $3HS/8$. Для заполнения сосуда с большей площадью дна до уровня соединительной трубки достаточно объема воды $(H - 3H/4)S/2 = HS/8$. Для заполнения сосуда с меньшей площадью дна до уровня трубки достаточно такого же объема. Таким образом, из вытесненного объема воды $3HS/8$ часть, объемом $HS/4$, пойдет на заполнение сосудов до уровня трубки, а оставшаяся часть $HS/8$ разделится между сосудами в пропорции 8 : 1, чтобы обеспечить подъем воды в сосудах над уровнем трубки на одинаковую высоту. Подъем над уровнем трубки составит $H/9$, а над уровнем дна $10H/9$.

3. (30 баллов) Два куба, ребра которых отличаются в 2 раза, составлены из половин разной плотности. Плотности одних половин одинаковы у разных кубов, плотности других отличаются в 1,2 раза – большая у куба с большим ребром. Чему равно отношение плотностей половин меньшего куба, если отношение масс кубов равно 9?

Ответ. Плотности относятся как 5 : 3.

Решение. Обозначим плотности половин меньшего куба через ρ_1 и ρ_2, большего – через ρ_1 и $1{,}2\rho_2$, ребро меньшего куба через a. Тогда массу большого куба можно записать как

$$M = 4(\rho_1 + 1{,}2\rho_2)a^3,$$

а малого как

$$m = (\rho_1 + \rho_2)a^3/2.$$

Накладывая условие $M = 9m$, приходим к соотношению $\rho_2/\rho_1 = 5/3$.