**Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки»**

**Математика, финальный тур 2023, вариант 3**

**10 класс**

**10.1.** Петя записал 100 чисел: , затем он вычислил 98 разностей: , , …,  и сосчитал сумму всех этих разностей. Какой результат должен получиться?

**Ответ.** 14651/9900. **Решение**.



Подчеркнутые члены при подсчете суммы взаимно уничтожаются с соответствующими членами, имеющими противоположный знак. Останутся числа .

**10.2.** Найдите наименьшее значение, которое может принимать периметр неравнобедренного треугольника, у которого длины сторон – числа целые?

**Ответ:** 9. **Решение.** Если бы наименьшая сторона треугольника равнялась единице, то не выполнялось бы неравенство треугольника (большая сторона должна быть меньше суммы двух других сторон. Здесь существенно то, что по условию задачи, длины сторон – различные натуральные числа). Таким образом, наименьшие возможные длины сторон – это 2; 3; 4. При этих значениях неравенство треугольника выполняется и периметр равен 2+3+4=9.

**10.3.** **а)** Докажите, что уравнение *x*2*= y*2+ 2023 имеет решение в натуральных числах *x*, *y*.

**б**) Сколько натуральных решений имеет это уравнение?

**Ответ:** **б**) три решения. **Решение**. Перепишем уравнение в виде (*x*– *y*)(*x*+ *y*) = 2023 и разложим 2023 на простые множители: 2023 = . Число 2023 имеет 6 натуральных делителей, а именно, 1, 7, 17, , , , из них первые три подходят в качестве меньшего (первого) множителя (*x*– *y*) левой части уравнения (*x*– *y*)(*x*+ *y*) = 2023. Соответственно, остальные три делителя (в обратном порядке) будут давать второй множитель (*x*+ *y*). Получаются три системы ;  и , каждая из которых имеет натуральные решения *x*, *y*,а именно 1) *x*= 1012, *y*= 1011; 2) *x*= 148, *y*= 141; 3) *x*= 68, *y*= 51.

**10.4.** В выпуклом четырехугольнике *ABCD* точки *M* и *N* – середины сторон *AB* и *CD* соответственно. Оказалось, что  Докажите, что *AB = CD*.

**Решение.** Отрезок *MN* является медианой, проведенной из вершины прямого угла как в прямоугольном треугольнике *ABN,* так и в прямоугольном треугольнике *CDM*. Но медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы. Значит, гипотенузы этих треугольников равны (как удвоенные медианы).

**10.5.** Найдите наибольший член последовательности  (где *n*! = ).

**Ответ.** Наибольший член равен  при двух значениях *n*: 2022 и 2023. **Решение.** Рассмотрим неравенство < . Сократив обе части на , получаем: *n*+ 1 < 2023. Значит, последовательность  возрастает при *n* < 2022 и убывает при *n* > 2022. Значения  и  совпадают. Таким образом, наибольшее значение равно.

**11 класс**

**11.1.** Докажите неравенство .

**Решение**. При  неравенство принимает вид . Последнее неравенство выполняется при всех *a,* т.к. левая часть – это квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом и положительным старшим коэффициентом. При *a*< –1/2 исходное неравенство примет вид . Здесь в левой части также имеем квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом и положительным старшим коэффициентом.

**11.2** Могут ли величины углов четырехугольника, вписанного в окружность, представлять собой (в некотором порядке) арифметическую прогрессию с ненулевой разностью?

**Ответ**. Могут. **Решение**. Пусть углы четырехугольника, равны , 2, 3, 4 (в некотором порядке), где  = 36°. Если взять четырехугольник *ABCD* c углами ∠*A* = , ∠*B* = 2, ∠*C* = 4, ∠*D* = 3, то сумма противоположных углов равна ∠*A* + ∠*C* = ∠*B* + ∠*D* = 5 = 180°, и, значит, около *ABCD* можно описать окружность.

**11.3.** **а)** Докажите, что уравнение *x*2*= y*2+ 2023 имеет решение в натуральных числах *x, y*.

**б**) Сколько натуральных решений имеет это уравнение?

**Ответ:** **б**) три решения. **Решение**. См. задачу 10.3.

**11.4.** Чему равен наименьший положительный корень уравнения 

**Ответ**: 1/2. **Решение.** Запишем первое слагаемое по формулам приведения как  и преобразуем сумму косинусов в произведение: . Тогда получим две серии корней  и  (*m,n* *–* целые). В силу неотрицательности левых частей данных уравнений, *m,n* *–* неотрицательные целые числа. Наименьшие положительные корни, очевидно, получатся при *m = n =*0. В первом уравнении корень , а во втором .

**11.5.** Найдите наибольший член последовательности . (где *n*! = ).

**Ответ.** Наибольший член равен  при двух значениях *n*: 2022 и 2023. **Решение.** См. задачу 10.5.