**ОЛИМПИАДА “БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ – БУДУЩЕЕ НАУКИ” 2023-2024**
**Физика, II тур**

**ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ И РАЗБАЛЛОВКИ**

**11 класс**

**1**. (25 баллов) Брошенное в момент $t = 0$ под углом к горизонту тело оказалось на одной высоте в моменты $t_1$ и $t_2$. Найти максимальную высоту подъема тела. Ускорение свободного падения равно $g$.

**Ответ**. Максимальная высота подъема равна $g(t_1+t_2)^2/8$.

**Решение 1**. Вершина параболической траектории тела расположена симметрично относительно точек, в которых тело оказалось в моменты времени $t_1$ и $t_2$, следовательно в вершине тело находилось в момент времени $(t_1+t_2)/2$. Найденное время равно времени падения тела из верхней точки до земли $t_{\text{пад}} = (t_1+t_2)/2$. Поскольку падение происходит без начальной скорости по вертикали, то максимальную высоту, с которой падает тело, можно найти как $H = gt_{\text{пад}}^2/2 = g(t_1+t_2)^2/8$.

**Разбалловка 1.** Найден момент времени достижения вершины траектории – 10 баллов.
Указано, что найденное время равно времени падения – 5 баллов.
Найдена максимальная высота подъема – 10 баллов.

**Решение 2**. Введем вертикальную ось $y$ и запишем координаты тела в моменты времени $t_1$ и $t_2$ в виде

$$y_1 = V_0 \sin\alpha\, t_1 - \frac{gt_1^2}{2}, \qquad y_2 = V_0 \sin\alpha\, t_2 - \frac{gt_2^2}{2},$$

где $V_0$ – начальная скорость тела, $\alpha$ – угол, под которым бросили тело. Из условия $y_1 = y_2$ получаем уравнение

$$V_0 \sin\alpha\, t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = V_0 \sin\alpha\, t_2 - \frac{gt_2^2}{2},$$

которое приводим к виду

$$\frac{g(t_2^2 - t_1^2)}{2} = V_0 \sin\alpha\,(t_2 - t_1).$$

Сокращая на $t_2 - t_1$, находим

$$V_0 \sin\alpha = \frac{g(t_2+t_1)}{2}$$

Подставляя найденное выражение в формулу для максимальной высоты

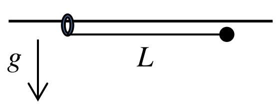
$$H = \frac{(V_0 \sin\alpha)^2}{2g},$$

окончательно получаем

$$H = \frac{g(t_2+t_1)^2}{8}.$$

**Разбалловка 2.** Записаны формулы для $y_1$ и $y_2$ – 5 баллов.
Из условия $y_1 = y_2$ найдено выражение для $V_0 \sin\alpha$ – 10 баллов.
Записано общее выражение для максимальной высоты– 5 баллов.
Выражена максимальная высота через данные задачи – 5 баллов.

**2**. (25 баллов) Невесомый стержень длины $L$ шарнирно соединен с кольцом, которое может скользить без трения по неподвижной горизонтальной спице. К концу стержня прикреплен шарик, масса которого равна массе кольца. Первоначально кольцо и шарик удерживают, причем шарик находится на уровне спицы (см. рис.). Затем шарик освобождают, а после того, как он опускается на $L/2$, освобождают и кольцо. Найти максимальную скорость кольца. Ускорение свободного падения равно $g$.



**Ответ**. Максимальная скорость кольца равна $\left(1+\sqrt{15}\right)\sqrt{gL}/4$.

**Решение**. Вначале найдем скорость шарика $V_0$ в момент освобождения кольца. Для этого запишем закон сохранения механической энергии в виде

$$\frac{mV_0^2}{2} = mg\frac{L}{2},$$

где $m$ – масса шарика, откуда получаем $V_0 = \sqrt{gL}$. Скорость шарика направлена перпендикулярно стержню, ее горизонтальная компонента равна $V_0/2$.

Скорость кольца достигает максимумов в те моменты времени, когда стержень вертикален. Действительно, в эти моменты горизонтальная компонента силы, действующей на кольцо со стороны стержня, обращается в нуль, а значит в нуль обращается и ускорение кольца, что соответствует максимуму скорости. (При движении к вертикальному положению стержень всегда разгоняет кольцо, так что минимума скорости кольца в этом положении не может быть.) При первом прохождении стержнем вертикального положения шарик движется в направлении горизонтальной компоненты его скорости в момент освобождения кольца, а кольцо – в противоположном направлении. Из закона сохранения горизонтальной компоненты импульса следует, что скорость кольца меньше скорости шарика в этот момент. При втором прохождении стержнем вертикального положения направления скоростей шарика и кольца меняются на противоположные, при этом для сохранения горизонтальной компоненты импульса системы скорость кольца должна быть больше скорости шарика. Именно в этом положении скорость кольца достигает абсолютного максимума.

Для второго прохождения стержнем вертикального положения запишем закон сохранения импульса в проекции на горизонтальное направление

$$mV_{\text{к}} - mV_{\text{ш}} = m\frac{V_0}{2}$$

($V_{\text{к}}$ и $V_{\text{ш}}$ – скорости кольца и шарика), а также закон сохранения механической энергии

$$\frac{mV_{\text{к}}^2}{2} + \frac{mV_{\text{ш}}^2}{2} = mgL.$$

Выражая из первого уравнения скорость шарика как $V_{\text{ш}} = V_{\text{к}} - \frac{V_0}{2}$ и подставляя это выражение во второе уравнение, получаем квадратное уравнение относительно скорости кольца

$$2V_{\text{к}}^2 - \sqrt{gL}V_{\text{к}} - \frac{7}{4}gL = 0.$$

Решая квадратное уравнение, находим

$$V_{\text{к}} = \frac{1 \pm \sqrt{15}}{4}\sqrt{gL},$$

где следует выбрать верхний знак (нижний знак соответствует первому вертикальному положению стержня).

**Разбалловка**. Понято, в какой момент скорость кольца достигает абсолютного максимума – 10 баллов.
Записан закон сохранения импульса для вертикального положения стержня – 5 баллов.
Записан закон сохранения энергии для вертикального положения стержня – 5 баллов.
Найдена максимальная скорость – 5 баллов.

**3.** (25 баллов) В однородном электрическом поле расположили два точечных заряда $+q$ и $-q$ так, что поле стало равным нулю в двух точках, находящихся на расстоянии $L$ друг от друга, а разность потенциалов между этими точками уменьшилась в два раза. Найти расстояние между зарядами и напряженность однородного поля.

**Ответ**. Расстояние равно $\sqrt{3}L$. Напряженность однородного поля равна $\frac{2q}{\pi\varepsilon_0 L^2}$, где $\varepsilon_0$ – электрическая постоянная.

**Решение**. Для того, чтобы электрическое поле стало равным нулю в двух точках, заряды следует расположить на одной силовой линии однородного поля так, чтобы между зарядами их поля были направлены против однородного поля. При этом точки с нулевым полем будут расположены между зарядами симметрично относительно середины соединяющего заряды отрезка (на равном расстоянии $L/2$ от середины). Обозначим напряженность однородного поля через $E_0$, а искомое расстояние между зарядами через $x$. Запишем условие равенства поля нулю в указанных точках в виде

$$\frac{q}{\pi\varepsilon_0(x+L)^2}+\frac{q}{\pi\varepsilon_0(x-L)^2}=E_0,$$

где $\varepsilon_0$ – электрическая постоянная, и преобразуем его к виду

$$\frac{2q(x^2+L^2)}{\pi\varepsilon_0(x^2-L^2)^2}=E_0.$$

Далее запишем условие уменьшения вдвое разности потенциалов между точками как

$$\frac{q}{\pi\varepsilon_0(x+L)}-\frac{q}{\pi\varepsilon_0(x-L)}+E_0L=\frac{1}{2}E_0L$$

и приведем его к виду

$$\frac{4q}{\pi\varepsilon_0(x^2-L^2)}=E_0.$$

Исключая $E_0$ из двух записанных уравнений, находим $x=\sqrt{3}L$. Подставляя найденное $x$ в любое из двух уравнений, получаем

$$E_0=\frac{2q}{\pi\varepsilon_0L^2}.$$

**Разбалловка**. Понято расположение зарядов – 5 баллов.
Записано условие равенства поля нулю – 5 баллов.
Записано условие уменьшения разности потенциалов вдвое – 5 баллов.
Найдено расстояние между зарядами – 5 баллов.
Найдена напряженность однородного поля – 5 баллов.

**4.** (25 баллов) К вбитому в потолок гвоздю привязали на нитях длиной $L$ два груза так, чтобы получившиеся маятники могли совершать колебания во взаимно перпендикулярных плоскостях. Для возбуждения колебаний оба маятника отклонили на небольшой угол $\theta_0$ от вертикали, затем отпустили один из них, а когда тот достиг угла $\theta_0/2$, отпустили и второй. Каким будет максимальное расстояние между грузами в процессе колебаний? Через какое время после начала движения это расстояние будет достигнуто в первый раз? Ускорение свободного падения равно $g$.

**Ответ.** Максимальное расстояние равно $L\theta_0\sqrt{\frac{3}{2}}$ и в первый раз достигается через время $\frac{5\pi}{6}\sqrt{\frac{L}{g}}$ после начала движения второго маятника.

**Решение.** В силу малости углов отклонения маятников можно пренебречь смещением грузов по вертикали и считать, что они движутся в горизонтальной плоскости. Вводя в этой плоскости взаимоперпендикулярные оси $x$ и $y$ вдоль направлений движения маятников, зависимости от времени координат грузов можно записать в виде

$$x=L\theta_0\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{3}\right),\qquad y=L\theta_0\cos\omega t,$$

где использовано примерное равенство $\sin\theta_0\approx\theta_0$ и начальная фаза колеблющегося вдоль оси $x$ маятника подобрана такой, чтобы в момент $t=0$ угол его отклонения равнялся $\theta_0/2$ (в этот момент другой маятник только начинает движение от положения максимального отклонения). Сначала грузы будут сближаться друг с другом: с момента $t=0$ до момента $\omega t=\frac{\pi}{3}$, когда они окажутся на одинаковом расстоянии $L\theta_0/2$ от положения равновесия ($x=-L\theta_0/2,\ y=L\theta_0/2$) и будут иметь одинаковые по величине скорости. Действительно, в этот момент проекции скоростей грузов на соединяющую их линию будут равны, и, следовательно, скорость сближения грузов обратится в нуль, что означает достижение минимума расстояния между грузами. После этого расстояние между грузами станет увеличиваться до момента $\omega t=\frac{5\pi}{6}$ , когда грузы опять окажутся на одинаковом расстоянии от положения равновесия ($x = -\sqrt{3}L\theta_0/2$, $y = -\sqrt{3}L\theta_0/2$) и будут иметь одинаковые по величине скорости. В этот момент расстояние между грузами максимально и равно

$$R_{\max} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}L\theta_0}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}L\theta_0}{2}\right)^2} = L\theta_0\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Учитывая, что для математического маятника $\omega = \sqrt{g/L}$, находим момент достижения максимального расстояния

$$t = \frac{5\pi}{6}\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Максимальное расстояние между грузами и момент его достижения могут быть также найдены исследованием на экстремум функции $x^2 + y^2$ с помощью производной.

**Разбалловка.** Записаны зависимости от времени углов или координат маятников – по 5 баллов за маятник.
Найден момент достижения максимального расстояния – 10 баллов.
Найдено максимальное расстояние – 5 баллов.

## 10 класс

**1**. (25 баллов) Брошенное в момент $t = 0$ под углом к горизонту тело оказалось на одной высоте в моменты $t_1$ и $t_2$. Найти максимальную высоту подъема тела. Ускорение свободного падения равно $g$.

**Ответ**. Максимальная высота подъема равна $g(t_1 + t_2)^2/8$.

**Решение 1**. Вершина параболической траектории тела расположена симметрично относительно точек, в которых тело оказалось в моменты времени $t_1$ и $t_2$, следовательно в вершине тело находилось в момент времени $(t_1 + t_2)/2$. Найденное время равно времени падения тела из верхней точки до земли $t_{\text{пад}} = (t_1 + t_2)/2$. Поскольку падение происходит без начальной скорости по вертикали, то максимальную высоту, с которой падает тело, можно найти как $H = gt_{\text{пад}}^2/2 = g(t_1 + t_2)^2/8$.

**Разбалловка 1.** Найден момент времени достижения вершины траектории – 10 баллов.
Указано, что найденное время равно времени падения – 5 баллов.
Найдена максимальная высота подъема – 10 баллов.

**Решение 2**. Введем вертикальную ось $y$ и запишем координаты тела в моменты времени $t_1$ и $t_2$ в виде

$$y_1 = V_0 \sin\alpha\, t_1 - \frac{gt_1^2}{2}, \qquad y_2 = V_0 \sin\alpha\, t_2 - \frac{gt_2^2}{2},$$

где $V_0$ – начальная скорость тела, $\alpha$ – угол, под которым бросили тело. Из условия $y_1 = y_2$ получаем уравнение

$$V_0 \sin\alpha\, t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = V_0 \sin\alpha\, t_2 - \frac{gt_2^2}{2},$$

которое приводим к виду

$$\frac{g(t_2^2 - t_1^2)}{2} = V_0 \sin\alpha\,(t_2 - t_1).$$

Сокращая на $t_2 - t_1$, находим

$$V_0 \sin\alpha = \frac{g(t_2 + t_1)}{2}$$

Подставляя найденное выражение в формулу для максимальной высоты

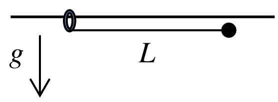
$$H = \frac{(V_0 \sin\alpha)^2}{2g},$$

окончательно получаем

$$H = \frac{g(t_2 + t_1)^2}{8}.$$

**Разбалловка 2.** Записаны формулы для $y_1$ и $y_2$ – 5 баллов.
Из условия $y_1 = y_2$ найдено выражение для $V_0 \sin\alpha$ – 10 баллов.
Записано общее выражение для максимальной высоты– 5 баллов.
Выражена максимальная высота через данные задачи – 5 баллов.

**2**. (25 баллов) Невесомый стержень длины $L$ шарнирно соединен с кольцом, которое может скользить без трения по неподвижной горизонтальной спице. К концу стержня прикреплен шарик, масса которого равна массе кольца. Первоначально кольцо и шарик удерживают, причем шарик находится на уровне спицы (см. рис.). Затем шарик освобождают, а после того, как он опускается на $L/2$, освобождают и кольцо. Найти максимальную скорость кольца. Ускорение свободного падения равно $g$.




**Ответ**. Максимальная скорость кольца равна $\left(1+\sqrt{15}\right)\sqrt{gL}/4$.

**Решение**. Вначале найдем скорость шарика $V_0$ в момент освобождения кольца. Для этого запишем закон сохранения механической энергии в виде

$$\frac{mV_0^2}{2} = mg\frac{L}{2},$$

где $m$ – масса шарика, откуда получаем $V_0 = \sqrt{gL}$. Скорость шарика направлена перпендикулярно стержню, ее горизонтальная компонента равна $V_0/2$.

Скорость кольца достигает максимумов в те моменты времени, когда стержень вертикален. Действительно, в эти моменты горизонтальная компонента силы, действующей на кольцо со стороны стержня, обращается в нуль, а значит в нуль обращается и ускорение кольца, что соответствует максимуму скорости. (При движении к вертикальному положению стержень всегда разгоняет кольцо, так что минимума скорости кольца в этом положении не может быть.) При первом прохождении стержнем вертикального положения шарик движется в направлении горизонтальной компоненты его скорости в момент освобождения кольца, а кольцо – в противоположном направлении. Из закона сохранения горизонтальной компоненты импульса следует, что скорость кольца меньше скорости шарика в этот момент. При втором прохождении стержнем вертикального положения направления скоростей шарика и кольца меняются на противоположные, при этом для сохранения горизонтальной компоненты импульса системы скорость кольца должна быть больше скорости шарика. Именно в этом положении скорость кольца достигает абсолютного максимума.

Для второго прохождения стержнем вертикального положения запишем закон сохранения импульса в проекции на горизонтальное направление

$$mV_к - mV_ш = m\frac{V_0}{2}$$

($V_к$ и $V_ш$ – скорости кольца и шарика), а также закон сохранения механической энергии

$$\frac{mV_к^2}{2} + \frac{mV_ш^2}{2} = mgL.$$

Выражая из первого уравнения скорость шарика как $V_ш = V_к - \frac{V_0}{2}$ и подставляя это выражение во второе уравнение, получаем квадратное уравнение относительно скорости кольца

$$2V_к^2 - \sqrt{gL}V_к - \frac{7}{4}gL = 0.$$

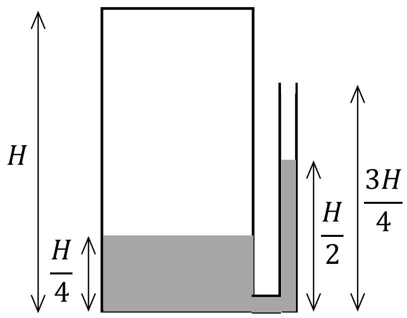
Решая квадратное уравнение, находим

$$V_к = \frac{1 \pm \sqrt{15}}{4}\sqrt{gL},$$

где следует выбрать верхний знак (нижний знак соответствует первому вертикальному положению стержня).

**Разбалловка**. Понято, в какой момент скорость кольца достигает абсолютного максимума – 10 баллов.
Записан закон сохранения импульса для вертикального положения стержня – 5 баллов.
Записан закон сохранения энергии для вертикального положения стержня – 5 баллов.
Найдена максимальная скорость – 5 баллов.

**3.** (25 баллов) Цилиндрический сосуд с площадью поперечного сечения $S$ и высотой $H$ заполнен ртутью (до уровня $H/4$) и одноатомным газом (см. рис.). Сообщающаяся с сосудом тонкая трубка высотой $3H/4$ заполнена ртутью до уровня $H/2$ и открыта в атмосферу. Атмосферное давление равно $\rho g H/2$, где ρ - плотность ртути, $g$ – ускорение свободного падения. Какое количество теплоты следует подвести к газу, чтобы вытеснить ртуть из сосуда? Передачу тепла от газа стенкам сосуда и ртути считать пренебрежимо малой.

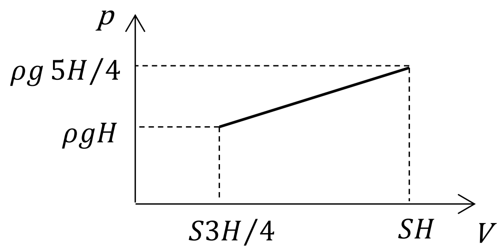



**Ответ**. Необходимо подвести количество теплоты, равное

$$\frac{21}{16}\rho g H^2 S.$$

**Решение.**

При нагревании газа его объем вначале (до заполнения трубки ртутью) практически не будет меняться (объем трубки мал по сравнению с объемом ртути в сосуде), а давление газа будет расти от значения $\rho g\, H/2 + (\rho g\, H/2 - \rho g\, H/4) = \rho g\, 3H/4$ до $\rho g\, H/2 + (\rho g\, 3H/4 - \rho g\, H/4) = \rho g H$. При дальнейшем нагревании газа его объем $V$ будет увеличиваться от начального значения $S3H/4$ до значения $SH$, соответствующего полному вытеснению ртути из сосуда, а давление $p$ будет расти линейно от $\rho g H$ до $\rho g\, 5H/4$ (см. рис.).




Согласно первому принципу термодинамики полученное газом тепло $Q$ идет на увеличение внутренней энергии газа $\Delta U$ и совершение газом работы $A$: $Q = \Delta U + A$. Увеличение внутренней энергии запишем как $\Delta U = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1)$, где $T_1$ – начальная температура газа, $T_2$ – конечная (после заполнения газом всего сосуда) температура, $\nu$ – число молей газа, а $R$ – молярная газовая постоянная. С учетом уравнения Клапейрона-Менделеева данное выражение можно преобразовать к виду

$$\Delta U = \frac{3}{2}\left(\rho g \frac{5H}{4} SH - \rho g \frac{3H}{4} S \frac{3H}{4}\right) = \frac{33}{32}\rho g H^2 S.$$

Работу газа находим как площадь под графиком $p(V)$ (площадь трапеции):

$$A = \frac{1}{2}\left(\rho g H + \rho g \frac{5H}{4}\right)\left(SH - S\frac{3H}{4}\right) = \frac{9}{32}\rho g H^2 S.$$

Суммируя $\Delta U$ и $A$, находим искомое количество теплоты

$$Q = \frac{21}{16}\rho g H^2 S.$$

**Разбалловка.** Понято наличие участка изохорного нагревания газа – 5 баллов.
Найдено приращение внутренней энергии – 5 баллов.
Найдена работа газа – 10 баллов.
Получен ответ – 5 баллов.

**4.** (25 баллов) Имеются 2024 резистора с одинаковыми сопротивлениями $R$. Предложите схему их соединения в цепь с общим сопротивлением $6R$.

**Ответ**. Цепь может состоять из следующих последовательно соединенных участков: 44 участков по 44 соединенных параллельно резистора, 9 участков по 9 соединенных параллельно резисторов, 2 участков по 2 соединенных параллельно резистора, 3 последовательно соединенных резисторов.

**Решение**. Будем исходить из следующей идеи. Если $N$ резисторов соединить параллельно, а затем $N$ таких составных резисторов соединить последовательно, то сопротивление полученной цепи из $N^2$ резисторов будет равно сопротивлению одного резистора $R$. Подберем максимальное число $N$, при котором $N^2 < 2024$. Получим $N = 44$ и $N^2 = 1936$. Остается $2024 - 1936 = 88$ резисторов. Подберем число $N$, при котором $N^2 < 88$. Получим $N = 9$. Остается 7 резисторов. Подберем число $N$, при котором $N^2 < 7$. Получим $N = 2$. Остается 3 резистора, которые соединим последовательно.

**Разбалловка**. Записаны общие формулы для параллельного
и последовательного соединения резисторов – 5 баллов.
Предложена идея решения – 10 баллов.
Указана схема соединения – 10 баллов.

**9 класс**

**1**. (25 баллов) Брошенное в момент $t = 0$ под углом к горизонту тело оказалось на одной высоте в моменты $t_1$ и $t_2$. Найти максимальную высоту подъема тела. Ускорение свободного падения равно $g$.

**Ответ**. Максимальная высота подъема равна $g(t_1 + t_2)^2/8$.

**Решение 1**. Вершина параболической траектории тела расположена симметрично относительно точек, в которых тело оказалось в моменты времени $t_1$ и $t_2$, следовательно в вершине тело находилось в момент времени $(t_1 + t_2)/2$. Найденное время равно времени падения тела из верхней точки до земли $t_{\text{пад}} = (t_1 + t_2)/2$. Поскольку падение происходит без начальной скорости по вертикали, то максимальную высоту, с которой падает тело, можно найти как $H = gt_{\text{пад}}^2/2 = g(t_1 + t_2)^2/8$.

**Разбалловка 1.** Найден момент времени достижения вершины траектории – 10 баллов.
Указано, что найденное время равно времени падения – 5 баллов.
Найдена максимальная высота подъема – 10 баллов.

**Решение 2**. Введем вертикальную ось $y$ и запишем координаты тела в моменты времени $t_1$ и $t_2$ в виде

$$y_1 = V_0 \sin\alpha\, t_1 - \frac{gt_1^2}{2}, \qquad y_2 = V_0 \sin\alpha\, t_2 - \frac{gt_2^2}{2},$$

где $V_0$ – начальная скорость тела, $\alpha$ – угол, под которым бросили тело. Из условия $y_1 = y_2$ получаем уравнение

$$V_0 \sin\alpha\, t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = V_0 \sin\alpha\, t_2 - \frac{gt_2^2}{2},$$

которое приводим к виду

$$\frac{g(t_2^2 - t_1^2)}{2} = V_0 \sin\alpha\, (t_2 - t_1).$$

Сокращая на $t_2 - t_1$, находим

$$V_0 \sin\alpha = \frac{g(t_2 + t_1)}{2}$$

Подставляя найденное выражение в формулу для максимальной высоты

$$H = \frac{(V_0 \sin\alpha)^2}{2g},$$

окончательно получаем

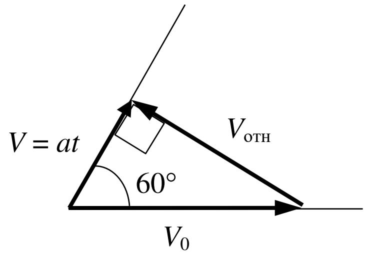
$$H = \frac{g(t_2 + t_1)^2}{8}.$$

**Разбалловка 2.** Записаны формулы для $y_1$ и $y_2$ – 5 баллов.
Из условия $y_1 = y_2$ найдено выражение для $V_0 \sin\alpha$ – 10 баллов.
Записано общее выражение для максимальной высоты– 5 баллов.
Выражена максимальная высота через данные задачи – 5 баллов.

**2**. (25 баллов) Две частицы одновременно начинают движение из одной точки по двум лучам, образующим угол 60°. Одна частица движется с постоянной скоростью, другая – без начальной скорости с постоянным ускорением. Найти отношение путей, пройденных частицами к моменту, когда их относительная скорость достигнет минимального значения.

**Ответ**. Частица, движущаяся с постоянной скоростью, пройдет в 4 раза больший путь, чем частица, движущаяся с ускорением.

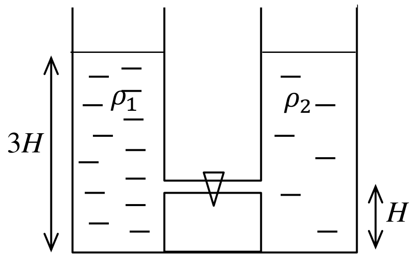
**Решение**. Вектор относительной скорости равен разности векторов скоростей частиц. Вектор скорости равномерной движущейся частицы имеет постоянную длину, обозначим ее $V_0$. Длина вектора скорости частицы, движущейся с ускорением, растет со временем по закону $V = at$, где через $a$ обозначено ускорение частицы. Величина относительной скорости $V_{\text{отн}}$ достигает минимума в тот момент, когда вектор относительной скорости становится перпендикулярным вектору скорости ускоренно движущейся частицы (см. рис.).




Из рассмотрения треугольника скоростей получаем, что $V = V_0 \cos 60° = V_0/2$. Тогда момент достижения минимальной $V_{\text{отн}}$ можно записать как $t = V_0/(2a)$. Путь, пройденный равномерно движущейся частицей, равен $S_1 = V_0 t = V_0^2/(2a)$, а ускоренно движущейся частицей $S_2 = at^2/2 = V_0^2/(8a)$. Отношение путей равно $S_1/S_2 = 4$.

**Разбалловка.** Указано, что относительная скорость равна разности скоростей частиц – 5 баллов.
Понято расположение векторов в нужный момент – 10 баллов.
Найдено отношение путей – 10 баллов.

**3**. (25 баллов) Два одинаковых цилиндрических сосуда стоят рядом на горизонтальном столе и соединены тонкой трубкой на высоте $H$ (см. рис.). В начальном состоянии трубка перекрыта краном, а сосуды заполнены жидкостями с плотностями $\rho_1$ и $\rho_2$ ($\rho_1 > \rho_2$) до высоты $3H$. Какими станут уровни заполнения сосудов после открытия крана? Считать, что жидкости из сосудов не выливаются.




**Ответ**. При $\rho_2 < \rho_1 < 3\rho_2$ сосуд с более плотной жидкостью будет заполнен до уровня $H\frac{\rho_1+5\rho_2}{\rho_1+\rho_2}$, другой сосуд – до уровня $H\frac{5\rho_1+\rho_2}{\rho_1+\rho_2}$. При $\rho_1 > 3\rho_2$ сосуд с более плотной жидкостью будет заполнен до уровня $\frac{3}{2}\left(1+\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)H$, другой сосуд – до уровня $\frac{3}{2}\left(3-\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)H$.

**Решение**. После открытия крана более плотная жидкость начнет перетекать в соседний сосуд и опускаться на его дно, вытесняя менее плотную жидкость наверх. Процесс будет продолжаться до тех пор, пока давления в сосудах на уровне соединительной трубки не выровняются. Обозначим высоту столба перетекшей жидкости через $h$. Возможны два случая: когда $h < H$ и $h > H$. В случае $h < H$ условие равенства давлений запишем в виде

$$\rho_1(2H - h) = \rho_2(2H + h),$$

откуда получаем

$$h = 2H\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$$

и находим уровни заполнения сосудов

$$3H - h = H\frac{\rho_1 + 5\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}, \qquad 3H + h = H\frac{5\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}.$$

Используя найденную формулу для $h$, из неравенства $h < H$ получаем условие применимости полученного решения $\rho_2 < \rho_1 < 3\rho_2$.

В случае $h > H$ условие равенства давлений запишем в виде

$$\rho_1(2H - h) = \rho_2 3H + \rho_1(h - H),$$

откуда получаем

$$h = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)H$$

и находим уровни заполнения сосудов

$$3H - h = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)H, \qquad 3H + h = \frac{3}{2}\left(3 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)H.$$

Данное решение справедливо при $\rho_1 > 3\rho_2$.

**Разбалловка**. Найдены уровни жидкостей при $\rho_1 < 3\rho_2$ – по 5 баллов за сосуд.
Найдены уровни жидкостей при $\rho_1 > 3\rho_2$ – по 5 баллов за сосуд.
Указано одно из условий $\rho_1 < 3\rho_2$ или $\rho_1 > 3\rho_2$ – 5 баллов.

**4.** (25 баллов) Имеются 2024 резистора с одинаковыми сопротивлениями $R$. Предложите схему их соединения в цепь с общим сопротивлением $6R$.

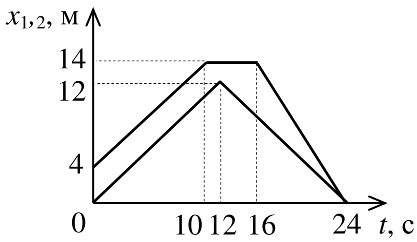
**Ответ**. Цепь может состоять из следующих последовательно соединенных участков: 44 участков по 44 соединенных параллельно резистора, 9 участков по 9 соединенных параллельно резисторов, 2 участков по 2 соединенных параллельно резистора, 3 последовательно соединенных резисторов.

**Решение**. Будем исходить из следующей идеи. Если $N$ резисторов соединить параллельно, а затем $N$ таких составных резисторов соединить последовательно, то сопротивление полученной цепи из $N^2$ резисторов будет равно сопротивлению одного резистора $R$. Подберем максимальное число $N$, при котором $N^2 < 2024$. Получим $N = 44$ и $N^2 = 1936$. Остается 2024 – 1936 = 88 резисторов. Подберем число $N$, при котором $N^2 < 88$. Получим $N = 9$. Остается 7 резисторов. Подберем число $N$, при котором $N^2 < 7$. Получим $N = 2$. Остается 3 резистора, которые соединим последовательно.

**Разбалловка**. Записаны общие формулы для параллельного
и последовательного соединения резисторов – 5 баллов.
Предложена идея решения – 10 баллов.
Указана схема соединения – 10 баллов.

## 8 класс

**1**. (25 баллов) График зависимости от времени координат $x_1$ и $x_2$ двух тел, совершающих движение вдоль оси $x$, приведен на рисунке. На какое максимальное расстояние тела удаляются друг от друга? Чему равна максимальная скорость сближения тел?

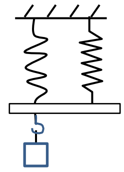



**Ответ**. Максимальное расстояние равно 6 м. Максимальная скорость сближения тел равна 1 м/с.

**Решение**. Тела удаляются друг от друга со скоростью 1 м/с на интервале времени от 12 до 16 с. Максимальное расстояние достигается в момент $t = 16$ с и равно 6 м. Тела сближаются на участках от 10 до 12 с и от 16 до 24 с. Скорость сближения равна 1 м/с на участке $10 < t < 12$ с и ¾ м/с на участке $16 < t < 24$. Таким образом, наибольшая скорость сближения равна 1 м/с.

**Разбалловка**. Понято, на каком участке тела удаляются и найдена скорость удаления – 5 баллов.
Найдено максимальное расстояние – 5 баллов.
Понято, на каких участках тела сближаются и найдены скорости сближения – по 5 баллов за участок.
Найдена максимальная скорость сближения – 5 баллов.

**2**. (25 баллов) Проволоку навили на прут, выдерживая расстояния между витками одинаковыми, и разрезали на две части разной длины, получив две пружины. Пружины подвесили к потолку, прикрепили к ним снизу легкую планку с крючком под более короткой пружиной и повесили на крючок гирю массой 1 кг. При этом пружины оказались равной длины 10 см, а планка горизонтальной. Найти длины пружин в недеформированном состоянии, если жесткость более короткой пружины равна 500 Н/м. Найти жесткость более длинной пружины. Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с$^2$.

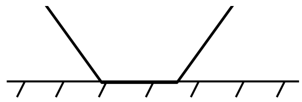


**Ответ**. Длина более длинной пружины равна 10 см, более короткой 8 см. Жесткость более длинной пружины равна 400 Н/м.

**Решение**. Поскольку планка легкая, то момент действующей на нее силы тяжести относительно точки прикрепления более короткой пружины (гири) пренебрежимо мал. Следовательно, для равновесия планки не должно быть момента силы со стороны более длинной пружины, т.е. эта пружина недеформирована. Отсюда получаем, что длина более длинной пружины в недеформированном состоянии равна 10 см. Растяжение более короткой пружины находим по закону Гука как $\Delta x = mg/k$, где $mg = 10$ Н – приложенная со стороны гири сила, а $k = 500$ Н/м$^2$ – жесткость пружины. Получаем $\Delta x = 2$ см. Таким образом, длина более короткой пружины в недеформированном состоянии равна 10 – 2 = 8 см. Поскольку жесткости пружин обратно пропорциональны их длинам, находим жесткость более длинной пружины как $500 \cdot 8 : 10 = 400$ Н/м.

**Разбалловка**. Найдена длина более длинной пружины – 5 баллов.
Найдена длина более короткой пружины – 10 баллов.
Найдена жесткость более длинной пружины – 10 баллов.

**3**. (25 баллов) В откачанном от воздуха помещении стоит расширяющийся кверху сосуд (см. рис.). В первом случае в сосуд заливают 1 л масла с плотностью 0,8 плотности воды, а во втором – 0,5 л масла и 400 г воды. Как соотносятся давления жидкостей на дно сосуда в двух случаях: равны, больше в первом случае, во втором?

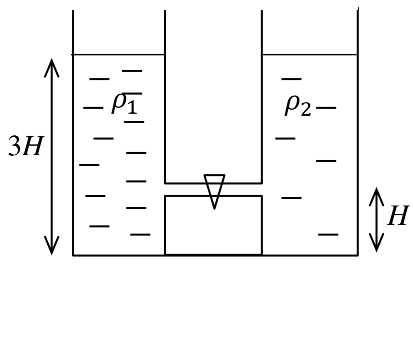


**Ответ**. Давление на дно будет больше во втором случае.

**Решение**. Если бы сосуд был цилиндрическим, то давление на дно было бы одним и тем же в обоих случая, поскольку массы содержимого равны (по 800 г в каждом случае). Для сравнения двух случаев разделим условно масло в первом случае на два слоя (верхний и нижний) по 0,5 л каждый. Переход ко второму случаю означает, что нижний слой масла заменяют водой. Поскольку вода займет меньший объем (0,4 л), чем занимало масло, то уровень воды будет ниже уровня нижнего слоя масла. Однако в сужающемся книзу сосуде это понижение уровня будет меньше, чем было бы в цилиндрическом сосуде. Используя формулу $p = \rho g h$ для зависимости давления $p$ в жидкости от глубины $h$ ($g$ – ускорение свободного падения), можно заключить, что вода будет оказывать большее давление на дно, чем оказывал нижний слой масла. Кроме того, из-за понижения уровня нижнего слоя жидкости при замене масла на воду верхний слой масла также опустится и попадет в более узкую часть сосуда. При этом толщина верхнего слоя возрастет, и следовательно, возрастет давление на его нижней границе. Оба указанных выше фактора приведут к повышению давления жидкости на дно сосуда.

**Разбалловка**. Указано, что массы содержимого одинаковы в двух случаях – 5 баллов.
Записана общая формула $p = \rho g h$ – 5 баллов.
Обосновано, что при замене нижнего слоя масла водой давление на дно возрастает – 5 баллов.
Обосновано, что давление верхнего слоя масла на его нижней границе тоже возрастает – 5 баллов.
Получен обоснованный ответ – 5 баллов.

**4.** (25 баллов) Два одинаковых цилиндрических сосуда стоят рядом на горизонтальном столе и соединены тонкой трубкой на высоте $H$ (см. рис.). В начальном состоянии трубка перекрыта краном, а сосуды заполнены жидкостями с плотностями $\rho_1$ и $\rho_2$ ($\rho_1 > \rho_2$) до высоты $3H$. Какими станут уровни заполнения сосудов после открытия крана? Считать, что жидкости из сосудов не выливаются.




**Ответ**. При $\rho_2 < \rho_1 < 3\rho_2$ сосуд с более плотной жидкостью будет заполнен до уровня $H\frac{\rho_1+5\rho_2}{\rho_1+\rho_2}$, другой сосуд – до уровня $H\frac{5\rho_1+\rho_2}{\rho_1+\rho_2}$. При $\rho_1 > 3\rho_2$ сосуд с более плотной жидкостью будет заполнен до уровня $\frac{3}{2}\left(1+\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)H$, другой сосуд – до уровня $\frac{3}{2}\left(3-\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)H$.

**Решение**. После открытия крана более плотная жидкость начнет перетекать в соседний сосуд и опускаться на его дно, вытесняя менее плотную жидкость наверх. Процесс будет продолжаться до тех пор, пока давления в сосудах на уровне соединительной трубки не выровняются. Обозначим высоту столба перетекшей жидкости через $h$. Возможны два случая: когда $h < H$ и $h > H$. В случае $h < H$ условие равенства давлений запишем в виде

$$\rho_1(2H - h) = \rho_2(2H + h),$$

откуда получаем

$$h = 2H\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$$

и находим уровни заполнения сосудов

$$3H - h = H\frac{\rho_1 + 5\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}, \qquad 3H + h = H\frac{5\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}.$$

Используя найденную формулу для $h$, из неравенства $h < H$ получаем условие применимости полученного решения $\rho_2 < \rho_1 < 3\rho_2$.

В случае $h > H$ условие равенства давлений запишем в виде

$$\rho_1(2H - h) = \rho_2 3H + \rho_1(h - H),$$

откуда получаем

$$h = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)H$$

и находим уровни заполнения сосудов

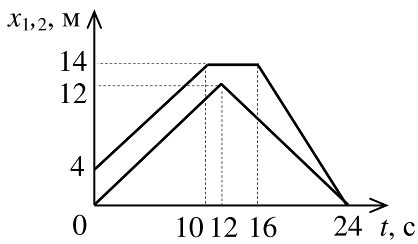
$$3H - h = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)H, \qquad 3H + h = \frac{3}{2}\left(3 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)H.$$

Данное решение справедливо при $\rho_1 > 3\rho_2$.

**Разбалловка**. Найдены уровни жидкостей при $\rho_1 < 3\rho_2$ – по 5 баллов за сосуд.
Найдены уровни жидкостей при $\rho_1 > 3\rho_2$ – по 5 баллов за сосуд.
Указано одно из условий $\rho_1 < 3\rho_2$ или $\rho_1 > 3\rho_2$ – 5 баллов.

## 7 класс

**1**. (25 баллов) График зависимости от времени координат $x_1$ и $x_2$ двух тел, совершающих движение вдоль оси $x$, приведен на рисунке. На какое максимальное расстояние тела удаляются друг от друга? Чему равна максимальная скорость сближения тел?




**Ответ**. Максимальное расстояние равно 6 м. Максимальная скорость сближения тел равна 1 м/с.

**Решение**. Тела удаляются друг от друга со скоростью 1 м/с на интервале времени от 12 до 16 с. Максимальное расстояние достигается в момент $t$ = 16 с и равно 6 м. Тела сближаются на участках от 10 до 12 с и от 16 до 24 с. Скорость сближения равна 1 м/с на участке $10 < t < 12$ с и ¾ м/с на участке $16 < t < 24$. Таким образом, наибольшая скорость сближения равна 1 м/с.

**Разбалловка**. Понято, на каком участке тела удаляются и найдена скорость удаления – 5 баллов.
Найдено максимальное расстояние – 5 баллов.
Указаны участки сближения и найдены скорости сближения – по 5 баллов за участок.
Найдена максимальная скорость сближения – 5 баллов.

**2**. (25 баллов) Находящийся в вагоне пассажир и стоящий на перроне провожающий прощаются у окна вагона. После того, как поезд начал набирать ход, пассажир пошел вдоль вагона против хода поезда, а провожающий – по перрону по ходу поезда, так чтобы оставаться напротив друг друга. При этом скорость движения провожающего по перрону в каждый момент вдвое превышала скорость движения пассажира по вагону. Какой будет скорость провожающего в момент, когда скорость поезда достигнет 9 км/час? Какой будет в этот момент скорость пассажира относительно перрона?

**Ответ**. Скорость провожающего будет равна 6 км/час, скорость пассажира относительно перрона будет также равна 6 км/час.

**Решение**. Обозначим (увеличивающуюся) скорость поезда через $V_0$, скорость пассажира относительно вагона через $V_1$, а скорость провожающего через $V_2$. Для того, чтобы провожающий и пассажир все время были напротив друг друга, в каждый момент времени должно выполняться соотношение $V_0 - V_1 = V_2$. Учтем также, что по условию $V_2 = 2V_1$. Решая систему уравнений, находим, что $V_1 = V_0/3 = 3$ км/час и $V_2 = 2V_0/3 = 6$ км/час.

Пассажир движется относительно перрона синхронно с провожающим, поэтому его скорость относительно перрона равна $V_2 = 6$ км/час.

**Разбалловка.** Записано уравнение $V_0 - V_1 = V_2$ – 10 баллов.
Записано уравнение $V_2 = 2V_1$ – 5 баллов.
Найдена скорость провожающего – 5 баллов.
Найдена скорость пассажира относительно перрона – 5 баллов.

**3**. (25 баллов) Два ящика кубической формы с тонкими стенками, изготовленными из одного и того же материала, отличаются по весу в 4 раза. Когда ящики заполнили одним и тем же сыпучим веществом, вес более легкого увеличился в 3 раза. Во сколько раз увеличился вес другого ящика?

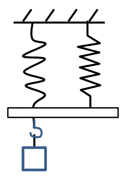
**Ответ**. Вес увеличился в 5 раз.

**Решение**. Вес тонкостенного ящика пропорционален площади его поверхности, т.е. квадрату ребра куба. Следовательно, ребро более тяжелого ящика в 2 раза больше ребра более легкого. Вес насыпанного вещества пропорционален объему ящика, т.е. третьей степени ребра ящика. Следовательно, вес содержимого большего ящика в 8 раз превышает вес содержимого меньшего.

Поскольку вес меньшего ящика увеличился втрое, вес его содержимого в 2 раза превышает вес самого ящика. Следовательно, вес содержимого большего ящика в 16 раз больше, чем вес пустого меньшего ящика. По условию вес пустого большего ящика в 4 раза больше веса пустого меньшего ящика. Отсюда заключаем, что вес содержимого большего ящика в 4 раза больше веса самого большего ящика, т.е. его вес увеличился в 5 раз.

**Разбалловка**. Понято, что длины ребер ящиков отличаются в 2 раза – 5 баллов.
Найдено, что веса содержимого отличаются в 8 раз – 5 баллов.
Найдено, что содержимое большего ящика в 16 раз тяжелее пустого меньшего – 5 баллов.
Найдено, что содержимое большего ящика в 4 раза тяжелее пустого большего – 5 баллов.
Получен ответ – 5 баллов.

**4**. (25 баллов) Проволоку навили на прут, выдерживая расстояния между витками одинаковыми, и разрезали на две части разной длины, получив две пружины. Пружины подвесили к потолку, прикрепили к ним снизу легкую планку с крючком под более короткой пружиной и повесили на крючок гирю массой 1 кг. При этом пружины оказались равной длины 10 см, а планка горизонтальной. Найти длины пружин в недеформированном состоянии, если жесткость более короткой пружины равна 500 Н/м. Найти жесткость более длинной пружины. Ускорение свободного падения считать равным 10 м/с$^2$.



**Ответ**. Длина более длинной пружины равна 10 см, более короткой 8 см. Жесткость более длинной пружины равна 400 Н/м.

**Решение**. Поскольку планка легкая, то момент действующей на нее силы тяжести относительно точки прикрепления более короткой пружины (гири) пренебрежимо мал. Следовательно, для равновесия планки не должно быть момента силы со стороны более длинной пружины, т.е. эта пружина недеформирована. Отсюда получаем, что длина более длинной пружины в недеформированном состоянии равна 10 см. Растяжение более короткой пружины находим по закону Гука как $\Delta x = mg/k$, где $mg = 10$ Н – приложенная со стороны гири сила, а $k = 500$ Н/м$^2$ – жесткость пружины. Получаем $\Delta x = 2$ см. Таким образом, длина более короткой пружины в недеформированном состоянии равна 10 – 2 = 8 см. Поскольку жесткости пружин обратно пропорциональны их длинам, находим жесткость более длинной пружины как $500 \cdot 8 : 10 = 400$ Н/м.

**Разбалловка**. Найдена длина более длинной пружины – 5 баллов.
Найдена длина более короткой пружины – 10 баллов.
Найдена жесткость более длинной пружины – 10 баллов.