ОЛИМПИАДА “БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ – БУДУЩЕЕ НАУКИ” 2023-2024

Физика, I тур, вариант 2

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ И РАЗБАЛЛОВКИ

11 класс

1. (30 баллов) Одно тело бросили с поверхности земли под углом α к горизонту с начальной скоростью V_0, а другое – из конечной точки траектории первого с запаздыванием на время T так, что оно полетело по той же траектории в обратном направлении. Найти относительную скорость тел в момент их встречи. Ускорение свободного падения равно g.

Ответ. Относительная скорость тел равна $2\sqrt{V_0^2\cos^2\alpha+\left(\frac{gT}{2}\right)^2}$.

Решение. Запишем горизонтальную (x) и вертикальную (y) координаты брошенного первым тела в зависимости от времени t, отсчитываемого от момента броска этого тела, как

$$x_1 = V_0\cos\alpha\, t,\quad y_1 = V_0\sin\alpha\, t - gt^2/2.$$

Чтобы брошенное вторым тело полетело по той же траектории, что и первое, его начальная скорость и угол броска должны быть теми же. Тогда координаты второго тела могут быть записаны как

$$x_2 = L - V_0\cos\alpha\,(t-T),\quad y_2 = V_0\sin\alpha\,(t-T) - g(t-T)^2/2,$$

где $L = V_0^2\sin 2\alpha/g$ – дальность полета тел. Записывая условие встречи тел как $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$, находим момент встречи тел

$$t_0 = \frac{V_0\sin\alpha}{g} + \frac{T}{2}.$$

Момент встречи тел может быть также найден из условия, что суммарное время полета тел до встречи должно быть равно времени полета одного тела по всей траектории, т.е.

$$t_0 + (t_0 - T) = \frac{2V_0\sin\alpha}{g}.$$

Подставляя t_0 в формулу для y_1, находим высоту, на которой произошла встреча,

$$y_1(t_0) = \frac{V_0^2\sin^2\alpha}{2g} - \frac{gT^2}{8}.$$

Запишем закон сохранения энергии для первого тела как

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{mV^2}{2} + mgy_1(t_0),$$

где m – масса тела, V – скорость тела на высоте встречи. Подставляя в это уравнение выражение для $y_1(t_0)$, находим скорость тела в точке встречи

$$V = \sqrt{V_0^2\cos^2\alpha + \left(\frac{gT}{2}\right)^2}.$$

Поскольку в момент встречи скорости тел равны по величине и противоположны по направлению, их относительная скорость в этот момент $V_{\text{отн}}$ равна

$$V_{\text{отн}} = 2V = 2\sqrt{V_0^2\cos^2\alpha + \left(\frac{gT}{2}\right)^2}.$$

После нахождения момента встречи относительную скорость тел можно найти и по-другому. Действительно, горизонтальная скорость первого тела равна $V_0\cos\alpha$, а его вертикальная скорость в момент встречи можно найти как $|V_0\sin\alpha - gt_0| = \frac{gT}{2}$. В итоге приходим к найденной выше скорости V, а затем и к $V_{\text{отн}}$.

Разбалловка. Записаны формулы для координат первого тела – 5 баллов.
Записана формула для одной из координат второго тела – 5 баллов.
Записано условие встречи тел – 5 баллов.
Найдено время встречи – 5 баллов.
Найдена относительная скорость – 10 баллов.

2. (40 баллов) Отрицательный точечный заряд $-q$ внесли в однородное поле напряженности $\mathbf{E}_0$. Найти разность потенциалов между точкой, в которой полное электрическое поле равно нулю, и точкой, в которой полное поле противоположно по направлению полю $\mathbf{E}_0$ и равно ему по величине.

Ответ. Разность потенциалов равна $\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}-1\right)\sqrt{\frac{qE_0}{\pi\varepsilon_0}}$, где ε_0 – электрическая постоянная.

Решение. Точки, где полное поле равно нулю и $-\mathbf{E}_0$, находятся на силовой линии поля $\mathbf{E}_0$, проходящей через заряд $-q$. Расстояние r_1 от заряда $-q$ до точки, где поле равно нулю, находим из условия

$$E_0 = \frac{kq}{r_1^2},$$

где $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$ и ε_0 – электрическая постоянная. Получаем

$$r_1 = \sqrt{\frac{kq}{E_0}}.$$

Расстояние r_2 от заряда $-q$ до точки, где полное поле равно $-\mathbf{E}_0$, находим из условия

$$2E_0 = \frac{kq}{r_2^2}.$$

Получаем

$$r_2 = \sqrt{\frac{kq}{2E_0}}.$$

Согласно принципу суперпозиции разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между точками можно записать как сумму вкладов от точечного заряда $-\frac{kq}{r_1}+\frac{kq}{r_2}$ и внешнего поля $-E_0(r_1-r_2)$, т.е.,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{kq}{r_1}+\frac{kq}{r_2} - E_0(r_1 - r_2).$$

Подставляя в данную формулу найденные расстояния, окончательно получаем

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\sqrt{kqE_0} = \left(\frac{3}{2\sqrt{2}}-1\right)\sqrt{\frac{qE_0}{\pi\varepsilon_0}}.$$

Разбалловка. Понято расположение точек относительно точечного заряда – 5 баллов.
Найдено расстояние от заряда до одной точки – 5 баллов.
Найдено расстояние от заряда до другой точки – 5 баллов.
Найден вклад в разность потенциалов от заряда – 10 баллов.
Найден вклад от однородного поля – 10 баллов.
Получен ответ – 5 баллов.

3. (30 баллов) К вбитому в стену гвоздю привязали на нитях длиной L два груза так, чтобы получившиеся маятники могли совершать колебания в близко расположенных и параллельных стене плоскостях, не задевая друг друга. Для возбуждения колебаний маятники отклонили от вертикали на небольшой одинаковый угол в противоположных направлениях, затем отпустили один из них, а когда тот достиг вертикального положения, отпустили и второй. Через какое время после начала движения второго маятника расстояние между маятниками достигнет максимального значения? Ускорение свободного падения равно g.

Ответ. Через время $\frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{L}{g}}$.

Решение. В силу малости углов отклонения маятников можно пренебречь смещением грузов по вертикали и считать, что они движутся вдоль горизонтальной оси x (направим ее в сторону отклонения маятника, начавшего движение первым). Зависимости от времени координат грузов можно записать в виде

$$x_1 = A\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = -L\theta_0 \sin\omega t\,, \qquad x_2 = -A\cos\omega t,$$

где использовано примерное равенство $\sin\theta_0 \approx \theta_0$, через ω обозначена угловая частота колебаний и начальная фаза маятника, начавшего движение первым, подобрана такой, чтобы в момент $t = 0$ угол его отклонения равнялся нулю (в этот момент другой маятник только начинает движение от положения максимального отклонения A). Максимальное расстояние между грузами может быть найдено исследованием функции $x_2 - x_1 = -A\left[\cos\omega t + \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right]$. Используя формулу для суммы косинусов, получаем

$$x_2 - x_1 = -2A\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right),$$

откуда следует, что максимальное значение функции в первый раз достигается при $\omega t = \frac{3\pi}{4}$. Учитывая, что для математического маятника $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$, находим искомое время

$$t = \frac{3\pi}{4\omega} = \frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{L}{g}}.$$

Можно также исходить из того, что в момент $\omega t = \frac{3\pi}{4}$ маятники имеют одинаковые скорости. Это означает, что скорость удаления маятников друг от друга обращается в нуль и, следовательно, расстояние между ними достигает максимума.

Разбалловка. Записаны зависимости от времени углов или координат маятников – по 5 баллов за маятник.
Записана функция зависимости расстояния между грузами от времени – 5 баллов.
Функция преобразована к удобному для анализа виду – 5 баллов.
Найден искомый момент времени – 10 баллов.

10 класс

1. (30 баллов) Одно тело бросили с поверхности земли под углом α к горизонту с начальной скоростью V_0, а другое – из конечной точки траектории первого с запаздыванием на время T так, что оно полетело по той же траектории в обратном направлении. Найти относительную скорость тел в момент их встречи. Ускорение свободного падения равно g.

Ответ. Относительная скорость тел равна $2\sqrt{V_0^2\cos^2\alpha + \left(\frac{gT}{2}\right)^2}$.

Решение. Запишем горизонтальную (x) и вертикальную (y) координаты брошенного первым тела в зависимости от времени t, отсчитываемого от момента броска этого тела, как

$$x_1 = V_0\cos\alpha\, t, \quad y_1 = V_0\sin\alpha\, t - gt^2/2.$$

Чтобы брошенное вторым тело полетело по той же траектории, что и первое, его начальная скорость и угол броска должны быть теми же. Тогда координаты второго тела могут быть записаны как

$$x_2 = L - V_0\cos\alpha\,(t - T), \quad y_2 = V_0\sin\alpha\,(t - T) - g(t - T)^2/2,$$

где $L = V_0^2\sin 2\alpha/g$ – дальность полета тел. Записывая условие встречи тел как $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$, находим момент встречи тел

$$t_0 = \frac{V_0\sin\alpha}{g} + \frac{T}{2}.$$

Момент встречи тел может быть также найден из условия, что суммарное время полета тел до встречи должно быть равно времени полета одного тела по всей траектории, т.е.

$$t_0 + (t_0 - T) = \frac{2V_0\sin\alpha}{g}.$$

Подставляя t_0 в формулу для y_1, находим высоту, на которой произошла встреча,

$$y_1(t_0) = \frac{V_0^2 \sin^2\alpha}{2g} - \frac{gT^2}{8}.$$

Запишем закон сохранения энергии для первого тела как

$$\frac{mV_0^2}{2} = \frac{mV^2}{2} + mgy_1(t_0),$$

где m – масса тела, V – скорость тела на высоте встречи. Подставляя в это уравнение выражение для $y_1(t_0)$, находим скорость тела в точке встречи

$$V = \sqrt{V_0^2\cos^2\alpha + \left(\frac{gT}{2}\right)^2}.$$

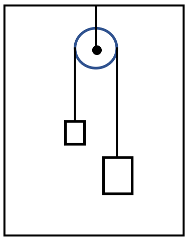
Поскольку в момент встречи скорости тел равны по величине и противоположны по направлению, их относительная скорость в этот момент $V_{\text{отн}}$ равна

$$V_{\text{отн}} = 2V = 2\sqrt{V_0^2\cos^2\alpha + \left(\frac{gT}{2}\right)^2}.$$

После нахождения момента встречи относительную скорость тел можно найти и по-другому. Действительно, горизонтальная скорость первого тела равна $V_0\cos\alpha$, а его вертикальная скорость в момент встречи можно найти как $|V_0\sin\alpha - gt_0| = \frac{gT}{2}$. В итоге приходим к найденной выше скорости V, а затем и к $V_{\text{отн}}$.

Разбалловка. Записаны формулы для координат первого тела – 5 баллов.
Записана формула для одной из координат второго тела – 5 баллов.
Записано условие встречи тел – 5 баллов.
Найдено время встречи – 5 баллов.
Найдена относительная скорость – 10 баллов.

2. (30 баллов) Два тела со вдвое отличающимися массами связаны нитью, которая переброшена через блок, прикрепленный к потолку кабины лифта (см. рис.). С каким ускорением нужно двигать лифт, чтобы ускорение тела большей массы было равно нулю относительно земли? Ускорение свободного падения равно g.



Ответ. С ускорением $g/2$.

Решение. Поскольку ускорение тела большей массы (обозначим ее через $2m$) равно нулю, то равна нулю и сумма действующих на это тело сил. Следовательно, сила натяжения нити равна силе тяжести $2mg$, действующей на тело большей массы. Тогда результирующая сил, действующих на тело меньшей (m) массы, равна $2mg - mg = mg$ и направлена вверх. Из второго закона Ньютона находим, что ускорение тела меньшей массы равно g и направлено вверх. Ускорение блока (а значит, и лифта) вдвое меньше ускорения тела меньшей массы и, следовательно, равно $g/2$.

Разбалловка. Понято, чему равна сила натяжения нити – 10 баллов.
Найдено ускорение тела меньшей массы – 10 баллов.
Найдено ускорение блока – 10 баллов.

3. (40 баллов) 10 резисторов с сопротивлениями R, $2R$, … $10R$ соединили последовательно в десятиугольник, к двум вершинам которого подключили источник напряжения. Какими должны быть сопротивления двух участков десятиугольника, расположенных между этими вершинами, чтобы выделяемая в цепи мощность была минимальной?

Ответ. Сопротивления должны быть равны $27R$ и $28R$.

Решение. Выделяемая в цепи мощность P равна

$$P = \frac{U^2}{R_1} + \frac{U^2}{R_2},$$

где U – напряжение источника, а R_1 и R_2 – сопротивления участков десятиугольника между вершинами, к которым подключен источник. Учитывая, что $R_1 + R_2 = R_{\text{полн}}$, где $R_{\text{полн}} = 55R$ – полное сопротивление цепи, мощность можно представить в виде

$$P = \frac{U^2}{R_1} + \frac{U^2}{R_{\text{полн}} - R_1} = U^2 \frac{R_{\text{полн}}}{R_1(R_{\text{полн}} - R_1)}.$$

Минимальная мощность достигается тогда, когда знаменатель максимален. Зависимость знаменателя от сопротивления R_1 является параболической функцией, максимум которой достигается при $R_1 = R_{\text{полн}}/2$. Поскольку разделить сопротивления пополам между ветвями невозможно (число 55 нечетно), максимум будет достигаться при наиболее близких к $R_{\text{полн}}/2$ сопротивлениях ветвей, т.е. при $R_1 = 27R$ и $R_2 = 28R$.

Разбалловка. Записана формула для мощности в общем виде – 5 баллов.
Мощность представлена как функция одной переменной – 10 баллов.
Найдено, что сопротивления ветвей должны быть как можно ближе к $R_{\text{полн}}/2$ – 15 баллов.
Найдено сопротивление одного участка – 5 баллов.
Найдено сопротивление другого участка – 5 баллов.

9 класс

1. (40 баллов) Две частицы совершают движение вдоль одной прямой, выходя с интервалом T из одной точки в одном направлении с одной и той же начальной скоростью V_0. Вышедшая ранее частица движется с постоянным ускорением, а вышедшая позже – равномерно со скоростью V_0. Частицы встречаются через время $(4/3)T$ с момента начала движения первой частицы. Найти путь, пройденный до встречи первой частицей.

Ответ. Первая частица прошла путь $5V_0T/9$.

Решение. Возьмем ось x в направлении начальных скоростей частиц и запишем координаты частиц в зависимости от времени (отсчитываемого от момента начала движения первой частицы) в виде

$$x_1 = V_0 t - \frac{at^2}{2}, \qquad x_2 = V_0(t - T)$$

(a – ускорение первой частицы). Здесь учтено, что вектор ускорения первой частицы направлен против вектора начальной скорости, иначе частицы не могли бы встретиться. Из условия $x_1(4T/3) = x_2(4T/3)$ находим ускорение

$$a = \frac{9V_0}{8T}.$$

Зная ускорение, можно найти время остановки первой частицы

$$t_{\text{ост}} = \frac{V_0}{a} = \frac{8}{9}T,$$

а затем и время движения от остановки до встречи $4T/3 - t_{\text{ост}} = 4T/9$.

Путь, пройденный к моменту встречи первой частицей, складывается из пути до остановки $V_0^2/(2a)$ и пути после остановки $a(4T/9)^2/2$, т.е.

$$S_1 = \frac{V_0^2}{2a} + \frac{8aT^2}{81} = \frac{4V_0T}{9} + \frac{V_0T}{9} = \frac{5V_0T}{9}.$$

Разбалловка: Записаны зависимости координат частиц от времени – по 5 баллов за частицу.
Найдено ускорение первой частицы – 5 баллов.
Найдено время движения первой частицы до остановки – 5 баллов.
Найдено время движения первой частицы после остановки – 5 баллов.
Найден путь первой частицы до остановки – 5 баллов.
Найден путь первой частицы после остановки – 5 баллов.
Получен ответ – 5 баллов.

2. (30 баллов) 10 резисторов с сопротивлениями R, $2R$, … $10R$ соединили последовательно в десятиугольник, к двум вершинам которого подключили источник напряжения. Какими должны быть сопротивления двух участков десятиугольника, расположенных между этими вершинами, чтобы выделяемая в цепи мощность была минимальной?

Ответ. Сопротивления должны быть равны $27R$ и $28R$.

Решение. Выделяемая в цепи мощность P равна

$$P = \frac{U^2}{R_1} + \frac{U^2}{R_2},$$

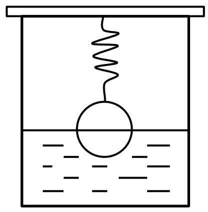
где U – напряжение источника, а R_1 и R_2 – сопротивления участков десятиугольника между вершинами, к которым подключен источник. Учитывая, что $R_1 + R_2 = R_{\text{полн}}$, где $R_{\text{полн}} = 55R$ – полное сопротивление цепи, мощность можно представить в виде

$$P = \frac{U^2}{R_1} + \frac{U^2}{R_{\text{полн}} - R_1} = U^2 \frac{R_{\text{полн}}}{R_1(R_{\text{полн}} - R_1)}.$$

Минимальная мощность достигается тогда, когда знаменатель максимален. Зависимость знаменателя от сопротивления R_1 является параболической функцией, максимум которой достигается при $R_1 = R_{\text{полн}}/2$. Поскольку разделить сопротивления пополам между ветвями невозможно (число 55 нечетно), максимум будет достигаться при наиболее близких к $R_{\text{полн}}/2$ сопротивлениях ветвей, т.е. при $R_1 = 27R$ и $R_2 = 28R$.

Разбалловка. Записана формула для мощности в общем виде – 5 баллов.
Мощность представлена как функция одной переменной – 5 баллов.
Найдено, что сопротивления ветвей должны быть как можно ближе к $R_{\text{полн}}/2$ – 10 баллов.
Найдено сопротивление одного участка – 5 баллов.
Найдено сопротивление другого участка – 5 баллов.

3. (30 баллов) В цилиндрическом сосуде находится шар объемом V_0, наполовину погруженный в воду и скрепленный пружиной с перемычкой в верхней части сосуда (см. рис.). Площадь дна сосуда равна S. После того, как в сосуд долили воду объемом V_1, шар оказался погруженным полностью, а пружина недеформированной. Найти жесткость пружины. Плотность воды равна ρ, ускорение свободного падения равно g.



Ответ. Жесткость пружины равна $\frac{\rho g S V_0}{V_0 + 2V_1 - 2S\sqrt[3]{3V_0/(4\pi)}}$.

Решение. Из конечного состояния системы (шар плавает полностью погруженным, пружина на него не действует) ясно, что плотность шара равна плотности воды. Тогда можно написать следующее условие баланса действующих на шар сил (тяжести, Архимеда и упругой) в начальном состоянии:

$$\rho V_0 g = \rho \frac{V_0}{2} g + k\Delta L,$$

где k – жесткость пружины, а ΔL – начальное растяжение пружины. Отсюда получаем, что

$$\Delta L = \frac{\rho V_0 g}{2k}.$$

Поскольку в конечном состоянии пружина не деформирована, ясно, что шар поднялся на ΔL. При этом уровень воды в сосуде поднялся на $\Delta L + R$, где $R = \sqrt[3]{3V_0/(4\pi)}$ – радиус шара. Следовательно, вода заполнила дополнительный объем $S(\Delta L + R) - V_0/2$. Записывая равенство

$$S(\Delta L + R) - \frac{V_0}{2} = V_1$$

и подставляя в него найденное выражение для ΔL, окончательно получаем

$$k = \frac{\rho g S V_0}{V_0 + 2V_1 - 2SR} = \frac{\rho g S V_0}{V_0 + 2V_1 - 2S\sqrt[3]{3V_0/(4\pi)}}.$$

Разбалловка. Понято, что плотность шара равна плотности воды – 5 баллов.
Найдено начальное растяжение пружины – 10 баллов.
Составлено уравнение для нахождения жесткости пружины – 10 баллов.
Найдена жесткость – 5 баллов.

8 класс

1. (30 баллов) Два автомобиля, двигаясь в одном направлении по прямому шоссе, сближаются со скоростью, в 7 раз меньшей, чем была бы скорость их сближения при движении с теми же скоростями навстречу друг другу. Максимальная разрешенная скорость на шоссе 120 км/ч, а минимальная (нельзя ехать медленнее) 60 км/ч. В каком интервале находится значение скорости «быстрого» автомобиля?

Ответ. В интервале от 80 до 120 км/ч.

Решение. Обозначив скорости автомобилей через V_1 и V_2 (пусть $V_2 > V_1$), составим уравнение

$$V_2 - V_1 = \frac{1}{7}(V_1 + V_2),$$

откуда находим, что $V_2 = \frac{4}{3}V_1$. При минимальной разрешенной скорости медленного автомобиля $V_1 = 60$ км/ч скорость быстрого автомобиля составит $V_2 = \frac{4}{3}V_1 = 80$ км/ч, что не превышает максимальную разрешенную. Следовательно, скорость быстрого автомобиля находится в интервале от 80 до 120 км/ч.

Разбалловка. Составлено уравнение связи скоростей – 10 баллов.
Найдено соотношение между скоростями автомобилей – 5 баллов.
Найдена минимально возможная скорость быстрого автомобиля – 10 баллов.
Найдена максимальная скорость быстрого автомобиля – 5 баллов.

2. (30 баллов) В сосуде находится 1 л воды и кусок льда массой 1 кг. Во сколько раз объем льда, который окажется в сосуде после замерзания всей воды, будет превышать объем воды, которая будет в сосуде после таяния всего льда?

Ответ. В 10/9 раза.

Решение. Масса 1 л воды равна 1 кг. Если вся вода замерзнет, то в сосуде будет 2 кг льда объемом $\frac{2}{900}$ м^3. Если весь лед растает, то в сосуде будет 2 кг воды объемом $\frac{2}{1000}$ м^3. Искомое отношение объемов равно $\frac{1000}{900} = \frac{10}{9}$.

Разбалловка. Найдена полная масса льда после замерзания – 5 баллов.
Записан объем всего льда – 10 баллов.
Найдена масса всей воды – 5 баллов.
Записан объем всей воды – 5 баллов.
Найдено искомое отношение – 5 баллов.

3. (40 баллов) Шар с полостью внутри плавает в воде, погрузившись на 1/4 своего объема. После заполнения полости водой шар стал плавать, погрузившись на 1/2 своего объема. На сколько будет погружен шар, если полость заполнить не водой, а маслом с плотностью, равной 0,8 от плотности воды?

Ответ. Шар будет погружен на 0,45 своего объема.

Решение. Запишем условия плавания шара с незаполненной полостью

$$mg = \rho_в \frac{V_ш}{4} g,$$

шара с заполненной водой полостью

$$mg + \rho_в V_п g = \rho_в \frac{V_ш}{2} g,$$

и шара с заполненной маслом полостью

$$mg + \rho_м V_п g = \rho_в V_x g.$$

Здесь m – масса шара с незаполненной полостью, $V_ш$ и $V_п$ – объемы шара и полости, V_x – искомый погруженный объем шара после заполнения полости маслом, $\rho_в$ и $\rho_м$ – плотности воды и масла, g – ускорение свободного падения.

Вычитая из второго уравнения первое, находим, что

$$V_п = \frac{V_ш}{4}.$$

Подставляя в третье уравнение найденное значение $V_п$ и выражение mg из первого уравнения, получаем

$$V_x = \frac{V_ш}{4}\left(1 + \frac{\rho_м}{\rho_в}\right) = 0{,}45V_ш.$$

Разбалловка. Записано условие плавания с незаполненной полостью – 5 баллов.
Записано условие плавания с заполненной водой полостью – 5 баллов.
Записано условие плавания с заполненной маслом полостью – 5 баллов.
Объем полости выражен через объем шара – 10 баллов.
Найден искомый объем – 15 баллов.

7 класс

1. (30 баллов) Два автомобиля, двигаясь в одном направлении по прямому шоссе, сближаются со скоростью, в 7 раз меньшей, чем была бы скорость их сближения при движении с теми же скоростями навстречу друг другу. Максимальная разрешенная скорость на шоссе 120 км/ч, а минимальная (нельзя ехать медленнее) 60 км/ч. В каком интервале находится значение скорости «быстрого» автомобиля?

Ответ. В интервале от 50 до 60 км/ч.

Решение. Обозначив скорости автомобилей через V_1 и V_2 (пусть $V_2 > V_1$), составим уравнение

$$V_2 - V_1 = \frac{1}{7}(V_1 + V_2),$$

откуда находим, что $V_2 = \frac{4}{3}V_1$. При минимальной разрешенной скорости медленного автомобиля $V_1 = 60$ км/ч скорость быстрого автомобиля составит $V_2 = \frac{4}{3}V_1 = 80$ км/ч, что не превышает максимальную разрешенную. Следовательно, скорость быстрого автомобиля находится в интервале от 80 до 120 км/ч.

Разбалловка. Составлено уравнение связи скоростей – 10 баллов.
Найдено соотношение между скоростями автомобилей – 5 баллов.
Найдена минимально возможная скорость быстрого автомобиля – 10 баллов.
Найдена максимальная скорость быстрого автомобиля – 5 баллов.

2. (30 баллов) Количества краски достаточно, чтобы покрасить 100 одинаковых кубических баков. Сколько баков большего размера, с увеличенной в 5 раз длиной ребра, можно покрасить данным количеством краски? Во сколько раз отличается общий вес больших баков от веса 100 баков меньшего размера, если все баки изготовлены из одного металла, но стенки больших баков вдвое толще?

Ответ. Можно покрасить 4 больших бака. Общий вес больших баков вдвое больше.

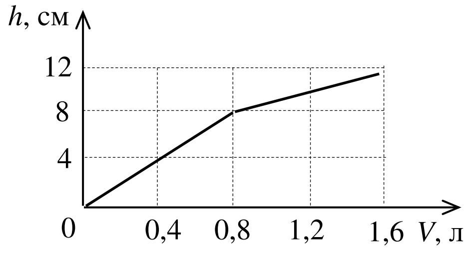
Решение. Площадь каждой грани у большого куба в $5^2 = 25$ раз больше, чем у малого. Значит и полная площадь поверхности большого бака в 25 раз больше, чем малого, и тем же количестве краски можно покрасить 100 : 25 = 4 больших бака. Полная площадь поверхности четырех больших баков равна полной площади поверхности ста малых (эти площади покрывают одним и тем же количеством краски). При вдвое большей толщине стенок полный объем металла у больших баков вдвое больше, следовательно, и полный вес их вдвое больше.

Разбалловка. Найдено, что площадь грани большого бака в 25 раз больше – 5 баллов.
Найдено количество больших баков – 10 баллов.
Использовано, что полная площадь поверхности одинакова у баков – 5 баллов.
Найдено отношение весов – 10 баллов.

3. (40 баллов) На дно пустого цилиндрического сосуда поставили деревянный куб с длиной ребра 10 см и стали наливать воду до полного заполнения сосуда. После того, как 80% объема куба оказались под водой, куб начал плавать. Нарисуйте график зависимости уровня воды в сосуде (в сантиметрах) от объема налитой воды (в литрах). Площадь дна сосуда равна 200 см^2, высота 12 см.

Ответ. См. рисунок.

Решение. Пока куб не начинает плавать, его горизонтальное сечение занимает 100 см^2 сечения сосуда. Заполняется пространство между кубом и стенками сосуда с площадью основания 200 – 100 = 100 см^2. Чтобы вода достигла уровня 8 см, нужно налить 8 × 100 = 800 см^3 = 0,8 л. Это первая характерная точка графика.



Далее вода заполняет пространство под кубом с площадью основания 200 см^2, поэтому для подъема уровня воды еще на 4 см (до краев сосуда) нужно налить еще $4 \times 200 = 800$ см^3 = 0,8 л. Таким образом, вторая характерная точка – это 12 см при объеме 1,6 л.

Разбалловка. Понято, что график состоит из двух разных участков – 5 баллов.
Понято, что на каждом участке график идет линейно – по 5 баллов за участок.
Найдена характерная точка при высоте уровня 8 см – 10 баллов.
Найдена характерная точка при высоте уровня 12 см – 5 баллов.
Правильно сделан пересчет из см^3 в л – 5 баллов.
Построен график – 5 баллов.