МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
"БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ"
ШКОЛЬНЫЕ ХАРИТОНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ
2023-2024 уч.г. г.Саров
Тестирование по математике

1. (15 баллов) Найдите сумму всех трехзначных чисел, не делящихся на 11 и имеющих последней цифрой 5.

   Решение: Найдем сумму арифметической прогрессии с первым членом $a_1 = 105$, разностью $d_1 = 10$ и последним членов $a_{n_1} = 995$. Количество членов в такой последовательности равно $n_1 = \frac{995-105}{10} + 1 = 90$. Тогда сумма равна $S_1 = \frac{105+995}{2} \cdot 90 = 49500$.

   Но среди членов первой последовательности есть те, что делятся на 11. Они также образуют арифметическую прогрессию с первым членом $b_1 = 165$, разностью $d_2 = 110$ и последним членом $d_{n_2} = 935$. Количество членов второй прогрессии равно $n_2 = \frac{935-165}{110} + 1 = 8$. Тогда их сумма равна $S_2 = \frac{165+935}{2} \cdot 8 = 4400$.

   Значит, искомая сумма равна $S = S_1 - S_2 = 45100$.

   Ответ: 45100.

2. (20 баллов) Найдите все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 1 + \frac{1}{xy} = \frac{x-y}{x^2y^2} + \frac{xy}{x-y}, \\ \frac{x-y}{xy}\sqrt{x-y} = 2 - xy. \end{cases}$$

Решение: Пусть $u = \sqrt{x-y}, v = xy$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} 1 + \frac{1}{v} = \frac{u^2}{v^2} + \frac{v}{u^2}, (1) \\ \frac{u^3}{v} = 2 - v, (2) \end{cases}$$

где $u > 0$ $(x > y)$, $v \neq 0$ $(xy \neq 0)$.

Уравнение (1) можно переписать как $u^2v^2 - u^4 = v^3 - vu^2$, или $(u^2 - v^2)(u^2 - v) = 0$.

Если $v = u^2$, то из уравнения (2) получаем уравнение $u^2 - u + 2 = 0$, $u = 1(\Rightarrow v = 1)$ или $u = -2(\Rightarrow \varnothing)$, не имеющее действительный решений.

Если $v = u$, то из (2) получаем уравнение $u^2 + u - 2 = 0$, откуда $u = 1$ $(u > 0)$, $v = 1$.

Если $v = -u$, то $u^2 + u + 2 = 0$. Это уравнение не имеет действительных решений.

Итак, $u = 1$, $v = 1$, т.е. $\sqrt{x-y} = 1$, $xy = 1$, откуда $y^2 + y - 1 = 0$, $y = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}, x = \frac{1}{y}$, откуда получаем решение системы уравнений.

Ответ: $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}; -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

3. (25 баллов) Решите неравенство $\sqrt{\log_{\frac{x+3|x|}{2}}(4x^2+3) + \frac{1}{\sqrt{|x|}}} \leqslant \log_{\frac{x+3|x|}{2}}(4x^2+3)$.

Решение: **а)** Пусть $x > 0$, тогда исходное неравенство примет вид $\sqrt{\log_{2x}(4x^2+3) + \frac{1}{\sqrt{x}}} \leqslant \log_{2x}(4x^2+3)$.

Если $0 < x < \frac{1}{2}$, то правая часть отрицательна и неравенство не имеет решений.

Если $x > \frac{1}{2}$, то обе части неравенства положительны; возводя в квадрат, получаем равносильное неравенств $t + \frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant t^2$, где $t = \log_{2x}(4x^2+3) > \log_{2x} 4x^2 = 2$. Но если $t > 2$, то $t^2 > 2t$. Кроме того, $\frac{1}{\sqrt{x}} < \sqrt{2}$ при $x > \frac{1}{2}$. Поэтому $t + \frac{1}{\sqrt{x}} < t + \sqrt{2} < 2t < t^2$, откуда следует, что неравенство $t + \frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant t^2$ является верным при $x > \frac{1}{2}$.

б) Пусть $x < 0$, тогда исходное неравенство примет вид $\sqrt{\log_{-x}(4x^2+3) + \frac{1}{\sqrt{-x}}} \leqslant \log_{-x}(4x^2+3)$ или $\sqrt{\log_t(4t^2+3) + \frac{1}{\sqrt{t}}} \leqslant \log_t(4t^2+3)$, где $t > 0$, $t \neq 1$.

Если $0 < t < 1$, то последнее неравенство не имеет решений.

Если $t > 1$, то обе части неравенства положительны и оно равносильно неравенству $u + \frac{1}{\sqrt{t}} \leqslant u^2$, где $u = \log_t(4t^2+3) > \log_t t^2 = 2$, $\frac{1}{\sqrt{t}} < 1$. Отсюда следует, что $u^2 > 2u > u + \frac{1}{\sqrt{t}}$, и поэтому неравенство $u + \frac{1}{\sqrt{t}} \leqslant u^2$ является верным при всех $t > 1$, т.е. при $-x > 1$, откуда $x < -1$.

Итак, множество решений неравенства состоит из промежутков $x < -1, x > \frac{1}{2}$.

Ответ: $x < -1, x > \frac{1}{2}$.

4. (20 баллов) Окружность касается сторон AC и BC треугольника ABC в точках A и B соответственно. На дуге этой окружности, лежащей вне треугольника, расположена точка K так, что расстояния от нее до продолжений сторон AC и BC равны 39 и 156 соответственно. Найдите расстояние от точки K до прямой AB.

   Решение: Пусть E,F и M – основания перпендикуляров, опущенных из точки K на прямые BC, AC и AB соответственно. Так как $\angle KBE = \angle KAB$, то $\triangle KAM$ подобен $\triangle KBE$, откуда следует, что $\frac{KM}{KA} = \frac{KE}{KB}$ (1).

   Аналогично, из подобия треугольников KAF и KBM следует, что $\frac{KM}{KB} = \frac{KF}{KA}$(2).

   Перемножая (1) и (2), получаем $KM^2 = KE \cdot KF = 39 \cdot 156$, откуда $KM = 78$.

   Ответ: 78.

5. (20 баллов) Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - |x - a + 6| = |x + a - 6| - (a - 6)^2$$

   имеет единственный корень.

   Решение: Запишем уравнение в виде $x^2 + (a - 6)^2 = |x - a + 6| + |x + a - 6|$.

   Если x_0 является корнем исходного уравнения, то и $-x_0$ является его корнем. Значит, исходное уравнение имеет нечетное число корней, только если $x_0 = -x_0$ то есть $x = 0$. Подставим значение $x = 0$ в уравнение:

$$(a - 6)^2 = 2|a - 6| \Leftrightarrow |a - 6| \cdot (|a - 6| - 2) = 0,$$

   откуда либо $|a - 6| = 0 \Leftrightarrow a = 6$, либо $|a - 6| = 2 \Leftrightarrow a = 4$ или $a = 8$.

   При $a = 6$ уравнение принимает вид $x^2 = 2|x|$. Корнями этого уравнения являются числа -2, 0, 2, т.е. уравнение имеет ровно три корня.

   При $a = 4$ и при $a = 8$ уравнение принимает вид $x^2 + 4 = |x - 2| + |x + 2|$.

   При $x < -2$ это уравнение сводится к уравнению $x^2 + 2x + 4 = 0$, которое не имеет корней.

   При $-2 \leqslant x \leqslant 2$ получаем уравнение $x^2 = 0$, которое имеет единственное решение $x = 0$.

   При $x > 2$ получаем уравнение $x^2 - 2x + 4 = 0$, которое не имеет корней.

   Такие образом, при $a = 4$ и при $a = 8$ исходное уравнение имеет единственный корень $x = 0$.

   Ответ: $a = 4$ и $a = 8$.