

МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
"БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ БУДУЩЕЕ НАУКИ"

ШКОЛЬНЫЕ ХАРИТОНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ
г.Саров 2023/24 уч.г.

Тестирование по физике

9 класс

1. Лестница (однородная) прислонена к гладкой стене. Коэффициент трения с полом равен μ . Найдите наименьший угол, который лестница может образовывать с полом, чтобы не проскальзывать. **(25 баллов)**
2. Два груза висят на нитях в воздухе. Сила натяжения верхней нити в 2 раза больше силы натяжения нижней нити. Когда оба груза полностью погрузили в воду (их взаимное положение не изменилось), сила натяжения верхней нити уменьшилась на 20%, а нижней – на 30%. Найти плотности грузов. Плотность воды задана. **(25 баллов)**
3. Искусственный спутник Земли движется по круговой орбите в плоскости экватора по направлению вращения Земли. Найти отношение радиуса орбиты спутника к радиусу Земли, при котором он периодически проходит над точкой запуска ровно через двое суток. **(25 баллов)**
4. Две батареи с одинаковыми ЭДС $\mathcal{E}$ соединены так, что ЭДС образовавшегося источника равна $\mathcal{E}/2$. Внутреннее сопротивление одной из батарей равно $r = 6$ Ом. Чему равны максимальное из возможных сопротивлений второго источника? Чему равно минимальное из возможных сопротивлений второго источника? **(25 баллов)**

МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
"БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ БУДУЩЕЕ НАУКИ"

ШКОЛЬНЫЕ ХАРИТОНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ

г.Саров 2023/24 уч.г.

Тестирование по физике

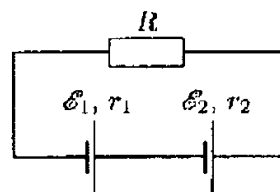
10 класс

1. Грейс (руководитель группы ученых на планете Пандора, см. «Аватар») измеряет ускорение силы тяжести на планете, для чего регистрирует моменты времени t_i , в которые шарик, падающий с некоторой высоты без начальной скорости, проходит точки, находящиеся на высотах h_i от пола лаборатории. Секундомер включается в момент пролета первой контрольной точки (т.е. в этот момент $t_1=0$). Определите по этим данным ускорение силы тяжести на планете Пандора и высоту, с которой падал шарик. Влиянием сопротивления атмосферы (разреженной) и влиянием залежей анобтаниума пренебечь. **(25 баллов)**

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$t_i, \text{с}$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$h_i, \text{см}$	624	580	531	478	424	366	302	236	167	94	16

2. В безграничной водной среде (плотность воды $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$) находятся на расстоянии 40 см между центрами друг друга два шара объемами $V_1 = 30 \text{ см}^3$ и $V_2 = 40 \text{ см}^3$, плотностью $\rho = 2000 \text{ кг/м}^3$. Определить силу взаимодействия между шарами. **(25 баллов)**

3. Две батарейки с ЭДС $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ ($\mathcal{E}_1 > \mathcal{E}_2$) и внутренними сопротивлениями $r_1 = 0,3 \text{ Ом}$ и $r_2 = 0,8 \text{ Ом}$ включены в цепь последовательно с резистором $R = 1 \text{ Ом}$. Идеальный вольтметр, подключённый к клеммам первой батарейки, показал напряжение $U_1 = 4 \text{ В}$, а подключённый к клеммам второй батарейки – напряжение $U_2 = 1,5 \text{ В}$. Найдите $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$. **(25 баллов)**



4. В калориметре с некоторым количеством воды находится электронагреватель постоянной мощности. Если включить нагреватель в сеть, а в калориметр добавлять воду с температурой 0°C со скоростью 1 г/с , то установившаяся температура воды в калориметре будет равна 50°C . Какая температура установится в калориметре, если в него вместо воды добавлять лед с температурой 0°C со скоростью $0,5 \text{ г/с}$? Теплообменом калориметра с окружающей средой пренебечь. Удельная теплоемкость воды равна $4,2 \text{ кДж/(кг}\cdot^\circ\text{C)}$, удельная теплота плавления льда 335 кДж/кг . **(25 баллов)**

МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
"БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ БУДУЩЕЕ НАУКИ"

ШКОЛЬНЫЕ ХАРИТОНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ
г.Саров 2023/24 уч.г.

Тестирование по физике

11 класс

1. На горизонтальной поверхности лежат два бруска массой m_1 и m_2 , соединенные ненапряженной пружиной. Какую наименьшую силу, направленную горизонтально, нужно приложить к бруску массой m_1 , чтобы сдвинулся и второй брусок? Коэффициент трения брусков о плоскость равен μ . **(25 баллов)**
2. В центре проводящего незаряженного слоя, ограниченного сферами с радиусами R и $2R$ находится точечный заряд q . В слое имеется небольшое радиальное отверстие. Какую работу нужно совершить, чтобы удалить заряд q через отверстие на бесконечность? **(25 баллов)**
3. Заряженная частица (масса m , заряд q) влетает со скоростью V_0 в однородное перпендикулярное магнитное поле с индукцией B . При этом на частицу действует сила сопротивления, пропорциональная ее скорости $F = -kv$. Найти расстояние между точкой входа частицы в поле и точкой остановки. **(25 баллов)**
4. Закрытый с двух торцов цилиндр, ось которого горизонтальна, разделен на две части тонким гладким подвижным поршнем. В первой части находится 1 г азота, а во второй – 2 г воды. Температура в цилиндре 100°C , объем цилиндра 2 л. Какую часть объема занимает азот? **(25 баллов)**

9-1

Пусть α - угол, который лестница образует с полом. Уравнение моментов относительно точки касания пола: $mg \frac{l}{2} \cos \alpha = \mu mgl \sin \alpha$. Ответ: $\tan \alpha_{\min} = \frac{1}{2\mu}$.

9-2

Ответ: $\rho_1 = 3,3\rho_{\text{в}}, \rho_2 = 10\rho_{\text{в}},$

9-3

Полный разбор задачи см.ниже.

9-4

Батареи соединены параллельно, но направлены противоположно. Ответ: $r_2 = 18$ Ом и $r_2 = 2$ Ома.

10-1

Обозначим: a – ускорение силы тяжести на Пандоре. h – высота, с которой падал шарик, V_0 – скорость шарика в момент пролета первой точки, $V_0^2 = 2a(h-h_1)$, $\Delta h_i = h_i - h_{i+1}$

Тогда $h_i = h_1 - V_0 t_i - at_i^2/2$. Учитывая, что $t_i = 0,1 \cdot (i-1)$, получаем $\Delta h_i = 0,1V_0 + 0,005a \cdot (2i+1)$

Строим график Δh_i от i . Тангенс угла наклона равен $0,01a$, точка пересечения с осью ординат ($i=1$) равна $0,1V_0 + 0,015a$. Из V_0 определяем h . Ответ: $a \approx 3,6$ м/с²; $h \approx 8$ м.

10-2

Пусть $F_0 = G \frac{m_1 m_2}{R^2}$. Вытеснение воды второй массой: $F_1 = F_0 - \frac{m_1}{R^2} \cdot \frac{m_2}{\rho} \rho_0 = F_0 (1 - \frac{\rho_0}{\rho})$. Архимедова сила даёт такой же вклад. Ответ: $F_0 (1 - \frac{\rho_0}{\rho})^2$.

10-3

$J = (U_1 - U_2)/R = 2,5$ А. $U_1 = E_1 - Jr_1 = 4,75$ В, $U_2 = Jr_2 - E_2 = 0,5$ В. **Иначе**

10-4

$\frac{\Delta m_1}{\Delta t} \cdot c \cdot 50 = P = \frac{\Delta m_2}{\Delta t} \cdot (\lambda + ct)$. $\frac{\Delta m_1}{\Delta t} = 2 \frac{\Delta m_2}{\Delta t}$. Ответ: $t = 20^\circ\text{C}$.

11-1

$V_{\max}: F = k\Delta x + \mu m_1 g$. Сдвиг m_2 происходит при $2\Delta x$. $\mu m_2 g = 2k\Delta x$. Ответ: $F = \mu g(m_1 + m_2/2)$.

11-2

Работа равна энергии электрического поля, которая заполнит слой от R до $2R$.

$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, $A = \int_R^{2R} \left(\frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right) 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$ (ответ).

11-3

Полный разбор задачи см.ниже.

11-4

Если $\frac{v_1}{V_1} = \frac{v_2}{V_2}$, то $V_1 = 18/27$ л, но $p > 10^5$ Па. Значит $p = 10^5$ Па и $V_1 = 31/28$ л. Ответ: $31/56$.

Решения некоторых задач

По просьбам участников представлены решения некоторых задач

1 Задача про спутник

3. Искусственный спутник Земли движется по круговой орбите в плоскости экватора по направлению вращения Земли. Найти отношение радиуса орбиты спутника к радиусу Земли, при котором он периодически проходит над точкой запуска ровно через двое суток. **(25 баллов)**

Рис. 1: Условие задачи 9.3

Предположим, что в некоторой точке экватора находится наблюдатель, способный видеть пролетающий над ним спутник, сколь высока ни была бы орбита спутника. Наблюдатель неподвижен относительно поверхности Земли, но совершает вместе с этой поверхностью суточное вращение вокруг центра Земли. Положение наблюдателя, как и положение спутника удобно описывать с помощью угловых координат $\varphi_n(t)$ и $\varphi_c(t)$, которые меняются с течением времени. Эти координаты заданы относительно системы отсчёта связанной с центром Земли. В начальный момент времени будем считать, что спутник пролетает ровно над наблюдателем, то есть в этот момент времени угловые координаты наблюдателя и спутника равны: $\varphi_n(0) = \varphi_c(0)$. При этом, начальное значение угловой координаты можно выбрать нулевым:

$$\varphi_n(0) = \varphi_c(0) = 0$$

Поскольку как круговое движение спутника, так и суточное вращение происходят равномерно, то есть с постоянной угловой скоростью, то зависимости от времени угловых координат линейные:

$$\varphi_n(t) = \omega_n t \quad (1)$$

$$\varphi_c(t) = \omega_c t \quad (2)$$

Если угловые скорости ω_n и ω_c разные, то с течением времени между угловыми координатами будет нарастать разность. Но разность углов равная $\pm 2\pi$ соответствует ситуации когда спутник снова оказывается над наблюдателем. Из условия ясно, что такая ситуация возникает когда проходит время t равное двум суткам, то есть:

$$t = 2 \cdot \frac{2\pi}{\omega_n} \quad (3)$$

Следовательно, получаем уравнение:

$$\begin{aligned} \varphi_c(t) - \varphi_n(t) &= \pm 2\pi \Rightarrow \\ (\omega_c - \omega_n) \frac{4\pi}{\omega_n} &= \pm 2\pi \Rightarrow \\ 2 \frac{\omega_c}{\omega_n} &= 2 \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} \omega_{c1} = \frac{3}{2}\omega_n - \text{Спутник обгоняет поверхность Земли} \\ \omega_{c2} = \frac{1}{2}\omega_n - \text{Спутник отстаёт от поверхности Земли} \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

Полученный результат говорит о том, что угловые скорости спутника и вращения имеют один знак, то есть оба вращения происходят в одну сторону. Однако, возможно два таких значения угловой скорости вращения спутника.

Значение угловой скорости кругового движения спутника и второй закон Ньютона позволяют выразить радиус орбиты спутника:

$$\omega_c^2 R = G \frac{M_3}{R^2} \Rightarrow R = \left(\frac{GM_3}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (5)$$

Используя выражение для ускорения свободного падения g вблизи Земли:

$$g = \frac{GM_3}{R_3^2} \quad (6)$$

перепишем (5) в виде:

$$R = \left(\frac{g}{\omega_c^2 R_3} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot R_3 \quad (7)$$

Откуда искомое соотношение радиусов:

$$\frac{R}{R_3} = \left(\frac{g}{\omega_c^2 R_3} \right)^{\frac{1}{3}} = \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{4g}{9\omega_n^2 R_3} \right)^{\frac{1}{3}} \\ \left(\frac{4g}{\omega_n^2 R_3} \right)^{\frac{1}{3}} \end{array} \right. \quad (8)$$

Используем общеизвестные численные значения:

- $g = 9.8 \text{ м/с}^2$
- $R_3 = 6400 \text{ км} = 6.4 \cdot 10^6 \text{ м}$
- $\omega_n = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \text{ с}^{-1} \approx 7.2722 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$
- $\frac{g}{\omega_n^2 R_3} \approx \frac{9.8}{7.2722^2 \cdot 10^{-10} \cdot 6.4 \cdot 10^6} \approx 289.54$

Итоговые результаты:

$$\frac{R}{R_3} = \left(\frac{4}{9} \cdot 289.54 \right)^{\frac{1}{3}} \approx 5 \text{ (спутник обгоняет поверхность Земли)} \quad (9)$$

$$\frac{R}{R_3} = \left(\frac{4}{1} \cdot 289.54 \right)^{\frac{1}{3}} \approx 10.5 \text{ (спутник отстаёт от поверхности Земли)} \quad (10)$$

В целом, данные результаты согласуются с высотой геостационарной орбиты, радиус которой равна примерно 42 тыс. км. Радиус обгоняющей орбиты получился примерно $5 \cdot 6.4 = 32$ тыс. км, то есть ниже геостационарной орбиты. А радиус отстающей орбиты: $10.5 \cdot 6.4 = 64.2$ тыс. км, то есть дальше геостационарной орбиты.

2 Задача про бруски и пружинку

1. На горизонтальной поверхности лежат два бруска массой m_1 и m_2 , соединенные ненапряженной пружиной. Какую наименьшую силу, направленную горизонтально, нужно приложить к бруску массой m_1 , чтобы сдвинулся и второй брусок? Коэффициент трения брусков о плоскость равен μ . (25 баллов)

Рис. 2: Условие задачи 11.1

Решение задачи будем проводить в предположении, что приложенная к бруску m_1 сила в дальнейшем сохраняет своё значение и не меняется. При воздействии малой силой на брусок m_1 он придёт в движение, но брусок m_2 может оставаться некоторое время в покое. В своём движении под действием внешней силы F брусок m_1 сжимает пружину, отчего возникает сила упругости со стороны пружины на m_1 , а также и на брусок m_2 . Брусок m_2 придёт в движение тогда, когда сила упругости со стороны пружины превысит максимально возможное значение силы трения $F_{\text{тр}2} = \mu m_2 g$. Значение силы упругости $F_{\text{упр}} = k\Delta L$, где ΔL - изменение длины пружины. Пока брусок m_2 покоится, изменение длины пружины полностью определяется положением бруска m_1 .

Воздействие с постоянной силой F на брусок m_1 приведёт его в ускоренное движение. При этом, ускорение будет уменьшаться, пока сила упругости не сравняется с $F - F_{\text{тр}1}$, после чего брусок начнёт замедляться. Это ситуация пока брусок m_2 неподвижен. При дальнейшем замедляющемся движении бруска m_1 пружина продолжает сжиматься. Если дойдя до максимального сжатия, сила упругости не превысила силу трения покоя бруска m_2 , то и в дальнейшем этот брусок будет оставаться неподвижным. Предельное сжатие пружины, которое уже может привести к сдвигу бруска m_2 :

$$\Delta L_{\text{max}} = \frac{\mu m_2 g}{k} \quad (11)$$

Это предельное сжатие равно максимальному смещению груза m_1 под действием внешней силы F_{min} , силы трения и силы упругости. Для вычисления этой величины удобно воспользоваться законом сохранения энергии. А именно: работа внешней силы уходит на работу силы трения (это потери в тепло), в потенциальную энергию сжатия пружины, и кинетическую энергию движения бруска m_1 . Но для предельного случая в момент максимального сжатия пружины брусок m_1 покоится. Тогда закон сохранения энергии принимает вид:

$$F_{\text{min}} \Delta L_{\text{max}} = \mu m_1 g \Delta L_{\text{max}} + \frac{k \Delta L_{\text{max}}^2}{2} \quad (12)$$

Откуда получается выражение для максимальной силы:

$$F_{\text{min}} = \mu m_1 g + \frac{k \Delta L_{\text{max}}}{2} = \mu m_1 g + \frac{k \frac{\mu m_2 g}{k}}{2} = \mu (m_1 + m_2/2) g \quad (13)$$

Это результат выглядит несколько неожиданным, поскольку полученная сила оказывается меньше чем значение необходимое длядвига тела с с массой равной суммарной массе двух брусков: $\mu (m_1 + m_2) g$. Однако, выражение (13) соответствует случаю когда второй брусок может лишь сдвинуться с места, но не обязательно продолжать движение всё время в дальнейшем. Для пояснения этой ситуации ниже на рисунках показаны графики зависимостей координат брусков и их скоростей от времени для нескольких значений силы.

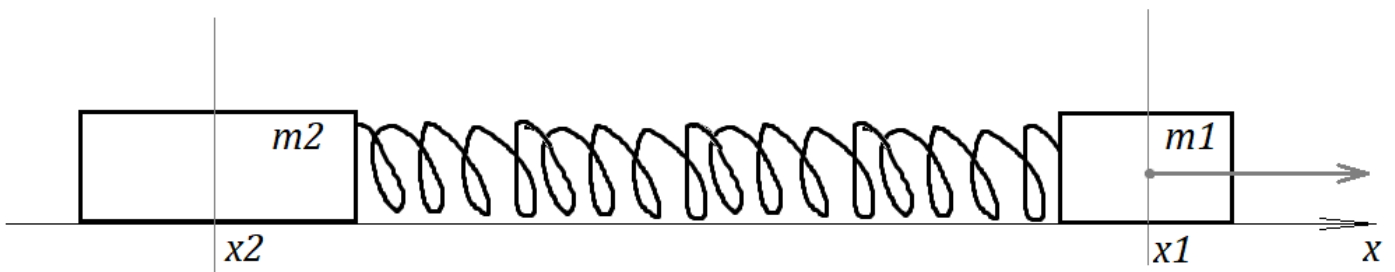


Рис. 3: Бруски в задаче 11.1

Для численного расчёта приняты следующие условия. Брусок m_1 располагается правее бруска m_2 , при этом сила F оттаскивает брусок m_1 от бруска m_2 . Значения параметров задачи используемые в численном моделировании:

$$m_1 = 1 \text{ кг}$$

$$\begin{aligned}
m_2 &= 2 \text{ кг} \\
\mu &= 1 \\
k &= 10 \text{ Н/м} \\
g &= 10 \text{ м/с}^2 \\
x_1(0) &= 0.1 \text{ м} \\
x_2(0) &= 0.0 \text{ м}
\end{aligned}$$

При таких параметрах сдвиг бруска m_2 , в соответствии с (13) должен произойти уже при силе F большей чем 20 Н. Далее приведены кинематические графики рассчитанные для разных величин силы F

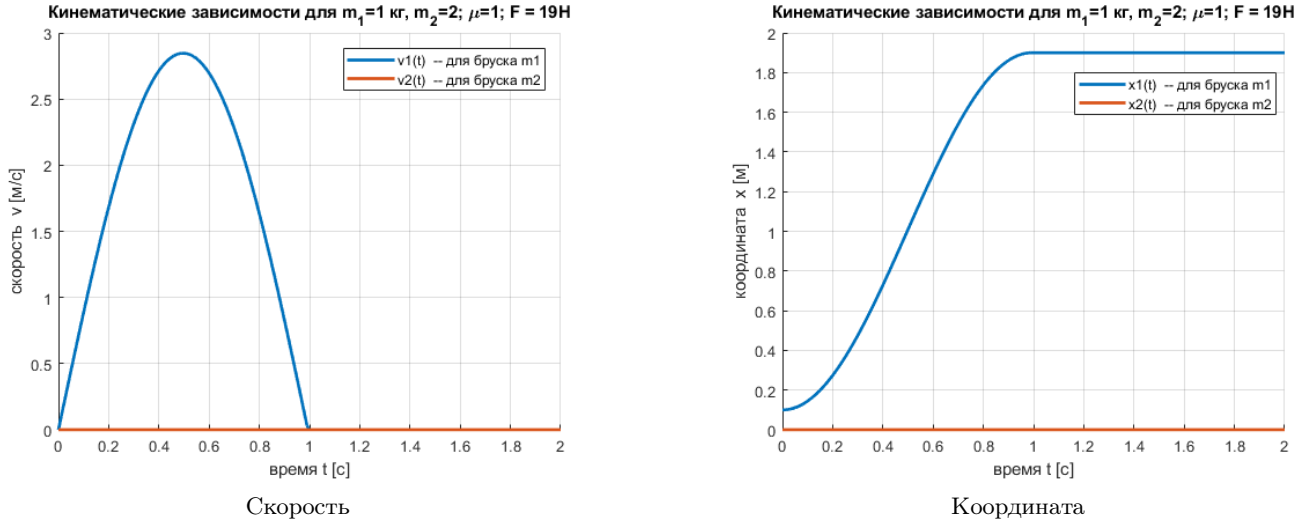


Рис. 4: Результат расчёт для силы $F = 19 \text{ Н}$.

При действии силы $F = 19 \text{ Н}$ брусок m_1 сдвигается, но затем останавливается. Брусок m_2 не сдвигается.

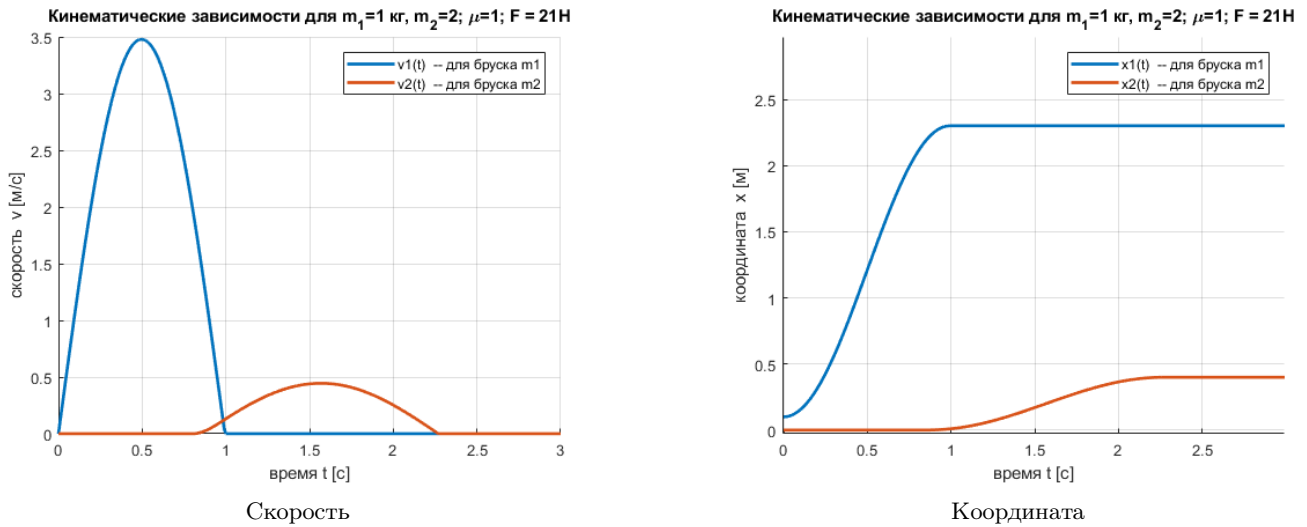


Рис. 5: Результат расчёт для силы $F = 21 \text{ Н}$.

При действии силы $F = 21 \text{ Н}$ брусок m_1 сдвигается, но затем останавливается. Брусок m_2 также сдвигается и останавливается, но приходит в движении позже. Величина смещения бруска m_2 заметно меньше, чем для бруска m_1 .

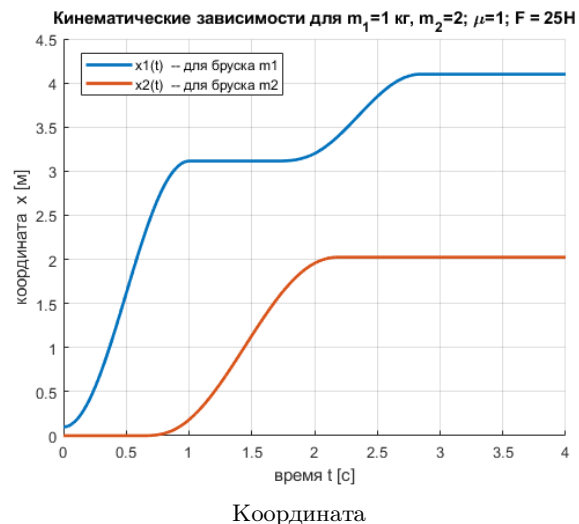
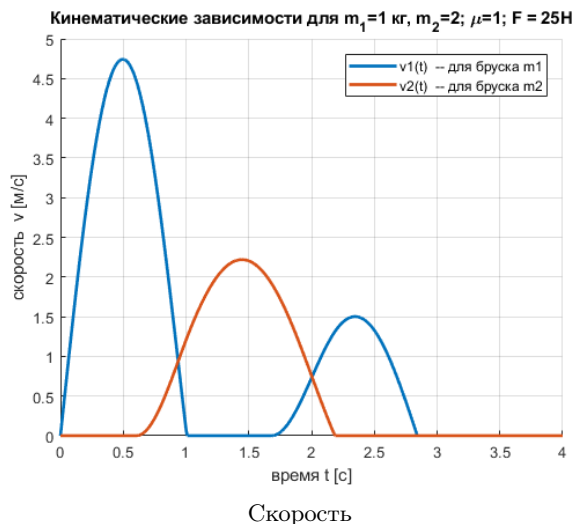


Рис. 6: Результат расчёт для силы $F = 25$ Н.

При действии силы $F = 25$ Н брусок m_1 сдвигается, но затем останавливается, а после некоторого промежутка времени ещё раз сдвигается. Брусок m_2 также сдвигается и останавливается, но приходит в движении позже. Величина смещения бруска m_2 заметно меньше, чем для бруска m_1 .

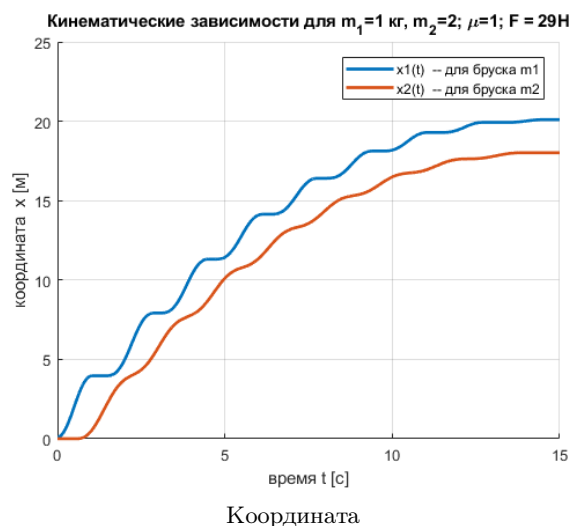
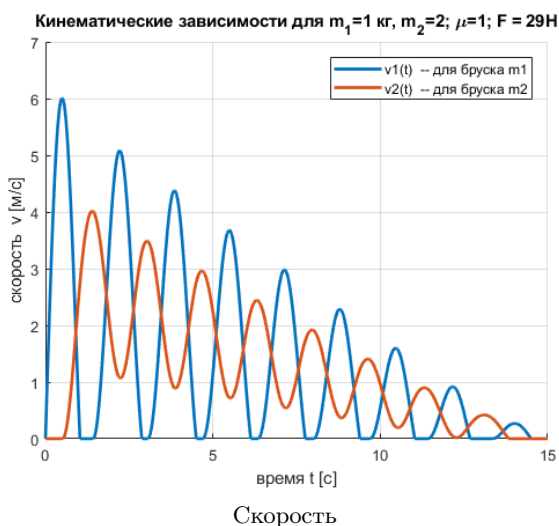


Рис. 7: Результат расчёт для силы $F = 29$ Н.

При действии силы $F = 29$ Н брусок m_1 сдвигается уже несколько раз, каждый раз на всё меньшую величину. Брусок m_2 совершает несколько колебаний, причём без промежуточных остановок. Но в конце оба бруска приходят в состояние покоя.

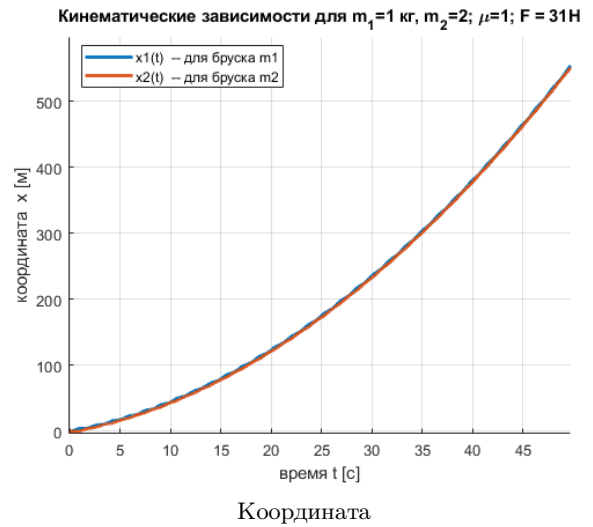
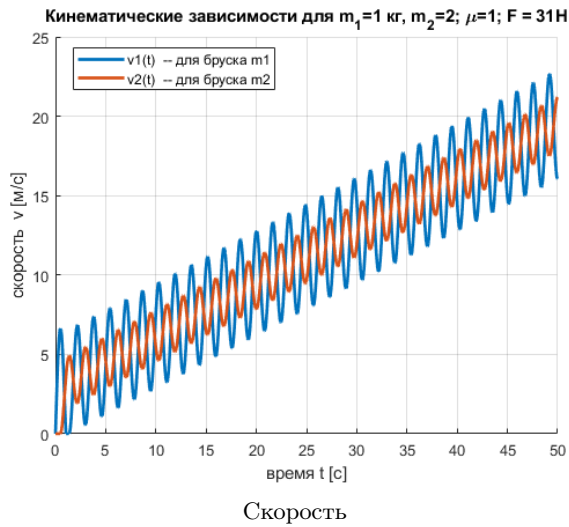


Рис. 8: Результат расчёт для силы $F = 31$ Н.

При действии силы $F = 31$ Н оба бруска приходят в движение. Центр масс системы равномерно ускоряется, а бруски совершают колебательное движение вокруг него.

Как показывают эти расчеты, при силе F большей чем $\mu(m_1+m_2/2)g$, но меньшей чем $\mu(m_1+m_2)g$ брусок m_2 может прийти в движение, однако это будут перемещения на некоторую величину, после чего система придёт в состояние покоя. И лишь при условии, что сила $F > \mu(m_1 + m_2)g$ возникает ускоренное движение всей системы.

Рассмотренное решение соответствует случаю, когда прикладываемая к бруску m_1 сила F равна своему значению сразу же в первый момент приложения. Если же рассматривать вариант, когда прикладываемая сила очень медленно, постепенно увеличивает своё значение до некоторого номинального значения, то в таком случае, брусок m_2 придёт в движение лишь при достижении силы F значения $\mu(m_1 + m_2)g$.

3 Задача про заряженную частицу в магнитном поле

3. Заряженная частица (масса m , заряд q) влетает со скоростью V_0 в однородное перпендикулярное магнитное поле с индукцией B . При этом на частицу действует сила сопротивления, пропорциональная ее скорости $F = -kv$. Найти расстояние между точкой входа частицы в поле и точкой остановки. (25 баллов)

Рис. 9: Условие задачи 11.3

Траектория движения частицы в условиях данной задачи должна иметь вид закручивающейся спирали. Действительно, в тангенциальном направлении на частицу действует только сила сопротивления заданная в условии задачи: $F_{\text{сопр}} = -k\vec{v}$. Помимо силы сопротивления на частицу действует сила Лоренца со стороны магнитного поля: $\vec{F}_L = q[\vec{v} \times \vec{B}]$, которая всё время остаётся перпендикулярно направленной по отношению к вектору скорости. Поэтому эта сила может вызывать только центростремительное ускорение, в то время как сила сопротивления приводит к изменению модуля скорости частицы.

Уравнение движение в проекции на тангенциальное направление (направление скорости) можно записать в виде:

$$m \frac{dv}{dt} = -kv \quad (14)$$

Здесь v означает величину скорости, а не вектор скорости. Решение этого уравнения сразу можно записать в виде экспоненциальной зависимости от времени, поскольку производная экспоненты есть экспонента. Решение принимает вид:

$$v(t) = V_0 \cdot e^{-\frac{k}{m}t} \quad (15)$$

Константа V_0 соответствует заданной в условии начальной скорости.

Для вращательного движения запишем уравнение для центростремительного направления:

$$m \frac{v^2}{R} = qvB \quad (16)$$

Здесь учтено, что вектор скорости и вектор магнитного поля всё время остаются перпендикулярны друг другу. При этом направление в центр кривизны траектории выбрано как положительное. R - радиус кривизны траектории. Из выражений (15) и (16) можно получить зависимость радиуса кривизны от времени:

$$R(t) = \frac{mv}{qB} = \frac{mV_0}{qB} \cdot e^{-\frac{k}{m}t} \quad (17)$$

Угловая скорость может быть определена из соотношения $v = \omega R \Rightarrow$

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{qB}{m} = \text{const} \quad (18)$$

То есть, вращение вектора скорости происходит с постоянной угловой скоростью, несмотря на то что модуль самой скорости изменяется со временем.

Рассматривая движение частицы в декартовой системе координат примем, что начальная скорость была направлена строго вдоль оси y , а исходное положение частицы располагалось в начале координат: $(0, 0)$. Магнитное поле направим от наблюдателя, в плоскость (x, y) , так что сила Лоренца на положительный заряд в начальный момент действует против оси x . Дальнейшее движение частицы представляет собой перемещение по сужающейся спирали, против часовой стрелки. Угол поворота вектора скорости будем отсчитывать от начального направления скорости, то есть от вертикали - см рисунок 10.

Приращение координат:

$$\begin{cases} dx = -v(t) \sin(\omega t) dt = -V_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t) dt \\ dy = v(t) \cos(\omega t) dt = V_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t) dt \end{cases} \quad (19)$$

где $\beta = \frac{k}{m}$, а $\omega = \frac{qB}{m}$. Здесь учтено, что угол φ поворота вектора скорости равномерно растёт во времени: $\varphi = \omega t$.

Для определения зависимостей координат от времени нужно проинтегрировать правые части этих выражений. Рассмотрим производную функции $f(t) = e^{-\beta t}(a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t))$:

$$\begin{aligned} f'(t) &= -\beta e^{-\beta t}(a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)) + \omega e^{-\beta t}(-a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)) = \\ &= e^{-\beta t} \cos(\omega t)(-a\beta + b\omega) - e^{-\beta t} \sin(\omega t)(b\beta + a\omega) \end{aligned} \quad (20)$$

Это выражение позволяет найти интегралы для обеих проекций движения. Для x -координаты должно быть выполнено условие $a\beta = b\omega$, чтобы $f(t)$ с точностью до константы совпадало с $x(t)$, и аналогично, требуется $b\beta + a\omega = 0$, чтобы $f(t)$ с точностью до константы совпадало с $y(t)$.

Итак:

$$\begin{aligned} \text{для } x(t): \quad b &= a \frac{\beta}{\omega} & -(a\omega + b\beta) &= -a(\omega + \frac{\beta^2}{\omega}) = -V_0 \Rightarrow & a &= V_0 \frac{\omega}{\beta^2 + \omega^2} & b &= V_0 \frac{\beta}{\beta^2 + \omega^2} \\ \text{для } y(t): \quad b &= -a \frac{\omega}{\beta} & -a\beta + b\omega &= -a(\beta + \frac{\omega^2}{\beta}) = V_0 \Rightarrow & a &= -V_0 \frac{\beta}{\beta^2 + \omega^2} & b &= V_0 \frac{\omega}{\beta^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (21)$$

В итоге получаем следующие выражения для координат:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{V_0}{\omega^2 + \beta^2} (\omega \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)) e^{-\beta t} + C_x \\ y(t) &= \frac{V_0}{\omega^2 + \beta^2} (-\beta \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t)) e^{-\beta t} + C_y \end{aligned} \quad (22)$$

В соответствии с начальным условием $y(0) = 0$ получается, что $C_y = \frac{V_0 \beta}{\omega^2 + \beta^2}$, а для координаты $x(0) = 0$: $C_x = \frac{-V_0 \omega}{\omega^2 + \beta^2}$, и в конце движения частица останавливается в точке с координатами (C_x, C_y) .

Из этого следует, что расстояние между начальной точкой движения и конечной равно $S = \sqrt{C_x^2 + C_y^2}$. Подставляя выражения для β и ω получаем ответ:

$$S = \sqrt{\left(\frac{V_0 \omega}{\omega^2 + \beta^2}\right)^2 + \left(\frac{V_0 \beta}{\omega^2 + \beta^2}\right)^2} = V_0 \sqrt{\frac{\omega^2 + \beta^2}{(\omega^2 + \beta^2)^2}} = \frac{V_0}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = \frac{mV_0}{\sqrt{k^2 + (qB)^2}} \quad (23)$$



Рис. 10: Характерный вид спиральной траектории частицы в магнитном поле и при воздействии на неё вязкого трения

На рисунке 10 показан вид траектории частиц, полученный в результате численного интегрирования уравнения движения. Вид траектории совпадает с результатом аналитических выражений (22)