

## ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ И РАЗБАЛЛОВКИ

**Внимание:** квант оценки равен 5 (можно ставить только 0, 5, 10, 15 и т. д. баллов)!

## 11 класс

1. (30 баллов) Брошенное в момент  $t = 0$  под углом к горизонту тело оказалось на одной высоте в моменты  $t_1$  и  $t_2$ , и за время  $t_2 - t_1$  вектор скорости тела повернулся на  $90^\circ$ . Найти начальную скорость тела. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

**Ответ.** Начальная скорость равна  $g\sqrt{(t_1^2 + t_2^2)/2}$ .

**Решение.** Обозначив угол броска через  $\alpha$ , начальную скорость через  $V_0$  и ускорение свободного падения через  $g$ , запишем горизонтальную ( $x$ ) и вертикальную ( $y$ ) компоненты скорости тела как

$$V_x = V_0 \cos \alpha, \quad V_y = V_0 \sin \alpha - gt.$$

Поскольку тело в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  находилось на одной высоте, его  $y$ -компоненты скорости  $V_y(t_1)$  и  $V_y(t_2)$  отличались только знаком. При одинаковой  $x$ -компоненте это означает, что векторы скорости были направлены симметрично (под равными углами вверх и вниз) к горизонту. Из условия поворота вектора скорости на  $90^\circ$  можно понять, что в момент  $t_1$  вектор скорости был направлен под углом  $+45^\circ$  к горизонту, т.е. выполнялось соотношение  $V_y(t_1) = V_x$ , а в момент  $t_2$  – под углом  $-45^\circ$ , т.е. выполнялось соотношение  $V_y(t_2) = -V_x$ . Из данных соотношений следуют уравнения

$$V_0 \sin \alpha - gt_1 = V_0 \cos \alpha, \quad V_0 \sin \alpha - gt_2 = -V_0 \cos \alpha.$$

Удобно сложить эти уравнения и вычесть одно из другого. Тогда получим

$$2V_0 \sin \alpha = g(t_1 + t_2), \quad 2V_0 \cos \alpha = g(t_2 - t_1).$$

Возводя эти формулы в квадрат, складывая и используя тождество  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , окончательно находим

$$V_0 = g \sqrt{\frac{t_1^2 + t_2^2}{2}}.$$

**Разбалловка.** Записаны общие формулы для компонент скорости – 5 баллов.

Поняты направления векторов скорости – 5 баллов.

Составлена система уравнений связи  $V_0$  и  $\alpha$  – по 5 баллов за уравнение.

Найдена начальная скорость – 10 баллов.

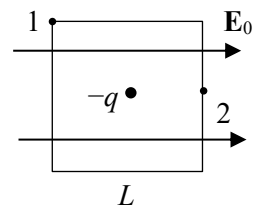
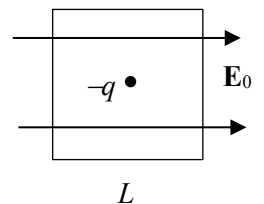
2. (30 баллов) Точечный заряд  $-q$  находится в однородном поле напряженностью  $E_0$  в центре квадрата, сторона которого равна  $L$  и две стороны которого параллельны  $E_0$  (см. рис.). Найти максимальную разность потенциалов между точками на сторонах квадрата.

**Ответ.** Максимальная разность потенциалов равна  $\frac{(\sqrt{2}-1)q}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 L} + E_0 L$ , где  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная.

**Решение.** Согласно принципу суперпозиции разность потенциалов между точками можно находить как сумму вкладов от точечного заряда и поля  $E_0$ . Вклад в разность потенциалов от (отрицательного) точечного заряда максимален, если одна точка расположена наиболее далеко от заряда (вершина квадрата), а другая – наиболее близко к заряду (середина стороны квадрата). Вклад от однородного поля максимален, если одна точка находится на левой стороне квадрата, а другая – на правой. Приходим к выводу, что разность потенциалов максимальна между любой из левых вершин квадрата и серединой его правой стороны (две точки 1 и 2 указаны на рисунке).

Используя формулу для потенциала точечного заряда

$$\varphi = \frac{k(-q)}{r},$$



где  $r$  – расстояние от заряда,  $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$  и  $\epsilon_0$  – электрическая постоянная, запишем разность потенциалов между точками 1 и 2 как

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\frac{kq}{L/\sqrt{2}} + \frac{kq}{L/2} + E_0L = \frac{k(2 - \sqrt{2})q}{L} + E_0L = \frac{(\sqrt{2} - 1)q}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0L} + E_0L.$$

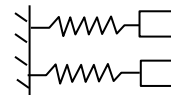
**Разбалловка.** Понято расположение точек – 10 баллов.

Найден вклад в разность потенциалов от точечного заряда – 10 баллов.

Найден вклад от однородного поля – 5 баллов.

Получен ответ – 5 баллов.

**3. (40 баллов)** Два груза равной массы  $m$  находятся на гладком горизонтальном столе и прикреплены к стене недеформированными пружинами равной жесткости  $k$  (см. рис.). Смещая грузы вдоль стола от стены, каждую из пружин растягивают на длину  $L$ , затем один из грузов освобождают, а когда он смещается на  $L/2$ , освобождают и второй. Через какое время после освобождения первого груза суммарная энергия упругой деформации двух пружин достигнет максимального значения в первый раз? Чему равно это значение? Колебания считать гармоническими.



**Ответ.** Максимальная суммарная энергия упругой деформации достигается через время  $\frac{7\pi}{6} \sqrt{\frac{m}{k}}$  и равна  $3kL^2/4$ .

**Решение.** Направим ось  $x$  от стены, выбрав за нуль положение грузов при недеформированных пружинах. Зависимость от времени координаты первого груза можно записать в виде

$$x_1 = L \cos \omega t,$$

где  $\omega = \sqrt{k/m}$  – угловая частота колебаний. После освобождения груза он начинает двигаться к стене, и после смещении на  $L/2$  его координата принимает значение  $x_1 = L/2$ , т.е.  $L \cos \omega t = L/2$ . Отсюда находим, что  $\omega t = \pi/3$ . Поскольку второй груз освобождают в этот момент, зависимость от времени его координаты можно записать в виде

$$x_2 = L \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{3} \right),$$

где  $\omega$  – та же самая, что у первого груза, в силу равенства масс грузов и жесткостей пружин.

Суммарную энергию упругой деформации двух пружин запишем в виде

$$W = \frac{kx_1^2}{2} + \frac{kx_2^2}{2} = \frac{kL^2}{2} \left[ \cos^2 \omega t + \cos^2 \left( \omega t - \frac{\pi}{3} \right) \right].$$

Переходя к косинусам удвоенных аргументов, получаем

$$W = \frac{kL^2}{4} \left[ 2 + \cos 2\omega t + \cos \left( 2\omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \right].$$

Используя формулу для суммы косинусов, получаем удобное для анализа выражение

$$W = \frac{kL^2}{2} \left[ 1 + \cos \frac{\pi}{3} \cos \left( 2\omega t - \frac{\pi}{3} \right) \right].$$

Максимальное значение достигается при  $\cos \left( 2\omega t - \frac{\pi}{3} \right) = 1$  и равно

$$W_{\max} = \frac{3kL^2}{4}.$$

Значение  $\cos \left( 2\omega t - \frac{\pi}{3} \right) = 1$  в первый раз достигается при  $2\omega t - \frac{\pi}{3} = 2\pi$ , т.е. в момент времени

$$t = \frac{7\pi}{6\omega} = \frac{7\pi}{6} \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

**Разбалловка.** Записана зависимость от времени координаты первого груза – 5 баллов.

Записана зависимость от времени координаты второго груза – 10 баллов.

Составлено выражение для суммарной упругой энергии – 5 баллов.

Выражение преобразовано к удобному для анализа виду – 10 баллов.

Найдена максимальная энергия – 5 баллов.

Найдено время – 5 баллов.

# 10 класс

1. (30 баллов) Брошенное в момент  $t = 0$  под углом к горизонту тело оказалось на одной высоте в моменты  $t_1$  и  $t_2$ , и за время  $t_2 - t_1$  вектор скорости тела повернулся на  $90^\circ$ . Найти начальную скорость тела. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

**Ответ.** Начальная скорость равна  $g\sqrt{(t_1^2 + t_2^2)/2}$ .

**Решение.** Обозначив угол броска через  $\alpha$ , начальную скорость через  $V_0$  и ускорение свободного падения через  $g$ , запишем горизонтальную ( $x$ ) и вертикальную ( $y$ ) компоненты скорости тела как

$$V_x = V_0 \cos \alpha, \quad V_y = V_0 \sin \alpha - gt.$$

Поскольку тело в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  находилось на одной высоте, его  $y$ -компоненты скорости  $V_y(t_1)$  и  $V_y(t_2)$  отличались только знаком. При одинаковой  $x$ -компоненте это означает, что векторы скорости были направлены симметрично (под равными углами вверх и вниз) к горизонту. Из условия поворота вектора скорости на  $90^\circ$  можно понять, что в момент  $t_1$  вектор скорости был направлен под углом  $+45^\circ$  к горизонту, т.е. выполнялось соотношение  $V_y(t_1) = V_x$ , а в момент  $t_2$  – под углом  $-45^\circ$ , т.е. выполнялось соотношение  $V_y(t_2) = -V_x$ . Из данных соотношений следуют уравнения

$$V_0 \sin \alpha - gt_1 = V_0 \cos \alpha, \quad V_0 \sin \alpha - gt_2 = -V_0 \cos \alpha.$$

Удобно сложить эти уравнения и вычесть одно из другого. Тогда получим

$$2V_0 \sin \alpha = g(t_1 + t_2), \quad 2V_0 \cos \alpha = g(t_2 - t_1).$$

Возводя эти формулы в квадрат, складывая и используя тождество  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , окончательно находим

$$V_0 = g \sqrt{\frac{t_1^2 + t_2^2}{2}}.$$

**Разбалловка.** Записаны общие формулы для компонент скорости – 5 баллов.

Поняты направления векторов скорости – 5 баллов.

Составлена система уравнений связи  $V_0$  и  $\alpha$  – по 5 баллов за уравнение.

Найдена начальная скорость – 10 баллов.

2. (30 баллов) Прикрепленный нитью длины  $L$  к потолку шарик совершает вращательное движение в горизонтальной плоскости (см. рис.). Считая, что потенциальная энергия шарика в поле тяжести равна нулю на уровне точки подвеса, найти скорость движения шарика, при которой его механическая энергия равна нулю. Ускорение свободного падения равно  $g$ .

**Ответ.** Скорость шарика равна  $\sqrt{2gL}/\sqrt[4]{3}$ .

**Решение.** Обозначив угол между нитью и вертикалью через  $\alpha$ , запишем равенство вертикальной компоненты силы натяжения нити  $T$  силе тяжести  $mg$  ( $m$  – масса тела,  $g$  – ускорение свободного падения):

$$T \cos \alpha = mg.$$

Обозначив скорость шарика через  $V$ , запишем второй закон Ньютона для движущегося по окружности (радиуса  $L \sin \alpha$ ) шарика в проекции на направление к центру окружности

$$\frac{mV^2}{L \sin \alpha} = T \sin \alpha$$

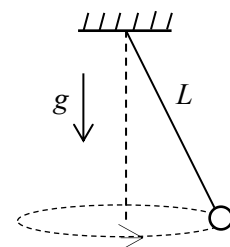
и условие равенства нулю механической энергии шарика

$$\frac{mV^2}{2} - mgL \cos \alpha = 0.$$

Выразим из последнего уравнения  $\cos \alpha$ :

$$\cos \alpha = \frac{V^2}{2gL},$$

а из первых двух исключим силу  $T$  и получим



$$\frac{V^2}{gL} \cos \alpha = \sin^2 \alpha.$$

Исключая угол  $\alpha$  из двух последних уравнений, находим скорость шарика:

$$V = \frac{\sqrt{2gL}}{\sqrt[4]{3}}.$$

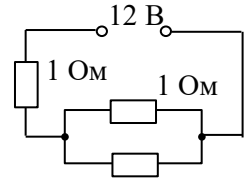
**Разбалловка.** Записан баланс сил в вертикальном направлении – 5 баллов.

Записан второй закон Ньютона в проекции на центростремительное направление – 10 баллов.

Записано условие равенства нулю механической энергии – 10 баллов.

Найдена скорость шарика – 5 баллов.

**3. (40 баллов)** К источнику напряжением 12 В подключена цепь, в которой два резистора имеют сопротивление 1 Ом (см. рис.). Сопротивление третьего резистора подбирают так, чтобы на нем выделялась максимальная тепловая мощность. Чему равна эта мощность?



**Ответ.** 18 Вт.

**Решение.** Обозначим напряжение источника (12 В) через  $U$ , неизвестное сопротивление через  $R$  и запишем полный ток в цепи  $I_0$  как

$$I_0 = \frac{U}{1 + R/(R + 1)},$$

где  $R/(R + 1)$  – сопротивление параллельно соединенных резисторов. Ток  $I_R$  через резистор с сопротивлением  $R$  можно найти из условия  $I_R R = I_0 R/(R + 1)$  и записать как

$$I_R = \frac{I_0}{R + 1} = \frac{U}{2R + 1}.$$

Выделяемая на резисторе  $R$  мощность  $P$  равна

$$P = I_R^2 R = \frac{U^2 R}{(2R + 1)^2}.$$

Чтобы исследовать полученное выражение на максимум, приведем его к виду

$$P = \frac{U^2}{2(\sqrt{2R} + 1/\sqrt{2R})^2}.$$

Минимальное значение суммы взаимнообратных величин в знаменателе достигается при  $\sqrt{2R} = 1$ . При этом  $P$  имеет максимальное значение

$$P = \frac{U^2}{8} = \frac{144}{8} = 18 \text{ Вт.}$$

**Разбалловка.** Записан полный ток в цепи – 10 баллов.

Записан ток через резистор  $R$  – 10 баллов.

Мощность представлена как функция одной переменной  $R$  – 10 баллов.

Проведен анализ функции на максимум и получен ответ – 10 баллов.

## 9 класс

**1. (30 баллов)** Из неплотно закрытого крана, находящегося на высоте  $h$  над горизонтальной поверхностью, капает вода. Интервал времени  $T$  между отрывом от крана двух последовательных капель не превосходит времени полета капли от крана до поверхности. При каком значении  $T$  максимальное расстояние между двумя последовательно падающими каплями будет равно  $h/2$ ? Ускорение свободного падения равно  $g$ .

**Ответ.** При  $T = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{h/g}$ .

**Решение.** В момент отрыва (с нулевой начальной скоростью) второй капли от крана первая капля находится на расстоянии  $gT^2/2$  ниже крана и имеет скорость  $gT$ . Поскольку далее обе капли падают с одинаковым ускорением, их относительная скорость не меняется – первая капля удаляется от второй со скоростью  $gT$  пока

не упадет на горизонтальную поверхность. Таким образом, расстояние между каплями становится максимальным в момент, когда первая капля достигает поверхности. По условию задачи к этому моменту вторая капля должна пролететь расстояние  $h/2$ , что дает соотношение

$$\frac{g(t_{\text{пад}} - T)^2}{2} = \frac{h}{2},$$

где  $t_{\text{пад}}$  – время падения капли от крана до поверхности. Извлекая квадратный корень и учитывая, что  $t_{\text{пад}} > T$ , получаем

$$t_{\text{пад}} - T = \sqrt{h/g}.$$

Подставляя в полученную формулу  $t_{\text{пад}} = \sqrt{2h/g}$ , находим

$$T = (\sqrt{2} - 1)\sqrt{h/g}.$$

**Разбалловка:** Понято, что расстояние максимально в момент достижения первой каплей поверхности – 10 баллов.  
Записано уравнение для нахождения  $T$  – 10 баллов.  
Найдено искомое время  $T$  – 10 баллов.

**2. (30 баллов)** Один шар массой  $m$  равномерно всплывает в вязкой жидкости, а второй, имеющий равный с ним радиус и массу  $3m$ , равномерно погружается в этой жидкости с той же скоростью. Чему будет равна сила натяжения нити, если ей связать эти шары и поместить их в ту же жидкость? Ускорение свободного падения равно  $g$ .

**Ответ.** Сила натяжения нити будет равна  $mg$ .

**Решение.** При равномерном всплытии шара массой  $m$  действующая на него сила Архимеда  $F_A$  уравновешена суммой сил тяжести  $mg$  и сопротивления  $F_c$ :

$$F_A = mg + F_c.$$

При равномерном погружении шара массой  $3m$  баланс сил имеет вид

$$3mg = F_A + F_c.$$

Здесь учтено, что действующие на шары силы Архимеда равны вследствие равенства их радиусов, а силы сопротивления равны из-за равенства радиусов и скоростей всплытия и погружения.

Из записанных соотношений находим, что

$$F_A = 2mg.$$

Поскольку сумма действующих на шары сил Архимеда  $2F_A$  равна сумме сил тяжести  $4mg$ , то связанные нитью шары будут иметь нулевую плавучесть, т.е. будут неподвижно плавать в объеме жидкости в положении с вертикальной (натянутой) нитью, шаром меньшей массы вверх и шаром большей массы вниз. (Указанное состояние устанавливается независимо от того, как именно связанные шары поместили в жидкость.) Записывая условие плавания любого из шаров, например, верхнего в виде

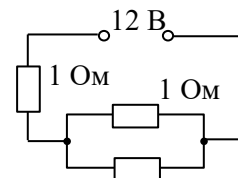
$$F_A = mg + T,$$

где  $T$  – сила натяжения нити, получаем

$$T = mg.$$

**Разбалловка.** Записан баланс сил для всплывающего шара – 5 баллов.  
Записан баланс сил для погружающегося шара – 5 баллов.  
Найдена сила Архимеда – 5 баллов.  
Сделан вывод о балансе суммарных сил – 5 баллов.  
Понято состояние связанных шаров – 5 баллов.  
Найдена сила натяжения нити – 5 баллов.

**3. (40 баллов)** К источнику напряжением 12 В подключена цепь, в которой два резистора имеют сопротивление 1 Ом (см. рис.). Сопротивление третьего резистора подбирают так, чтобы на нем выделялась максимальная тепловая мощность. Чему равна эта мощность?



**Ответ.** 18 Вт.

**Решение.** Обозначим напряжение источника (12 В) через  $U$ , неизвестное сопротивление через  $R$  и запишем полный ток в цепи  $I_0$  как

$$I_0 = \frac{U}{1 + R/(R+1)},$$

где  $R/(R+1)$  – сопротивление параллельно соединенных резисторов. Ток  $I_R$  через резистор с сопротивлением  $R$  можно найти из условия  $I_R R = I_0 R/(R+1)$  и записать как

$$I_R = \frac{I_0}{R+1} = \frac{U}{2R+1}.$$

Выделяемая на резисторе  $R$  мощность  $P$  равна

$$P = I_R^2 R = \frac{U^2 R}{(2R+1)^2}.$$

Чтобы исследовать полученное выражение на максимум, приведем его к виду

$$P = \frac{U^2}{2(\sqrt{2R} + 1/\sqrt{2R})^2}.$$

Минимальное значение суммы взаимнообратных величин в знаменателе достигается при  $\sqrt{2R} = 1$ . При этом  $P$  имеет максимальное значение

$$P = \frac{U^2}{8} = \frac{144}{8} = 18 \text{ Вт.}$$

**Разбалловка.** Записан полный ток в цепи – 10 баллов.

Записан ток через резистор  $R$  – 10 баллов.

Мощность представлена как функция одной переменной  $R$  – 10 баллов.

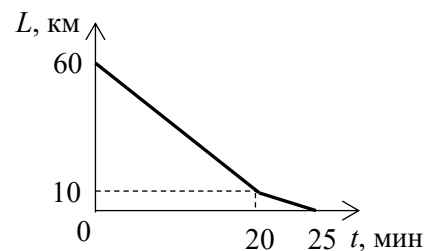
Проведен анализ функции на максимум и получен ответ – 10 баллов.

## 8 класс

1. (30 баллов) Прямолинейное шоссе между двумя пунктами имеет два участка равной длины 30 км. Разрешенная скорость составляет 90 км/час на одном участке и 60 км/час на другом. Два автомобиля одновременно выезжают из пунктов навстречу друг другу и в течение всего времени движения поддерживают максимальные разрешенные скорости. Нарисовать график зависимости расстояния между автомобилями от времени от начала движения до момента встречи.

**Ответ.** См. рисунок.

**Решение.** Пока ни один из автомобилей не достиг границы двух участков, их скорость сближения постоянна и составляет  $90 + 60 = 150$  км/ч. При этом расстояние между автомобилями уменьшается равномерно со временем от начального значения 60 км. Через время  $30 \text{ км} : 90 \text{ км/ч} = 1/3 \text{ ч} = 20 \text{ мин}$  автомобиль, двигающийся со скоростью 90 км/ч, достигнет границы. За это время расстояние между автомобилями сократится до  $60 - 150 \cdot 1/3 = 10$  км. После того как достигший границы автомобиль начнет двигаться со скоростью 60 км/ч, скорость сближения упадет до 120 км/час. От этого момента до встречи пройдет время  $10 \text{ км} : 120 \text{ км/ч} = 1/12 \text{ ч} = 5 \text{ мин}$ . По рассчитанным данным строим график зависимости расстояния  $L$  от времени  $t$ .



**Разбалловка.** Найдено время достижения границы автомобилем – 5 баллов.

Найдено расстояние между автомобилями в этот момент – 10 баллов.

Найдено время до встречи – 5 баллов.

Построен график – 10 баллов.

2. (30 баллов) Пять тел, удельные теплоемкости которых одинаковы и массы которых относятся как 1:2:3:4:5, имеют температуры, равные соответственно  $5t_0$ ,  $5t_0/2$ ,  $5t_0/3$ ,  $5t_0/4$ ,  $t_0$ . Какая установится температура, если тела привести в тепловой контакт?

**Ответ.** Установившаяся температура равна  $\frac{5}{3}t_0$ .

**Решение.** Поскольку заранее точно не известно, какие именно тела отдают тепло, а какие получают, то уравнение теплового баланса запишем в виде

$$Cm(5t_0 - \Theta) + 2Cm\left(\frac{5t_0}{2} - \Theta\right) + 3Cm\left(\frac{5t_0}{3} - \Theta\right) + 4Cm\left(\frac{5t_0}{4} - \Theta\right) + 5Cm(t_0 - \Theta) = 0,$$

где  $C$  – удельная теплоемкость,  $m$  – масса самого легкого из тел,  $\Theta$  – конечная температура тел. Из записанного уравнения находим, что

$$\Theta = \frac{5}{3}t_0.$$

Также ответ можно получить, рассматривая последовательное приведение тел в тепловой контакт.

**Разбалловка.** Записано общее уравнение (или несколько последовательных уравнений) теплового баланса – 20 баллов.  
Получен правильный ответ – 10 баллов.

**3. (40 баллов)** Один шар массой  $m$  равномерно всплывает в вязкой жидкости, а второй, имеющий равный с ним радиус и массу  $3m$ , равномерно погружается в этой жидкости с той же скоростью. Чему будет равна сила натяжения нити, если ей связать эти шары и поместить их в ту же жидкость? Ускорение свободного падения равно  $g$ .

**Ответ.** Сила натяжения нити будет равна  $mg$ .

**Решение.** При равномерном всплытии шара массой  $m$  действующая на него сила Архимеда  $F_A$  уравновешена суммой сил тяжести  $mg$  и сопротивления  $F_c$ :

$$F_A = mg + F_c.$$

При равномерном погружении шара массой  $3m$  баланс сил имеет вид

$$3mg = F_A + F_c.$$

Здесь учтено, что действующие на шары силы Архимеда равны вследствие равенства их радиусов, а силы сопротивления равны из-за равенства радиусов и скоростей всплытия и погружения.

Из записанных соотношений находим, что

$$F_A = 2mg.$$

Поскольку сумма действующих на шары сил Архимеда  $2F_A$  равна сумме сил тяжести  $4mg$ , то связанные нитью шары будут иметь нулевую плавучесть, т.е. будут неподвижно плавать в объеме жидкости в положении с вертикальной (натянутой) нитью, шаром меньшей массы вверх и шаром большей массы вниз. (Данное состояние будет устанавливаться независимо от того, как именно связанные шары поместили в жидкость.) Записывая условие плавания любого из шаров, например, верхнего в виде

$$F_A = mg + T,$$

где  $T$  – сила натяжения нити, получаем

$$T = mg.$$

**Разбалловка.** Записан баланс сил для всплывающего шара – 5 баллов.  
Записан баланс сил для погружающегося шара – 5 баллов.  
Найдена сила Архимеда – 10 баллов.  
Сделан вывод о балансе суммарных сил – 5 баллов.  
Понято состояние связанных шаров – 5 баллов.  
Найдена сила натяжения нити – 10 баллов.

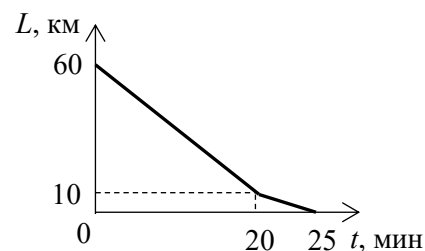
## 7 класс

**1. (30 баллов)** Прямолинейное шоссе между двумя пунктами имеет два участка равной длины 30 км. Разрешенная скорость составляет 90 км/час на одном участке и 60 км/час на другом. Два автомобиля

одновременно выезжают из пунктов навстречу друг другу и в течение всего времени движения поддерживают максимальные разрешенные скорости. Нарисовать график зависимости расстояния между автомобилями от времени от начала движения до момента встречи.

**Ответ.** См. рисунок.

**Решение.** Пока ни один из автомобилей не достиг границы двух участков, их скорость сближения постоянна и составляет  $90 + 60 = 150$  км/ч. При этом расстояние между автомобилями уменьшается равномерно со временем от начального значения 60 км. Через время  $30 \text{ км} : 90 \text{ км/ч} = 1/3 \text{ ч} = 20$  мин автомобиль, двигающийся со скоростью 90 км/ч, достигнет границы. За это время расстояние между автомобилями сократится до  $60 - 150 \cdot 1/3 = 10$  км. После того как достигший границы автомобиль начнет двигаться со скоростью 60 км/ч, скорость сближения упадет до 120 км/ч. От этого момента до встречи пройдет время  $10 \text{ км} : 120 \text{ км/ч} = 1/12 \text{ ч} = 5$  мин. По рассчитанным данным строим график зависимости расстояния  $L$  от времени  $t$ .



**Разбалловка.** Найдено время достижения границы автомобилем – 5 баллов.

Найдено расстояние между автомобилями в этот момент – 10 баллов.

Найдено время до встречи – 5 баллов.

Построен график – 10 баллов.

**2. (30 баллов)** В сосуде находится 1 л воды и лед массой 1 кг. Во сколько раз изменится средняя плотность содержимого сосуда после таяния 80% льда? Плотность льда  $900 \text{ кг/м}^3$ , плотность воды  $1000 \text{ кг/м}^3$ .

**Ответ.** Средняя плотность увеличится в  $95/91$  раз.

**Решение.** Средняя плотность содержимого равна отношению массы содержимого к его объему. Поскольку масса содержимого при таянии льда не меняется, отношение средних плотностей равно обратному отношению объемов:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{1/1000 + 1/900}{1,8/1000 + 0,2/900} = \frac{1 + 10/9}{1,8 + 2/9} = \frac{190}{182} = \frac{95}{91}.$$

**Разбалловка.** Указано, что средняя плотность равна отношению массы к объему – 5 баллов.

Записан объем содержимого до таяния льда – 10 баллов.

Записан объем содержимого после таяния льда – 10 баллов.

Найдено отношение средних плотностей – 5 баллов.

**3. (40 баллов)** Два сосуда равного объема заполнены разными газами: один – кислородом, другой азотом. Число молекул газов в сосудах одинаково. Сосуды соединяют трубкой. Во сколько раз изменится масса содержимого сосуда, в котором первоначально находился кислород, после завершения процесса диффузии газов? Масса молекулы кислорода в  $8/7$  раз больше массы молекулы азота. Масса газа в соединительной трубке пренебрежимо мала.

**Ответ.** Масса составит  $15/16$  от первоначальной.

**Решение.** Обозначим число молекул каждого газа через  $N$ , а массы молекул кислорода и азота через  $m_K$  и  $m_A$ . Тогда массу содержимого сосуда с кислородом до соединения сосудов трубкой можно записать как  $m_K N$ . После соединения сосудов и завершения процесса диффузии молекулы каждого газа равномерно распределятся по двум сосудам, т.е. в каждом сосуде будет по половине молекул каждого газа. Тогда массу содержимого в интересующем нас сосуде можно записать как  $m_A N/2 + m_K N/2$ . Искомое отношение находим как

$$\frac{m_A N/2 + m_K N/2}{m_K N} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{m_A}{m_K} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{7}{8} \right) = \frac{15}{16}.$$

**Разбалловка.** Понято, что молекулы равномерно заполняют сосуды – 15 баллов.

Записана масса содержимого сосуда с кислородом до соединения – 5 баллов.

Записана масса содержимого этого сосуда после установления равновесия – 10 баллов.

Получен ответ – 10 баллов.