МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
“БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ – БУДУЩЕЕ НАУКИ”
2024/25 УЧЕЬНЫЙ ГОД
МАТЕМАТИКА
ФИНАЛЬНЫЙ ТУР
11 КЛАСС. Ответы и решения

1. [20 баллов] Парабола $y = 2x^2$ пересекает прямые $y = 98$, $y = 18$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить треугольник с углом $120°$?

   Ответ: $a = 50$ или $a = 158$.

   Решение. Находим координаты точек пересечения параболы с каждой из данных прямых (рассматриваем только случай $a > 0$, т.к. иначе третья прямая не высекает отрезка на параболе):

   $$\begin{cases} y = 2x^2, \\ y = 98 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 7, \\ y = 98; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x^2, \\ y = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3, \\ y = 18; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2x^2, \\ y = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{a}{2}}, \\ y = a. \end{cases}$$

   Тогда длины высеченных отрезков равны 14, 6 и $\sqrt{2a}$. Угол $120°$ может лежать только напротив большей стороны треугольника, так что возможны два случая.

   1) Угол $120°$ лежит напротив стороны, равной $\sqrt{2a}$. Тогда по теореме косинусов получаем $2a = 196 + 36 - 2 \cdot 14 \cdot 6 \cdot \cos 120°$, откуда $a = 158$.

   2) Угол $120°$ лежит напротив стороны, равной 14. Тогда по теореме косинусов получаем $196 = 2a + 36 - 2 \cdot \sqrt{2a} \cdot 6 \cdot \cos 120°$, откуда $a + 3\sqrt{2}\sqrt{a} - 80 = 0$, $\sqrt{a} = 5\sqrt{2}$ или $\sqrt{a} = -8\sqrt{2}$, следовательно, $a = 50$.

2. [15 баллов] Решите уравнение $\sin 3x \cos x = \sin 5x \cos 3x$.

   Ответ: $x = \frac{\pi k}{4}$, $x = \pm\frac{\pi}{12} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

   Решение. Данное уравнение равносильно каждому из следующих:

   $$\sin 4x + \sin 2x = \sin 8x + \sin 2x, \ \sin 4x = 2\sin 4x \cos 4x, \ \sin 4x(2\cos 4x - 1) = 0.$$

   Отсюда $\sin 4x = 0$ или $\cos 4x = \frac{1}{2}$. Значит, $x = \frac{\pi k}{4}$ или $x = \pm\frac{\pi}{12} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. [20 баллов] От пристани оторвалась баржа и поплыла вниз по течению, скорость которого равна x км/ч (скорость баржи равна скорости течения). Когда баржа проплыла 3 км, от пристани вдогонку за ней отплыл катер со скоростью на 9 км/ч большей скорости течения. Катер догнал баржу и отбуксировал её назад на пристань со скоростью 4 км/ч (относительно берегов).

   а) Через какое время после отрыва баржа была возвращена на пристань? (Выразите это время через x.)

   б) При каком значении x это время было бы наименьшим?

   Ответ: а) $\frac{13}{12} + \frac{x}{12} + \frac{3}{x}$ (ч); б) 6 (км/ч).

   Решение. а) Так как катер плывёт на 9 км/ч быстрее баржи, и ему надо наверстать 3 км, для этого нужно $\frac{3 \text{ км}}{9 \text{ км/ч}} = \frac{1}{3}$ ч $= 20$ мин.
   За эти 20 минут, что катер догоняет баржу, она удаляется от причала ещё на $\frac{x}{3}$ км, и в итоге находится в $\frac{x}{3} + 3$ км от причала. Следовательно, на обратную дорогу нужно $\left(\frac{x}{3} + 3\right) : 4$ ч. Значит, суммарное время, которое баржа провела в отрыве от причала, составляет $\frac{13}{12} + \frac{x}{12} + \frac{3}{x}$ ч.

   б) Используя неравенство Коши, получаем, что $\frac{x}{12} + \frac{3}{x} \geqslant 2\sqrt{\frac{x}{12} \cdot \frac{3}{x}}$, причём равенство достигается, если $\frac{x}{12} = \frac{3}{x}$, то есть при $x = 6$.

4. [20 баллов] Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1;45]$, $[46;90]$, $[91;135]$, $[136;180]$, $[181;225]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 45. Какое *наименьшее* значение может принимать сумма тридцати выбранных Пиноккио чисел?

   Ответ: 3165.

   Решение. Пусть $d_1,\ldots,d_6$ – числа из первого промежутка, $d_7,\ldots,d_{12}$ – числа из второго промежутка, $d_{13},\ldots,d_{18}$ – числа из третьего промежутка и т.д.

   Заметим, что каждое из чисел второго промежутка представимо в виде $d_i = 45 + c_i$, где $1 \leqslant c_i \leqslant 45$, каждое из чисел третьего промежутка представимо в виде $d_i = 90 + c_i$, где $1 \leqslant c_i \leqslant 45$ и т.д. Пусть также $c_1 = d_1, \ldots c_6 = d_6$.

   С учётом введённых обозначений сумма данных чисел равна $6\cdot(45+90+135+180)+c_1+c_2+\ldots+c_{30} = 2700+c_1+c_2+\ldots+c_{30}$. Отметим также, что все числа $c_1, c_2, \ldots, c_{30}$ должны быть различны (если $c_i = c_j$, то разность $d_i - d_j$ делится на 45, а если $c_i \neq c_j$, то разность $d_i - d_j$ не делится на 45). Значит, сумма чисел d_i минимальна, если c_i принимают значения от 1 до 30 (в любом порядке); это минимальное значение суммы равно $2700+1+2+\ldots+30 = 2700+\frac{1+30}{2}\cdot 30 = 3165$.

5. [25 баллов] Четырёхугольник $PQRS$ вписан в окружность радиуса 32.5. Известно, что $PS : SR = 16 : 63$, $\angle PQR = 90^\circ$, а периметр четырёхугольника $PQRS$ равен 168. Найдите площадь четырёхугольника.

   Ответ: 1428.

   Решение. Так как $\angle PQR = 90^\circ$, PR является диаметром окружности и $PR = 2\cdot 32.5 = 65$. Пусть $PS = 16x$, тогда $RS = 63x$. По теореме Пифагора для треугольника PRS получаем $(16x)^2+(63x)^2 = 65^2$, поэтому $x = 1$, $PS = 16$, $RS = 63$. Поскольку периметр четырёхугольника равен 168, имеем $PQ + QR = 168 - 16 - 63 = 89$. Если обозначить $PQ = y$, то $QR = 89 - y$, и в силу теоремы Пифагора $y^2 + (89 - y)^2 = 65^2$, $y^2 - 89y + 1848 = 0$, поэтому $y = 33$ или $y = 56$. Это означает, что одна из сторон PQ, QR равна 33, а вторая равна 56. Площадь $PQRS$ равна сумме площадей прямоугольных треугольников PQR и PSR, т.е. $\frac{56\cdot33}{2} + \frac{16\cdot63}{2} = 1428$.

МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
"БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ – БУДУЩЕЕ НАУКИ"
2024/25 УЧЕЬНЫЙ ГОД
МАТЕМАТИКА
ФИНАЛЬНЫЙ ТУР

10 КЛАСС. Ответы и решения

1. [20 баллов] Парабола $y = 2x^2 - 5x + 1$ пересекает прямые $y = -1$, $y = 4$ и $y = a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?

   Ответ: $a = \dfrac{23}{8}$, $a = \dfrac{41}{8}$.

   Решение. Находим координаты точек пересечения параболы с каждой из данных прямых (рассматриваем только случай, когда дискриминант квадратного уравнения в третьей системе положителен, т.к. иначе прямая $y = a$ не высекает отрезка на параболе):

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1, \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \ \text{ или } \ x = \frac{1}{2}, \\ y = -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1, \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \ \text{ или } \ x = -\frac{1}{2}, \\ y = 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1, \\ y = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 \pm \sqrt{17+8a}}{4}, \\ y = a. \end{cases}$$

   Тогда длины высеченных отрезков равны $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{2}$ и $\frac{\sqrt{17+8a}}{2}$. Прямой угол может лежать только напротив большей стороны треугольника, так что возможны два случая.

   1) Прямой угол лежит напротив стороны, равной $\frac{\sqrt{17+8a}}{2}$. Тогда по теореме Пифагора получаем $\frac{17+8a}{4} = \frac{9}{4} + \frac{49}{4}$, откуда $a = \frac{41}{8}$.

   2) Прямой угол лежит напротив стороны, равной $\frac{7}{2}$. Тогда по теореме Пифагора получаем $\frac{49}{4} = \frac{17+8a}{4} + \frac{9}{4}$, откуда $a = \frac{23}{8}$.

2. [15 баллов] Найдите наименьшее значение a такое, что уравнения $3ax^2 - 5x + 2a = 0$ и $2x^2 + ax - 3 = 0$ имеют общий корень.

   Ответ: -1.

   Решение. Пусть x_0 – общий корень двух уравнений. Это означает, что числа a и x_0 удовлетворяют системе уравнений $3ax_0^2 - 5x_0 + 2a = 0$, $2x_0^2 + ax_0 - 3 = 0$. Выражая a из первого уравнения, получаем $a = \frac{5x_0}{3x_0^2+2}$. Подставляя его во второе уравнение, мы находим $2x_0^2 + \frac{5x_0^2}{3x_0^2+2} - 3 = 0$, следовательно, $x_0^4 = 1$ и $x_0 = \pm 1$. Если $x_0 = 1$, то $a = 1$, а если $x_0 = -1$, то $a = -1$. Минимальное значение a равно -1.

3. [20 баллов] Диагонали параллелограмма равны 22 и 13, а один из его углов равен $\arcsin \frac{20}{29}$. Найдите площадь параллелограмма.

   Ответ: 75.

   Решение. Пусть стороны параллелограмма равны x и y; обозначим также $\arcsin \frac{20}{29} = \psi$. Тогда $\cos \psi = \sqrt{1 - \left(\frac{20}{29}\right)^2} = \frac{21}{29}$. Дважды применяя теорему косинусов, получаем $x^2 + y^2 - 2xy \cdot \frac{21}{29} = 13^2$, $x^2 + y^2 - 2xy \cdot \left(-\frac{21}{29}\right) = 2^2$. Вычитая первое уравнение из второго, имеем $\frac{84}{49}xy = 315$. Площадь параллелограмма равна $xy \sin \psi = \frac{29}{84} \cdot 315 \cdot \frac{20}{29} = 75$.

4. [20 баллов] Две яхты движутся прямолинейно и равномерно к маленькому острову. В начальный момент местоположения яхт и острова образуют равносторонний треугольник. После того, как первое судно прошло 40 километров, указанный выше треугольник становится прямоугольным. В момент, когда вторая яхта достигает острова, первой яхте ещё остаётся пройти 60 километров. Найдите расстояние между яхтами в начальный момент времени.

   Ответ: 120.

   Решение. Обозначим сторону первоначального треугольника через x. Очевидно, первая яхта движется с меньшей скоростью, так как она позднее прибывает в порт. Пусть A и B – положения яхт в начале; A_1 и B_1 – положения яхт в тот момент, когда первая яхта преодолела 40 км; пусть C – положение порта.

   Треугольник A_1B_1C прямоугольный, и $\angle A_1B_1C = 90°$, $\angle A_1CB_1 = 60°$. Следовательно, $A_1C = x - 40$, $B_1C = \frac{1}{2}A_1C = \frac{x}{2} - 20$, $BB_1 = x - B_1C = \frac{x}{2} + 20$.

   Теперь можем отметить, что первой яхте для прохождения 40 километров нужно столько же времени, сколько второй яхте для прохождения $\frac{x}{2} + 20$ километров. С другой стороны, первая и вторая яхты затрачивают одно и то же время для прохождения $x - 60$ и x километров соответственно. Следовательно, отношение скоростей может быть выражено двумя способами: $\frac{v_1}{v_2} = \frac{x-60}{x} = \frac{40}{0.5x+20}$. Упрощая уравнение, имеем $x^2 - 100x - 2400 = 0$, и поэтому $x = 120$ или $x = -20$. Так как x – положительное число, то $x = 120$.

5. [25 баллов] Пиноккио выбрал по 6 целых чисел из каждого промежутка $[1; 30]$, $[31; 60]$, $[61; 90]$, $[91; 120]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 30. Какое *наибольшее* значение может принимать сумма двадцати четырёх выбранных Пиноккио чисел?

   Ответ: 1524.

   Решение. Пусть $d_1, \ldots, d_6$ – числа из первого промежутка, $d_7, \ldots, d_{12}$ – числа из второго промежутка, $d_{13}, \ldots, d_{18}$ – числа из третьего промежутка и т.д.

   Заметим, что каждое из чисел второго промежутка представимо в виде $d_i = 30 + c_i$, где $1 \leqslant c_i \leqslant 30$, каждое из чисел третьего промежутка представимо в виде $d_i = 60 + c_i$, где $1 \leqslant c_i \leqslant 30$ и т.д. Пусть также $c_1 = d_1, \ldots c_6 = d_6$.

   С учётом введённых обозначений сумма данных чисел равна $6 \cdot (30+60+90) + c_1 + c_2 + \ldots + c_{24} = 1080 + c_1 + c_2 + \ldots + c_{24}$. Отметим также, что все числа $c_1, c_2, \ldots, c_{24}$ должны быть различны (если $c_i = c_j$, то разность $d_i - d_j$ делится на 30, а если $c_i \neq c_j$, то разность $d_i - d_j$ не делится на 30). Значит, сумма чисел d_i максимальна, если c_i принимают значения от 7 до 30 (в любом порядке); это максимальное значение суммы равно $1080 + 7 + 8 + \ldots + 30 = 1080 + \frac{7+30}{2} \cdot 24 = 1524$.

МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
"БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ — БУДУЩЕЕ НАУКИ"
2024/25 УЧЕЬНЫЙ ГОД
МАТЕМАТИКА
ФИНАЛЬНЫЙ ТУР

9 КЛАСС. Ответы и решения

1. [15 баллов] Найдите количество 18-значных чисел, содержащих только цифры "3", "5" и "8" (при этом каждая цифра встречается хотя бы один раз) таких, что цифр "3" ровно шесть, и они идут подряд.

   Ответ: 53,222.

   Решение. Положение троек можно выбрать 13 способами. После этого в каждом из случаев остаётся разместить восьмёрки и пятёрки. На каждую позицию мы можем поставить любую из этих двух цифр, поэтому получаем 2^{12} способов; однако среди них не подходят те два способа, когда все выбранные цифры одинаковы, так как по условию каждая цифра была использована по крайней мере один раз. Таким образом, в этом случае есть $13\left(2^{12}-2\right)=53{,}222$ способа.

2. [20 баллов] Парабола $y=3x^2$ пересекает прямые $y=147$, $y=75$ и $y=a$, высекая на каждой из прямых отрезок. При каких значениях параметра a из этих трёх отрезков можно составить прямоугольный треугольник?

   Ответ: $a=72$, $a=222$.

   Решение. Находим координаты точек пересечения параболы с каждой из данных прямых (рассматриваем только случай $a>0$, т.к. иначе третья прямая не высекает отрезка на параболе):

   $$\begin{cases} y=3x^2, \\ y=147 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 7, \\ y=147; \end{cases} \quad \begin{cases} y=3x^2, \\ y=75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 5, \\ y=75; \end{cases} \quad \begin{cases} y=3x^2, \\ y=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm\sqrt{\frac{a}{3}}, \\ y=a. \end{cases}$$

   Тогда длины высеченных отрезков равны 14, 10 и $\sqrt{\frac{4a}{3}}$. Прямой угол может лежать только напротив большей стороны треугольника, так что возможны два случая.

   1) Прямой угол лежит напротив стороны, равной $\sqrt{\frac{4a}{3}}$. Тогда по теореме Пифагора получаем $\frac{4a}{3}=196+100$, откуда $a=222$.

   2) Прямой угол лежит напротив стороны, равной 14. Тогда по теореме Пифагора получаем $196=100+\frac{4a}{3}$, откуда $a=72$.

3. [20 баллов] Основания трапеции равны 14 и 29, а боковые стороны равны 26 и 37. Найдите площадь трапеции.

   Ответ: 447,2.

   Решение. Пусть $ABCD$ данная трапеция, в которой $AD=14$, $CD=37$, $BC=29$, $AB=26$. Проведём прямую, проходящую через точку D параллельно прямой AB, и пусть M – точка её пересечения с прямой BC. Четырёхугольникl $ABMD$ – параллелограмм, следовательно $DM=AB=26$, $CM=BC-BM=29-14=15$. Нам известны все стороны треугольника CDM: $CM=15$, $CD=37$, $DM=26$. Полупериметр этого треугольника равен 39, а его площадь равна $A=\sqrt{39(39-15)(39-37)(39-26)}=156$. Следовательно, высота h этого треугольника, опущенная из вершины D, равна $h=\frac{2A}{CM}=\frac{2\cdot 156}{15}=\frac{104}{5}$. Теперь можно вычислить площадь трапеции. Она равна $\frac{AD+BC}{2}h=\frac{14+29}{2}\cdot\frac{104}{5}=447{,}2$.

4. [20 баллов] Чиполлино наклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 22 марки на каждый лист, то все его марки в альбом не поместятся, а если по 26 марок на каждый лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если преподнести Чиполлино в подарок точно такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то у него станет ровно 700 марок. Сколько марок сейчас у Чиполлино? (Все марки имеют один и тот же размер.)

   Ответ: 364.

   Решение. Пусть в альбоме p листов, а общее количество марок у Чиполлино равно k. Тогда если на каждый из листов альбома наклеено по 22 марки (т.е. всего $22p$ марок), то это меньше, чем общее количество марок у Чиполлино, поэтому $22p < k$.

   Если распределять марки по 26 штук на лист, то по крайней мере один лист остаётся пустым. Это означает, что количество марок у Чиполлино не превосходит $26(p-1)$, т.е. $k \leqslant 26(p-1)$.

   Наконец, последнее условие означает, что $k + 21p = 700$, откуда $k = 700 - 21p$. Подставляем это в два полученных выше неравенства:

$$\begin{cases} 22p < 700 - 21p, \\ 700 - 21p \leqslant 26(p-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p < \frac{700}{43}, \\ p \geqslant \frac{726}{47}. \end{cases}$$

   Этой системе неравенств удовлетворяет единственное целое значение p – это $p = 16$. Значит, всего у Чиполлино $700 - 21 \cdot 16 = 364$ марки.

5. [25 баллов] Пиноккио выбрал по 5 чисел из каждого промежутка $[1; 25]$, $[26; 50]$, $[51; 75]$, $[76; 100]$. Оказалось, что разность никаких двух выбранных чисел не делится на 25. Какое *наименьшее* значение может принимать сумма двадцати выбранных Пиноккио чисел?

   Ответ: 960.

   Решение. Пусть $d_1, \ldots, d_5$ – числа из первого промежутка, $d_6, \ldots, d_{10}$ – числа из второго промежутка, $d_{11}, \ldots, d_{15}$ – числа из третьего промежутка и т.д.

   Заметим, что каждое из чисел второго промежутка представимо в виде $d_i = 25 + c_i$, где $1 \leqslant c_i \leqslant 25$, каждое из чисел третьего промежутка представимо в виде $d_i = 50 + c_i$, где $1 \leqslant c_i \leqslant 25$ и т.д. Пусть также $c_1 = d_1, \ldots c_5 = d_5$.

   С учётом введённых обозначений сумма данных чисел равна $5 \cdot (25+50+75) + c_1 + c_2 + \ldots + c_{20} = 750 + c_1 + c_2 + \ldots + c_{20}$. Отметим также, что все числа $c_1, c_2, \ldots, c_{20}$ должны быть различны (если $c_i = c_j$, то разность $d_i - d_j$ делится на 25, а если $c_i \neq c_j$, то разность $d_i - d_j$ не делится на 25). Значит, сумма чисел d_i минимальна, если c_i принимают значения от 1 до 20 (в любом порядке); это минимальное значение суммы равно $750 + 1 + 2 + \ldots + 20 = 750 + \frac{1+20}{2} \cdot 20 = 960$.