ШИФР БИ-11-11-4
(заполняется представителем Оргкомитета)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике
(наименование общеобразовательного предмета)
Дата проведения 14.02.2021

ФИО участника *(полностью)* Шарков Сергей Дмитриевич

Серия и номер паспорта

Дата рождения 14.08.2003

Класс 11

Школа № 166 район город Новоалтайск

Особые отметки (Заполняется представителем оргкомитета) о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады **обязан:**

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады **запрещается:**

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполнявшуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись (**другие записи на папке делать запрещено**).

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы.

Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! *Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.*

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады)

1	2	3	4	5	Σ
0	–	0	–	–	
0	4	0	0	0	4

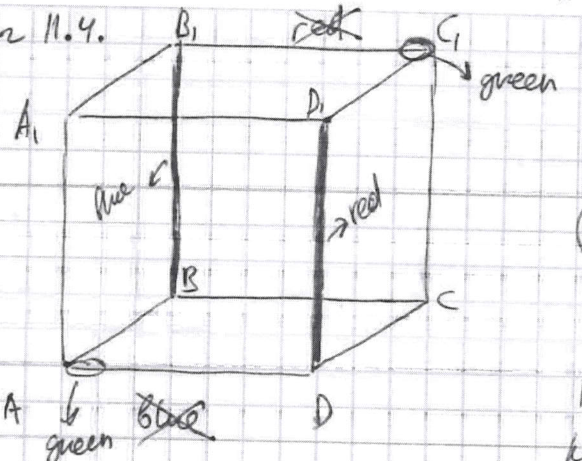
Олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ – БУДУЩЕЕ НАУКИ

Чистовик

ШИФР БИ-М-11-4
(заполняется сотрудником секретариата)

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№ 11.4.



~~Покрасим~~ BB_1

Заметим, что минимальное расстояние от BB_1 до $DD_1 = 5\sqrt{2} > 7$ (аналогично для B_1C_1 и AD; A_1D_1 и BC и т.д.)

⇓

Предположим, что существует такая расстановка элементов, что не найдется одинакового цвета на расстоянии 7 см.

⇓

$BB_1 \neq DD_1$ (по цвету) ищут две точки иного цветов

(погрешность p $\pm(7-5\sqrt{2})$)

Заметим, что B_1C_1 не red, т.к. d – расстояние

$d(D_1+p;\ B_1+p) \geq 7$

$d(D+p;\ C_1+p) \geq 7$.

⇓

~~d [DD_1 (какой либо точки)~~

какая либо из точек DD_1 "диктует" условие для B_1C_1 не быть red, т.к. для каждой точки B_1C_1 найдется такая точка $\in DD_1$, что расстояние между ними ≥ 7.

Аналогично AD не blue;

Заметим, что B_1C_1, а именно конец этого отрезка (ближе к точке C_1) находится на расстоянии ≥ 7 от точки (ближе к B) отрезка BB_1

⇒ B_1C_1 на конце не blue и не red ⇒ ⇒ green

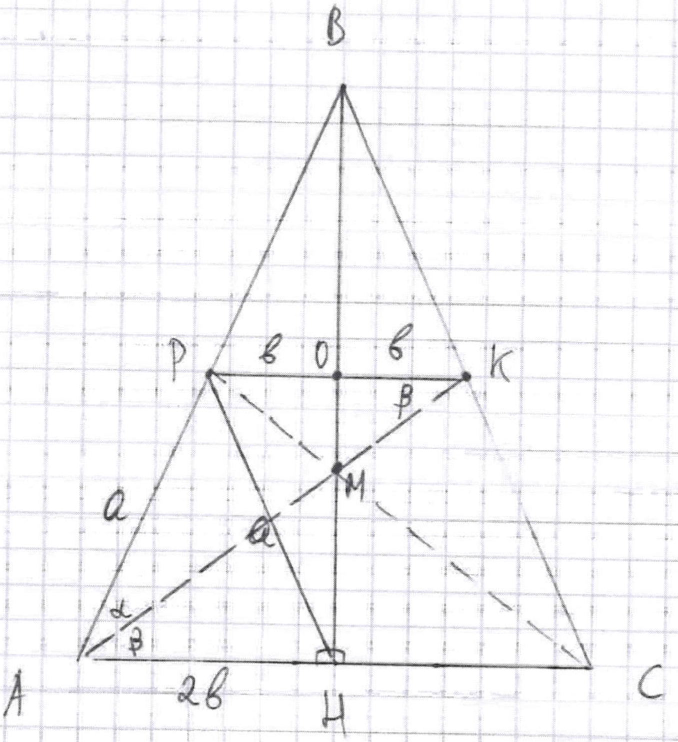
Аналогично конец AD (ближе к A) тоже green

⇓

Заметим, что $d(A, C_1) \geq 7$, а значит между ними найдутся такие две точки что они green, учитывая заполненный куб, и невозможность из определенной области (например в районе точки C_1 и точки A) находящиеся ~~до~~ blue и red

⇒ делаем вывод, что да, пройдут 2 такие точки ч.т.д.

№11.2.



$BK = KC$
$AH = HC$
$AP = PB$
$\angle BAM = \alpha$
$\angle KAC = \beta$

Д-ть:
$\alpha < 2\beta$

Заметим, что PK — средняя линия, PH — средняя линия
$\Rightarrow PK \parallel AC$; $PK = AC/2$; $PH \parallel BC$; $PH = BC/2 = AP$
$\Rightarrow \angle AKP = \beta$; Пусть $AP = PH = a$; $PO = OK = b$, тогда
$PO = AH/2 = 2b/2$, т.к. PO — средняя линия $\triangle ABH$;
~~Заметим~~ По т. синусов: $\frac{2b}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin\beta} \Rightarrow \sin\beta = \frac{a\sin\alpha}{2b}$
⇒ Заметим, что задача сводится к док-ву, что
$\frac{a}{b} > 1$ (так как если подставить в то что нам нужно
(см. примечание 1)
доказать $\sin\beta = \frac{a\sin\alpha}{2b}$, то получим $\sin\alpha < \frac{a\sin\alpha}{2b}\cdot 2$
$\Rightarrow 1 < \frac{a}{b}$; причем рассматривать синусы углов
α и β корректно, так как функция синуса начинает
убывать только после $\frac{\pi}{2}$, а $\alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$, так как
являются углами при основании $< 90°$ (в сумме))
⇒ Рассмотрим $\triangle APH$ и по неравенству треугольника заметим,
что $a + a > 2b \Rightarrow a > b$, разделим обе части на b
и получим $\frac{a}{b} > 1 \Rightarrow \sin\alpha < 2\sin\beta \Rightarrow \alpha < 2\beta$ ч.т.д.

Неверно

② $\beta = \frac{\pi}{4}$, $\alpha = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ (ε мало)
~~Неверно, например при~~
$2\sin\beta = \sqrt{2} > \sin\alpha$ ~~углах $\alpha = 3\beta$~~ ~~$\sin 3\beta = 3$~~

Олимпиада школьников
**БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-
БУДУЩЕЕ НАУКИ**

ШИФР БИ-М-11-4
(заполняется сотрудником секретариата)

Чистовик

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

Примечание 1. Заметим, что если $\sin\alpha < (\sin\beta)\cdot 2$, то и $\alpha < 2\beta$ (для $\alpha, \beta < 90°$), т.к. ~~$\sin\alpha < \sin$~~ подставляя α и 2β в кач-ве аргументов, получим $\sin\alpha < \sin(2\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta > 2\sin\beta$ (исключая углы $\alpha, \beta = 0°$) $\Rightarrow$ если мы докажем, что $\sin\alpha < 2\sin\beta$, то автоматически $\alpha < 2\beta$

№ 11.5.

$f(x) = a_{10}x^{10} + a_9x^9 + \ldots + a_1x + a_0$; $|a_{10}| \leq 10^{-6}$

При $x = 0$; $f(x) \in \mathbb{Z}$:

$a_0 \in \mathbb{Z}$

При $x = 1$: $f(x) \in \mathbb{Z}$:

$(a_{10} + a_9 + \ldots + a_1) \in \mathbb{Z}$ $a_0 \in \mathbb{Z}$

Если $a_9 = -a_{10}$, а $(a_8, \ldots, a_1) \in \mathbb{Z}$, то $f(1) \in \mathbb{Z}$.

В остальных случаях имеем: (приведем к общему знаменателю и в качестве a_{10} возьмем самое наибольшее из возможных чисел $10^{-6} = \frac{1}{10^6}$):

$$\frac{x^{10} + 10^6(a_9x^9 + \ldots + a_1x + a_0)}{10^6}$$

$$\frac{x^{10}}{10^6} + (a_9x^9 + \ldots a_1x + a_0)$$

Заметим, что правая часть ~~$f(x)$~~ $\vdots\ 10^6$ а левая нет
$\Downarrow$
чтобы $f(x) \in \mathbb{Z}$, необходимо левую часть "уничтожить" правой, но, так как в правой части невозможно выделить множитель x^{10}, то левая часть − правая часть $= 0$.

~~$f(x) = 0$, но тогда~~

~~$a_{10} = a_0$~~

подобрать такие $\Leftarrow$
$a_9 - \ldots - a_0$
невозможно
$\Downarrow$
Ответ: нет.

③