ШИФР a2

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по МАТЕМАТИКЕ в 11 классе

(наименование общеобразовательного предмета)

Олимпиада школьников
**БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-
БУДУЩЕЕ НАУКИ**

Чистовик

ШИФР a 2
(заполняется сотрудником секретариата)

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

Лист 1/3

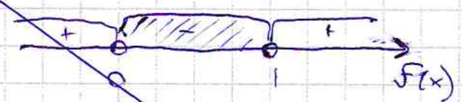
№ 11.1.

$f(f(x)) < (f(x))^2$, $f(x) = 2x^2 - 1$

$2(f(x))^2 - f(x) < (f(x))^2$

$(f(x))^2 - f(x) < 0$

$f(x)(f(x) - 1) < 0$



$0 < f(x) < 1$

$0 < 2x^2 - 1 < 1$

$\frac{1}{2} < x^2 < 1$

$\frac{\sqrt{2}}{2} < |x| < 1$

Ответ: $x \in \left(-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$

№ 11.5.

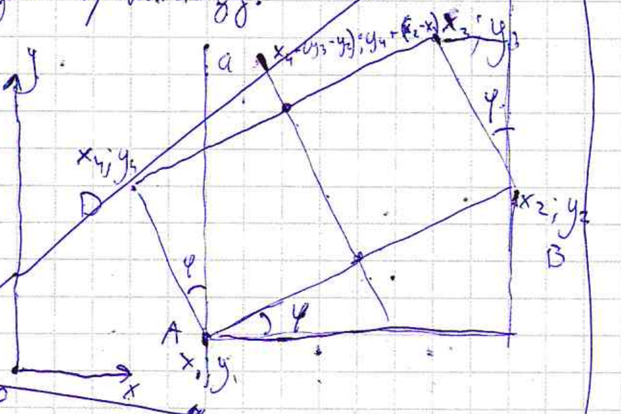
Рассмотрим прямоугольник ABCD удовлетворяющий условию $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$. на рисунке справа снизу.

Прямые a и b параллельны оси OY.

Угол между AD и a равен φ

Угол между AD и OX равен $90° + \varphi$,

тогда т.к. $\angle DAB = 90°$, угол между OX и AB тоже равен φ.



$AD \parallel BC$ (ABCD – прямоугольник), значит, они отклонены ~~от оси~~ ординат OY на один угол и это угол φ. Тогда $\frac{|y_2 - y_1|}{x_2 - x_1} = tg\,\varphi = \frac{|x_2 - x_3|}{y_3 - y_2}$

~~Пусть~~ $0 \leq \varphi < 90°$ всегда, ведь можно выбирать сторону отсчета угла.

Тогда $tg\,\varphi \geq 0$. $\frac{|y_2 - y_1|}{x_2 - x_1} = \frac{|x_2 - x_3|}{y_3 - y_2}$. Пусть $(y_3 - y_2) \cdot k = x_2 - x_1$. При $x_2 - x_1 \geq y_3 - y_2$ k всегда целое, так как в противном случае ~~расстояние между проекциями сторон будет не целым~~ разность между координатами будет не целой, что невозможно при условии, что все координаты целочисленны.

~~Если $x_2 - x_1 < y_3 - y_2$, то рассмотрим другой прямоугольник, подобный данному с такими же углами отклонения от координат ч, у которого его $x_2 - x_1$ будет больше $y_3 - y_2$. Решив задачу для такого прямоугольника, можно будет повернуть прямые и так же сместить, из-за чего координаты останутся целочисленными.~~

~~Проведем прямую, перпендикулярную меньшей стороне прямоугольника, пересекающую CD в точке $(x_4 + (y_3 - y_2); y_4 + (x_2 - x_3))$.~~

~~Так как все слагаемые координат целые, то и сами координаты точки целые. Эта прямая образует квадрат со стороной $\sqrt{(y_3-y_2)^2+(x_2-x_3)^2}$~~

~~$(AD = \sqrt{(x_1-x_4)^2+(y_4-y_1)^2} = \sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_3-y_2)^2}$~~

№ 11.3

$\sqrt{x^3+y} + \sqrt{y^3+x} = \sqrt{x^3+x} + \sqrt{y^3+y}$ т.к. $\sqrt{\ } + \sqrt{\ } \geq 0$ $\uparrow 2$

$x^3+y+y^3+x+2\sqrt{(x^3+y)(y^3+x)} = x^3+x+y^3+y+2\sqrt{(x^3+x)(y^3+y)}$

$(x^3+y)(y^3+x) = (x^3+x)(y^3+y)$

$\underline{x^3y^3} + x^4 + y^4 + \underline{yx} = \underline{x^3y^3} + x^3y + xy^3 + \underline{xy}$

$x^4+y^4 = xy(x^2+y^2)$. Пусть $y = kx$. Тогда

Лист 2/5

$x^4 + k^4x^4 = x \cdot kx \cdot (x^2+k^2x^2)$

$(k^4+1)x^4 = x^2k(x^2(k^2+1))$

$(k^4+1)x^4 = x^4 \cdot k(k^2+1)$

$k^4+1 = k^3+k$

$k^4 - k^3 - k + 1 = 0$; $k^3(k-1) - 1(k-1) = 0$; $(k-1)^2(k^2+k+1) = 0$

$(k-1)^2(k^2+k+1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k-1=0 \\ k^2+k+1=0 \end{array}\right.$ $D<0$, к тут не имеет корней

$k=1$. Значит, $y = x$, если $\sqrt{x^3+y} + \sqrt{y^3+x} = \sqrt{x^3+x} + \sqrt{y^3+y}$

Ответ: Да.

+

Олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ- БУДУЩЕЕ НАУКИ

Чистовик

ШИФР a2
(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов	
+	0	+	±	+.	Σ
20	0	20	12	16	68

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№ 11.4

Лист 3/5

$x^2+y^2=z^{2022}$

Пусть $x=k\sin t$, а $y=k\cos t$. Тогда:

$k^2\sin^2 t+k^2\cos^2 t=z^{2022}$

$k^2=z^{2022}$

$k=z^{2011}$

$x, y\in N$, $z\in N$, $z^{2011}\in N$, значит, $k\in N$

~~должно быть натуральным.~~

$\begin{cases} x=k\sin t \\ y=k\cos t \\ x, y\in N \\ k\in N \end{cases}$

При $\sin t=\frac{5}{13}$ $\cos t=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\sqrt{\frac{169-25}{169}}=\frac{12}{13}$

Если $z=13$ то

неправильно подобраны степени $x^2+y^2=5^2\cdot 13^{4020}+12^2\cdot 13^{4020}\neq 13^{2022}$

$x=13^{2011}\cdot\frac{5}{13}=5\cdot 13^{2010}$, $x\in N$

$z\in N$.

$y=13^{2011}\cdot\frac{12}{13}=12\cdot 13^{2010}$, $y\in N$

Найдена тройка нат. чисел, удовлетвор. условию.

~~Но существуют такие x_1, y_1, z_1, что $x_1=2x$, $y_1=2y$, $z_1=2z$;~~

~~а они тоже удовлетворяют условию $(2x)^2+(2y)^2=4z^2\Rightarrow x^2+y^2=z^2$.~~

Также существуют x_i, y_i, z_i такие что $x_i=2^i\cdot 5\cdot 13^{2010}$

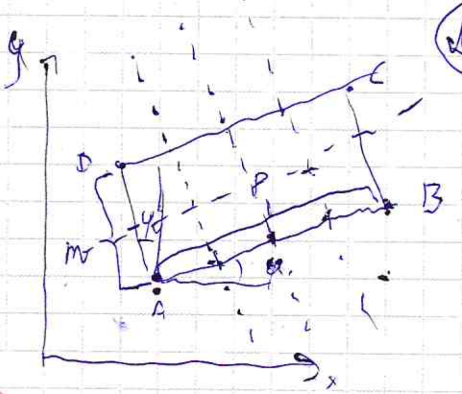
$y_i=2^i\cdot 12\cdot 13^{2010}$, $z_i=13\cdot 2^{\frac{i}{2022}}$ ~~при~~ при любых $i\vdots 2022$ В этом месте тоже ошибка (ео степенями!

выражение $x_i^2+y_i^2=z_i^{2022}$ будет верно. Значит, троек x, y, z, причем натуральных, бесконечно много, ч.т.д.

+

№ 11.5

Лист 4/5



φ - угол отклонения между стороной AB данного прямоугольника ABCD и осью OX.

~~Возм~~ $0 \le \varphi < 90$

$A_x, B_x, A_y, B_y \in \mathbb{Z}$, значит

$\frac{B_y - A_y}{B_x - A_x} = tg\,\varphi \in \mathbb{R}$ Q как отношение двух целых чисел.

$(AD \wedge OY) = \varphi$ тоже (ABCD - прямоугольник). Значит

$\frac{A_x - D_x}{D_y - A_y} = tg\,\varphi = \frac{B_y - A_y}{B_x - A_x}$. Пусть $(D_y - A_y)\cdot k = B_x - A_x$.

а если $k = 1$?!

~~При~~ Пусть $k > 1$ (при $k < 1$ задача идентично решается другой ок). $k = \frac{p}{m}$ p, m - взаимно простые. Т.к. $k > 1$, то $p > m$.

$(D_y - A_y)\cdot\frac{p}{m} = B_x - A_x$. Значит $(D_y - A_y) \vdots m$, то есть $\frac{D_y - A_y}{m}$ ~~...~~ $\in \mathbb{N}$. Тогда $\frac{B_x - A_x}{p}$ тоже натуральное, то есть $B_x - A_x \vdots p$. $\frac{D_y - A_y}{m} = \frac{B_x - A_x}{p}$.

Разрежем прямоугольник на сетку из квадратов $p \times m$.

Тогда у ~~...~~ ~~точки~~ на AB появятся точки с координатами $\left(A_x + \frac{B_x - A_x}{p}; A_y + \frac{B_y - A_y}{p}\right), \left(A_x + 2\frac{B_x - A_x}{p}; A_y + 2\frac{B_y - A_y}{p}\right)$

и так далее до $\left(A_x + p\left(\frac{B_x - A_x}{p}\right); A_y + p\left(\frac{B_y - A_y}{p}\right)\right)$.

~~$B_x \ne A_x$, $\frac{B_y - A_y}{B_x - A_x} \in \mathbb{R}$, $\frac{\frac{B_y - A_y}{p}}{\frac{B_x - A_x}{p}} \in \mathbb{R}$, $\frac{B_y - A_y}{p} \in \mathbb{N}$, ... доказательство следовательно выражение $\frac{B_x - A_x}{p} \in \mathbb{N}$, p будет одинаковым~~

$\frac{B_x - A_x}{D_y - A_y} = \frac{p}{m}$, $\frac{AB\cos\varphi}{AD\cos\varphi} = \frac{p}{m}$; $\frac{AB\sin\varphi}{AD\sin\varphi} = \frac{p}{m}$, $\frac{B_y - A_y}{A_x - D_x} = \frac{p}{m}$ аналогично

$\frac{B_y - A_y}{p} \in \mathbb{N}$. Тогда все слагаемые координат целочисленны, значит,

Олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

Чистовик

ШИФР a2
(заполняется сотрудником секретариата)

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

Лист 5/5

сами координаты целочисленны.

Все координаты квадратов подходят под

$$\cancel{A_x + \frac{B_x - A_x}{p} ; A_y + }$$

$$\left(A_x + i\left(\frac{B_x - A_x}{p}\right) + j\left(\frac{D_x - A_x}{m}\right); A_y + i\left(\frac{B_y - A_y}{p}\right) + j\left(\frac{D_y - A_y}{m}\right)\right)$$

где ~~i, j — целые числа~~ $\begin{cases} i \in [0; p] \\ i \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\begin{cases} j \in [0; m] \\ j \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Все слагаемые координат целочисленны. Вариативность ~~Ец~~ Заметим, что прямые, построенные из сторон квадратов, параллельны сторонам прямоугольника, ч.т.д.

почему?

№: 11,1

$f(f(x)) < (f(x))^2 \qquad f(x) = 2x^2 - 1$

$2(f(x))^2 - 1 < (f(x))^2$

$f(x)^2 < 1$

$(2x^2-1)^2 < 1$

$4x^4 - 4x^2 + 1 < 1$

$4x^4 - 4x^2 < 0 \qquad x^2(x^2-1) < 0$

$\cancel{x(x^3-1) < 0}$

$\cancel{x(x-1)(x^2+x+1) < 0}$

Ответ: $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$