ШИФР а39
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

# Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
**БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ**

по математике в 11 классе
(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Кирюпов Андрей Дмитриевич

Дата рождения | 0 | 3 | . | 0 | 9 | . | 2 | 0 | 0 | 4 |

Олимпиада школьников
**БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-**
**БУДУЩЕЕ НАУКИ**

**Чистовик**

**ШИФР** 939
(заполняется сотрудником секретариата)

| Задание 1 | Задание 2 | Задание 3 | Задание 4 | Сумма баллов |
|---|---|---|---|---|
| + | +. | + | + | 0 78 |
| 20 | 18 | 20 | 20 | 0 |

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

1

№ 11.1

$f(x)=2x^2-1$

$f(f(x))<(f(x))^2$

$f(t)<t^2 \qquad (t=f(x))$

$2t^2-1<t^2$

$t^2<1$

$|t|<1$

$|f(x)|<1$

$|2x^2-1|<1$

$-1<2x^2-1<1$

$0<2x^2<2$

$0<x^2<1$

$x\in(-1;0)\cup(0;1)$

Ответ: $x\in(-1;0)\cup(0;1)$

№ 11.3

$\sqrt{x^3+y}+\sqrt{y^3+x}=\sqrt{x^3+x}+\sqrt{y^3+y}$

$\begin{cases} y^3+y\geq 0 \\ x^3+x\geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y(y^2+1)\geq 0 \\ x(x^2+1)\geq 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (y^2+1)>0, \text{ при } y\in R \\ (x^2+1)>0, \text{ при } x\in R \end{matrix}$

$\begin{cases} x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$

1. $x = 0$

$\sqrt{y} + \sqrt{y^3} = \sqrt{y^3+y}$

$y + y^3 + 2y^2 = y^3 + y$

$2y^2 = 0$

$y = 0$

$x = y = 0$

~~$x = y = 0$~~

~~Аналогично $x + y = 0$~~

2. $x > 0$ ~~и $y > 0$~~

$\sqrt{x^3+y} + \sqrt{y^3+x} = \sqrt{x^3+x} + \sqrt{y^3+y}$ (*)

$\sqrt{x^3+y} - \sqrt{x^3+x} = \sqrt{y^3+y} - \sqrt{y^3+x} \quad \Big| \cdot \left(\sqrt{x^3+y} + \sqrt{x^3+x}\right) > 0$

$\dfrac{y-x}{\sqrt{x^3+y} + \sqrt{x^3+x}} = \sqrt{y^3+y} - \sqrt{y^3+x} \quad \Big| \cdot \left(\sqrt{y^3+y} + \sqrt{y^3+x}\right) > 0$

$\dfrac{y-x}{\sqrt{x^3+y} + \sqrt{x^3+x}} = \dfrac{y-x}{\sqrt{y^3+y} + \sqrt{y^3+x}}$

Предположим $x \neq y$

$$\begin{cases} \sqrt{x^3+y} + \sqrt{x^3+x} = \sqrt{y^3+y} + \sqrt{y^3+x} \\ \sqrt{x^3+y} + \sqrt{y^3+x} = \sqrt{x^3+x} + \sqrt{y^3+y} \end{cases}$$

$\sqrt{x^3+x} - \sqrt{y^3+x} = \sqrt{y^3+x} - \sqrt{x^3+x}$

$\sqrt{x^3+x} = \cancel{\sqrt{y^3+y}}\ \sqrt{y^3+x}$

$x^3 + x = y^3 + x$

$x^3 = y^3$

$x = y$

Противоречие. Значит $x = y$

Ответ: можно

+

~11.4

Олимпиада школьников
**БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-
БУДУЩЕЕ НАУКИ**

**Чистовик**

**ШИФР** 939
(заполняется сотрудником секретариата)

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

~~Пусть~~ Предположим что множество таких троек конечно. Тогда, если это множество не пустое, возьмем тройку $(x_1; y_1; z_1)$ где ~~$z_1$~~ $z$ максимально среди всех троек в множестве. (2)

$x_1^2 + y_1^2 = z_1^{2022}$

$2^{2022} \cdot x_1^2 + 2^{2022} \cdot y_1^2 = 2^{2022} \cdot z_1^{2022}$

$(2^{1011} \cdot x_1)^2 + (2^{1011} \cdot y_1)^2 = (2 z_1)^{2022}$

Получили тройку $(2^{1011} \cdot x_1; 2^{1011} \cdot y_1; 2 \cdot z_1)$.

Но $2 \cdot z_1 > z_1$, для $z_1 \in N$. Значит $z_1$ не максимально среди всех троек в множестве. Противоречие.

Значит, осталось показать, что в множестве есть хоть одна тройка.

Несложно убедиться, что тройка $(3 \cdot 5^{1010}; 4 \cdot 5^{1010}; 5)$ удовлетворяет $x^2 + y^2 = z^{2022}$, значит лежит в множестве, значит множество бесконечно. Ч.Т.Д. +

№11.2

Заметим что при $x \in (0; 1]$ $y > 0$ значит максимальное значение достигается при $x \in (0; 1]$.

Заметим что при $x \in [-1; 0)$ $y < 0$ значит минимальное значение достигается при

$x \in [-1;0)$.

~~Заметим что на отрезке $[-1;0]$ arcsin x возрастает.~~

1. ~~Arc~~ $x<0$

Заметим что $\arcsin x < 0$, а $\arccos x \geq 0$

Значит мы хотим найти максимальное значение для $(-\arcsin x)\cdot\arccos x$, чтобы найти минимум для $y(x)$.

Заметим что на этом промежутке $(-\arcsin x)$ убывает и $\arccos x$ убывает. Значит максимум $(-\arcsin x)\cdot\arccos x$ достигается при $x=-1$.

Значит минимум $y(x)$ достигается при $x=-1$.

$y_{min} = y(-1) = -\frac{\pi}{2}\cdot\pi = -\frac{\pi^2}{2}$

2. $x>0$

$\arcsin x$ ~~и~~ $>0$

$\arccos x >0$

$\arcsin x\cdot\arccos x \leq \left(\frac{\arcsin x + \arccos x}{2}\right)^2$ (неравенство средних)

~~Вспомним, что равенство достигается при~~

$\arcsin x + \arccos x \leq \frac{\pi}{2}$ ? (сумма углов при гипотенузе в прямоугольном треугольнике) здесь равенство!

$\arcsin x\cdot\arccos x \leq \frac{\pi^2}{16}$

При $x=\frac{\sqrt2}{2}$ $\quad y=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{16}$

$y_{max} = \frac{\pi^2}{16}$

Ответ: $y_{min} = -\frac{\pi^2}{2}$ ; $y_{max} = \frac{\pi^2}{16}$

№ 11.5