ШИФР a55

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике в 11 классе

(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника

Олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

ШИФР a55
(заполняется сотрудником секретариата)

Чистовик

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

N 11.1

Лист 1

$f(x) = 2x^2-1$

$f(f(x)) < (f(x))^2$

$f(2x^2-1) < (2x^2-1)^2$

$2(2x^2-1)^2 - 1 < (2x^2-1)^2$

$(2x^2-1)^2-1 < 0$

$(2x^2-1-1)(2x^2-1+1)<0$

$(2x^2-2)(2x^2)<0$

$4x^2(x^2-1)<0$

$4x^2(x-1)(x+1)<0$

$+ \quad -1 \quad - \quad 0 \quad - \quad 1 \quad + \quad x$

Ответ: $x \in (-1;0) \cup (0;1)$

N 11.2

$y = (\arcsin x)\cdot(\arccos x)$

По опр. arcsin и arccos:

$\sin\alpha = x \qquad \cos\beta = x$

$\arcsin x = \alpha \qquad \arccos x = \beta$

$\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \qquad \beta \in [0; \pi]$

$\sin(90^\circ - \beta) = \cos\beta = x = \sin(\alpha) \Rightarrow$

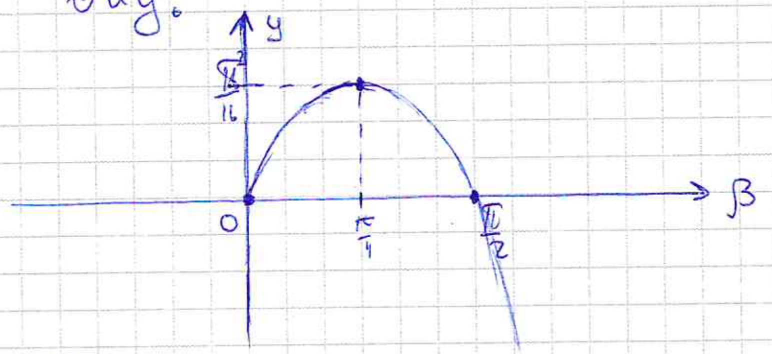
$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta.$

т.к. $\arcsin x = \alpha$, $\arccos x = \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \alpha\cdot\beta$ и т.к. $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \beta(\frac{\pi}{2} - \beta) = -\beta^2 + \frac{\pi}{2}\beta.$

~~функц~~ график функции $y(\beta)$ будет иметь следующий вид:



Из графика квадратной функции получаем, что:

~~max~~ $\beta \in [0; \frac{\pi}{4})\ \nearrow$

$\beta \in (\frac{\pi}{4}; \pi]\ \searrow$ $\Rightarrow$ $\max(y) = y(\frac{\pi}{4})$, $\min(y) = y(\pi)$

посчитаем эти значения:

$\max(y) = (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) \cdot \frac{\pi}{4} = (\frac{\pi}{4})^2 = \frac{\pi^2}{16}$ +

$\min(y) = (\frac{\pi}{2} - \pi) \cdot \pi = -\frac{\pi^2}{2}$

Ответ: $\max(y) = \frac{\pi^2}{16}$; $\min(y) = -\frac{\pi^2}{2}$

№ 11.3

$$\sqrt{x^3+y} + \sqrt{y^3+x} = \sqrt{x^3+x} + \sqrt{y^3+y}$$

из правой части получаем ОДЗ:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

из-за корней, которые ≥ 0 при возведении в степень, корни уравнения не теряются.

возведём обе части в квадрат:

$$(\sqrt{x^3+y})^2 + 2(\sqrt{x^3+y})(\sqrt{y^3+x}) + (\sqrt{y^3+x})^2 = (\sqrt{x^3+x})^2 + 2(\sqrt{x^3+x})(\sqrt{y^3+y}) + (\sqrt{y^3+y})^2$$

$$\cancel{x^3} + y + 2\sqrt{(x^3+y)(y^3+x)} + y^3 + x = \cancel{x^3} + x + 2\sqrt{(x^3+x)(y^3+y)} + y^3 + y$$

$$2\sqrt{(x^3+y)(y^3+x)} = 2\sqrt{(x^3+x)(y^3+y)} \quad |:2$$

в рамках ОДЗ новых огр. не появляется

$$(x^3+y)(y^3+x) = (x^3+x)(y^3+y)$$

Олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

Чистовик

ШИФР п55
(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+	+	+	±	−
20	20	20	16	0 | 76

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

$\cancel{x^3y^3}+y^4+x^4+\cancel{xy}=\cancel{x^3y^3}+xy^3+yx^3+\cancel{xy}$ Лист 2

$y^4+x^4=xy^3+x^3y$

$y^4-2x^2y^2+x^4+2x^2y^2=xy^3+x^3y$

$(y^2-x^2)^2=xy(y^2-2xy+x^2)$

$(y-x)^2(y+x)^2=xy(y-x)^2$

$(y-x)^2((y+x)^2-xy)=0$

$(y-x)^2(y^2+2xy+x^2-xy)=0$

$(y-x)^2(y^2+xy+x^2)=0$

$\left[\begin{array}{l}(y-x)^2=0\\ y^2+xy+x^2=0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}y=x\\ y^2+xy+x^2=0\end{array}\right.$

$x^2+y^2+xy=0 \Rightarrow$ т.к. все коэффициенты положительны $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ нет неотрицательных корней, ~~так~~, однако по ОДЗ и x и y − неотрицательные $\Rightarrow$ уравнение $x^2+y^2+xy=0$ не имеет решения $\Rightarrow$ единственное решение это $y=x$. $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ можно утверждать, что $y=x$

Ответ: можно.

+

N 11.4

$x^2+y^2=z^{2022}$

$x^2+y^2=(z^{1011})^2$

Данная запись ~~я~~ можно рассмотреть как Т. Пифагора ($a^2+b^2=c^2$), где $x=a$, $b=y$, $z^{1011}=c$.

Так же можно вспомнить исходя из этого соотношение сторон Пифагорова треугольника: 3 : 4 : 5 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~изначальная запись может принять вида~~

$\cancel{((3a)^{1011})^2 + ((4a)^{1011})^2 = (5a)^{1011})^2}$

$\Rightarrow$ предположим, что $z = 5^{2022} = (5^{1011})^2 \Rightarrow$ z^{2022}

$\Rightarrow$ по соотношению: $x = \frac{5^{1011}}{5} \cdot 3$, $y = \frac{5^{1011}}{5} \cdot 4 =$

$= (3 \cdot 5^{1010})^2 + (4 \cdot 5^{1010})^2 = 5^{2022} \Rightarrow$ если $z \vdots 5$, то можно составить тройку натуральных чисел, удовлетворяющих условию, а так как множество ~~$A = \{5x \mid x \in N\}$~~ натуральных чисел, кратных 5, бесконечно, $\Rightarrow$ и множество троек чисел x, y и z также бесконечно.

Запишем все 3 числа в общем виде:

$z = (5a)^{2022} = ((5a)^{1011})^2$ $\quad z = 5a$

✓ $y = \frac{(5a)^{1011} \cdot 4}{5} = 5^{1010} a^{1011} \cdot 4 = 4a(5a)^{1010}$

✓ $x = \frac{(5a)^{1011} \cdot 3}{5} = 5^{1010} a^{1011} \cdot 3 = 3a(5a)^{1010}$,

где $a \in N$ (как уже было сказано выше, т.к. множество N - бесконечно, то и множество троек чисел x, y, и z также бесконечно).

+

N 11.5

1) Т.к. все вершины прямоугольника имеют целочисленные координаты (a, b), $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ стороны квадрата также должны быть целыми) т.к. их вершины ~~новые~~ будут иметь координаты вида $(a \pm nx; b \pm nx)$, где $n \in \mathbb{Z}$, x - сторона квадрата. Т.к. целое $\pm$ (целое $\cdot$ x) = целое, только тогда, когда $x \in \mathbb{Z}$.

не обязательно!

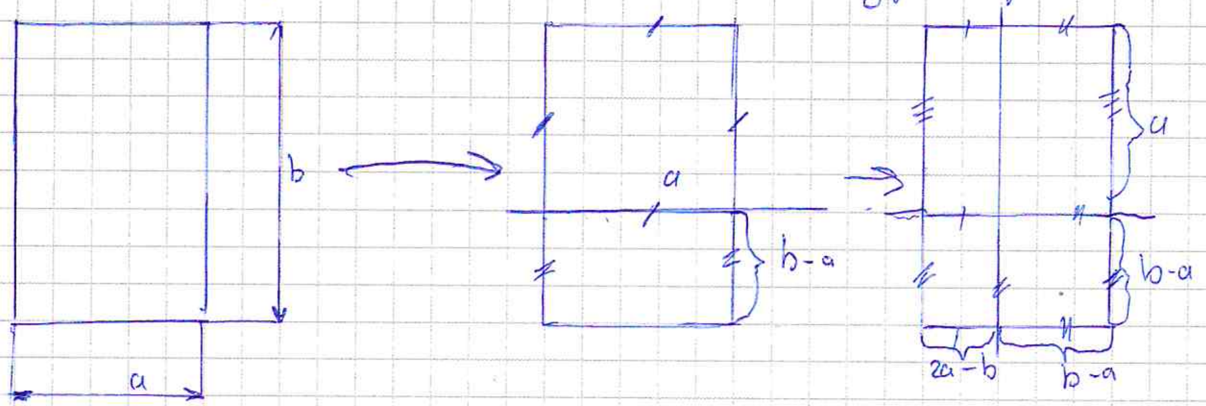
Олимпиада школьников
**БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-
БУДУЩЕЕ НАУКИ**

ШИФР a55
(заполняется сотрудником секретариата)

Чистовик

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

2) Докажем, что все итоговые квадраты равны:

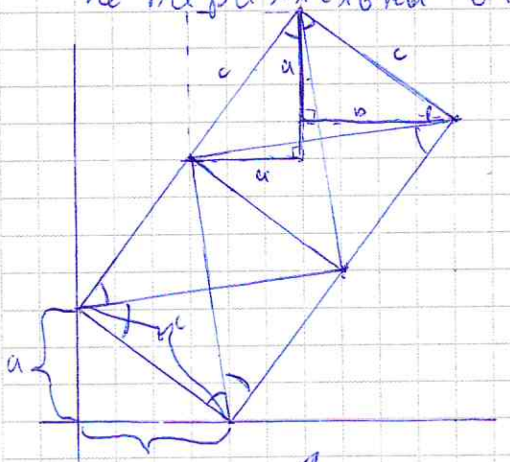


Т.к. мы используем прямые, а не отрезки, то каждый разрез подразумевает создание квадрата со стороной x и нарушение целостности всех квадратов со стороной $x+n$, ~~лежащих~~ которым принадлежит эта прямая ⇒ ⇒ в получившемся из разрезанного квадрата прямоугольнике со сторонами (x) и $(x+n)$ самым большим квадратом будет квадрат со стороной x, который будет равен квадрату, полученному на предыдущем шагу. ⇒ все повторяя эти действия и разрезая новые прямоугольники на квадраты мы в итоге разрежем изходный прямоугольник на квадраты с целочисленными вершинами.

3) Исходя из всего вышесказанного разделить прямоугольник на квадраты с целочисленными координатами можно (достаточно просто провести прямые, параллельные сторонам каждые через каждый единичный отрезок, а максимальной длиной стороны, получившихся квадратов

будет НОД(a, b), где a и b — длины сторон прямоугольника. Однако, это справедливо для прямоугольников, стороны которых параллельны осям координат.

4) Теперь рассмотрим прямоугольники, стороны которых не параллельны осям координат)

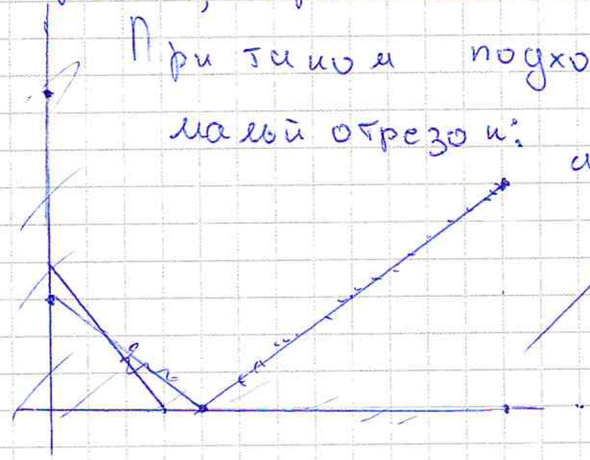


(рис 1)

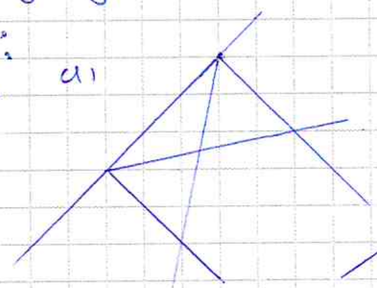
Если от каждой вершины отложить на большую сторону отрезок равный малой стороне => получим возможность провести диагонали квадратов, на которых будут лежать вершины будущих квадратов, а сами точки, которые мы отложим так же будут находиться на целочисленных координатах => из них можно провести прямые, параллельные сторонам.

обоснование?

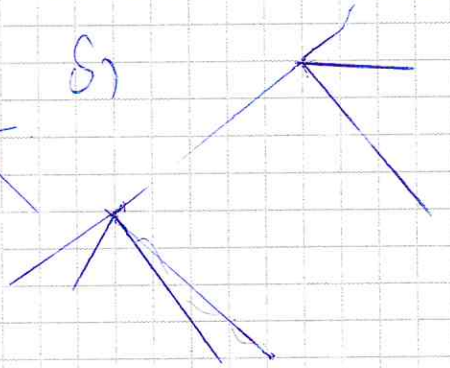
При таком подходе может остаться относительно малый отрезок:



а)



б)



т.к. или иначе этот отрезок будет являться одной из сторон прямоугольника => мы можем повторить нашу операцию по получению целочисленных координат вершин. Продолжая выполнять эту операцию для новых прямоугольников мы рано или поздно придём к ситуации из рис 1. где есть квадраты на которые мы и поделим весь остальной □.

почему?