ШИФР 929

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по МАТЕМАТИКЕ в 11 классе
(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Холяк Даниил Романович

Олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

Чистовик

ШИФР а29
(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов	
+	+/2	+	+	5	
20	10	20	20	3	73

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№1

$f(f(x)) < (f(x))^2$, $f(x) = 2x^2 - 1$

$2(2x^2-1)^2 - 1 < (2x^2-1)^2$; $2x^2-1 = t;\ t \geq 0$

$2t - 1 < t$

$t < 1$

$(2x^2-1)^2 < 1$

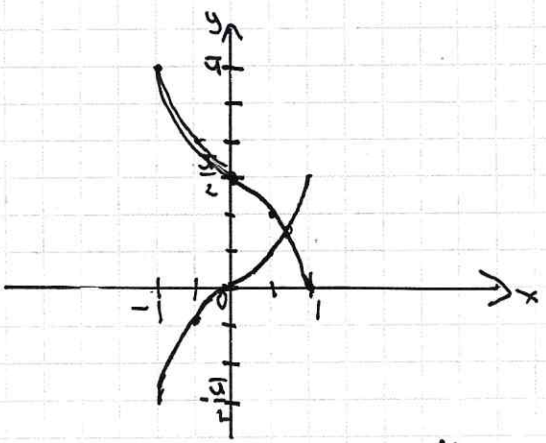
$-1 < 2x^2 - 1 < 1$

$0 < 2x^2 < 2 \Rightarrow 0 < x^2 < 1$

$\begin{cases} x^2 < 1 \\ x^2 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$

Ответ: $x \in (-1;0) \cup (0;1)$

№2



Наименьшее ~~значение~~ значение будет когда $x = -1$, т.к. $\arcsin x < 0$ при $x \in [-1;0]$, и мин. значение в $x=-1$ $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$; а $\arccos x > 0$ при $x \in [-1;0]$ и он максимален в этой точке $\Rightarrow \arccos(-1) = \pi$

$y_{наим} = -\frac{\pi}{2} \cdot \pi = -\frac{\pi^2}{2}$

Наиб. значение будет при $x \in [0;1]$, т.к. здесь функции (одна убывает, другая возрастает) с равной скоростью, и.

Максимальное значение произведения будет в точке их встречи

почему ?

то есть при $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$y_{наиб} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{16}$

Ответ: $y_{наим} = -\frac{\pi^2}{2}$; $y_{наиб} = \frac{\pi^2}{16}$

№ 3

$$\sqrt{x^3+y} + \sqrt{y^3+x} = \sqrt{x^3+x} + \sqrt{y^3+y}$$

$$\begin{cases} x^3+y \geq 0 \\ y^3+x \geq 0 \\ x^3+x \geq 0 \\ y^3+y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3+y \geq 0 \\ y^3+x \geq 0 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Т.к x и y неотрицательны, то мы можем возвести в квадрат обе части уравнения., т..

$$\cancel{x^3} + \cancel{y} + \cancel{y^3} + \cancel{x} + 2\sqrt{(x^3+y)(y^3+x)} = 2\sqrt{(x^3+x)(y^3+y)} + \cancel{x^3} + \cancel{x} + \cancel{y^3} + \cancel{y}$$

$$2\sqrt{(x^3+y)(y^3+x)} = 2\sqrt{(x^3+x)(y^3+y)}$$

$$\begin{cases} (x^3+y)(y^3+x) = (x^3+x)(y^3+y) \\ (x^3+x)(y^3+y) \geq 0 \end{cases}$$, т.к. x и $y \geq 0$, то и это условие выполняется.

$$(x^3+y)(y^3+x) = (x^3+x)(y^3+y)$$

$$\cancel{x^3y^3} + x^4 + y^4 + \cancel{yx} = \cancel{x^3y^3} + x^3y + xy^3 + \cancel{xy}$$

$$x^4 - x^3y + y^4 - xy^3 = 0$$

$$x^3(x-y) - y^3(x-y) = 0 \quad | \quad x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$$

$$(x-y)^2(x^2+xy+y^2) = 0$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x-y=0 \\ x^2+xy+y^2=0 \end{array}\right. \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{ll} x=y & (1) \\ x^2+xy+y^2=0 & (2) \end{array}\right. \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

(2) Т.к. $x \geq 0$ и $y \geq 0$
Второе уравнение равно нулю в ед случае, когда $x = y = 0$

$\Rightarrow x = y$

Ответ: да, можно

+

2

№11.4

$x^2+y^2=z^{2022}$ ~~2022~~

~~$x^2+y^2=t^2$, данное уравнение имеет бесконечно много решений~~.

~~Также $x^2+y^2=z^{2022}$~~, можно рассмотреть как

~~$x^2+y^2=z^{2020}\cdot z^2$~~, ~~то есть~~ если

~~$x=z^{1010}$~~.

(1) $x^2+y^2=z^2$ имеет бесконечно много решений.

$x^2+y^2=z^2\cdot z^{2020}$

(2) $(z^{1010}\cdot x)^2+(z^{1010}\cdot y)^2=z^{2022}$, мы получим уравнение тождественно равное ур-ю (1), которое имеет бес-но много решений.

Пример:

$3^2+4^2=5^2 \quad |\cdot 5^{2020}$

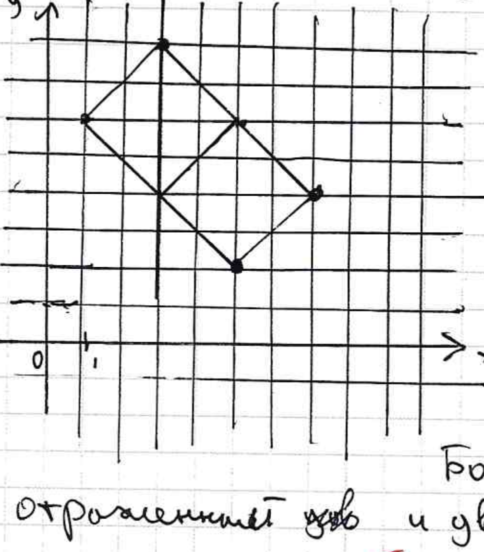
$(\underbrace{5^{1010}\cdot 3}_{\text{нат-е}})^2+(\underbrace{5^{1010}\cdot 4}_{\text{нат-е.}})^2=\underbrace{5^{2022}}_{\text{нат-е.}}$

+

ч. т. д.

№11.5

Разлинуем координатную плоскость прямыми, проходящими через точки с целыми координатами на осях.



Тогда узлы сетки будут иметь целочисленные координаты. Следовательно вершины прямоугольника будут лежать в узлах решетки.

? Рассмотрим две стороны.

Проведем биссектрису угла.

Большая сторона, - это наш отрезок с ц-ми коор-ми ~~меньшая сторона~~. отраженный ~~угл~~ и увеличенный в k раз. Где k - целое число

биссектриса угла не обязательно попадет по линии сетки!

3

Олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-
БУДУЩЕЕ НАУКИ

ШИФР а29
(заполняется сотрудником секретариата)

Чистовик

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№11.5

(если k - не целое, то концу отрезка не имел бы целочисленные координаты.)

Следовательно ~~меньшую сторону~~ этот отрезок можно уложить k (повороте на 90°) раз в большей стороне => т.к отрезок при отражении не теряет свойства целоч-ти вершин. Значит найдутся точки с целочисленными координатами на сторонах. И так как каждая из сторон поделена на ~~ух~~ некоторое к-во таких равных отрезков => ~~ох~~ прямые проведенные п-но поделят пр-к на квадраты, причём с целочисленными вершинами. (т.к стороны квадратов - отрезки которые всегда ~~лежат на~~ имеют целочисленные вершины) ч.т.д.

4