ШИФР 038

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике в 11 классе

(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Шишкарёв Андрей Максимович

Олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-
БУДУЩЕЕ НАУКИ

Чистовик

ШИФР 938
(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+	0	+	+	5 FU
20	0	20	20	7 / 67

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№ 11. 1

$f(f(x)) = 2(2x^2-1)^2 - 1 \qquad D(f) = \mathbb{R}$

$(f(x))^2 = (2x^2-1)^2$

$2(2x^2-1)^2 - 1 < (2x^2-1)^2$

$2(4x^4 - 4x^2+1) - 1 < 4x^4 - 4x^2 + 1$

$8x^4 - 8x^2 + 2 - 1 < 4x^4 - 4x^2 + 1$

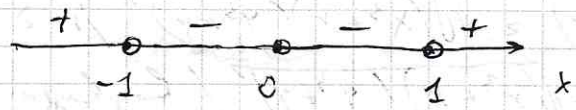
$4x^4 - 4x^2 < 0 \quad | :4, \ 4>0$

$x^4 - x^2 < 0$

$x^2(x^2-1) < 0$

$x^2 = 0 \qquad x^2 - 1 = 0$

$x = 0 \qquad x = \pm 1$



$(x = -2): \ (-2)^4((-2)^2 - 1) > 0$

~~$x \in [-1; 1]$~~ $\quad x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$

Ответ: $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$.

№ 11. 3.

$\sqrt{x^3+y} + \sqrt{y^3+x} = \sqrt{x^3+x} + \sqrt{y^3+y}$

возведём обе части в квадрат,

т.к. если числа равны, то их

(1)

Значит тоже равно.

но сначала найдём область определения

$$\begin{cases} x^3+y \geq 0 \\ y^3+x \geq 0 \\ x^3+x \geq 0 \\ y^3+y \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 \geq -y \\ y^3 \geq -x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \cancel{\begin{cases} x^3y^3 \geq xy \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}} \cancel{\Rightarrow} \cancel{\begin{cases} x^3y^3 \geq xy \\ y \geq 0 \end{cases}}$$

$\cancel{x^3y^3 - xy \geq 0}$

$\cancel{xy(x^2y^2-1) \geq 0}$

$\cancel{xy \geq 0 \quad x^2y^2 = 1 \quad x^2y = \pm 1}$

$\cancel{xy = -2: \; -2(4-1) \geq 0}$

$\cancel{\begin{cases} -1 \leq xy \leq 0 \\ xy \geq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

$$\left(\sqrt{x^3+y}+\sqrt{y^3+x}\right)^2=\left(\sqrt{x^3+x}+\sqrt{y^3+y}\right)^2$$

$$x^3+y+2\sqrt{x^3+y}\sqrt{y^3+x}+y^3+x = x^3+x+2\sqrt{x^3+x}\sqrt{y^3+y}+y^3+y$$

$$2\sqrt{(x^3+y)(y^3+x)} = 2\sqrt{(x^3+x)(y^3+y)} \quad | : 2$$

$$\sqrt{(x^3+y)(y^3+x)} = \sqrt{(x^3+x)(y^3+y)} \quad | \text{ возведём в квадрат}$$

$$(x^3+y)(y^3+x) = (x^3+x)(y^3+y)$$

$$x^3y^3+x^4+y^4+xy = x^3y^3+x^3y+xy^3+xy$$

$$x^4+y^4-x^3y-xy^3=0$$

$$x^3(x-y)-y^3(x-y)=0$$

$$(x^3-y^3)(x-y)=0$$

$x^3-y^3=0 \qquad x-y=0$

$x^3=y^3 \qquad x=y$

$x=y$

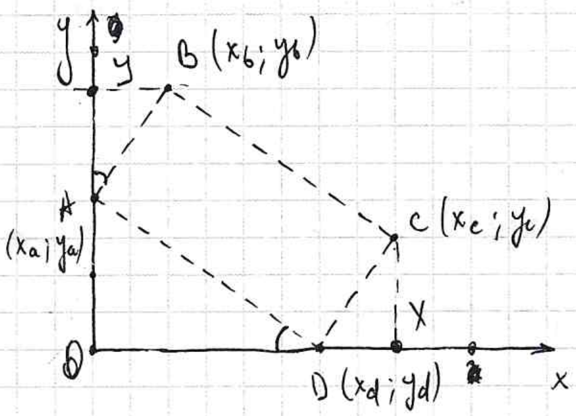
Данное уравнение ⇒ преобразуется в верное числовое равенство только при $x = y$, на необходимой области определения.

Значит, можно утверждать, что $x = y$.

+

Ответ: можно.

№ 11.5.



Рассмотрим произвольный прямоугольник ABCD с целочисленными координатами вершин. Т.к. стороны прямоугольника перпендикулярны друг другу и координатные прямые тоже перпендикулярны, то $\angle ADO = \angle BAY$, значит, их ~~тангенсы~~ синусы тоже равны $\Rightarrow$ $\frac{BY}{AB} = \frac{AO}{AD}$

т.к. прямоугольник ABCD — отличен от квадрата, то $AB \neq AD \Rightarrow$

Значит, $BY \neq AO$ и, но ~~как~~ так как $\frac{BY}{AB} = \frac{AO}{AD}$, и координаты вершин целочисленные, то $BY = nAO$

~~$AB = n \cdot AD$~~ $AB = nAD$, где $n \in \mathbb{Z}$

или равно 1 деленной на целое число. не обязательно!

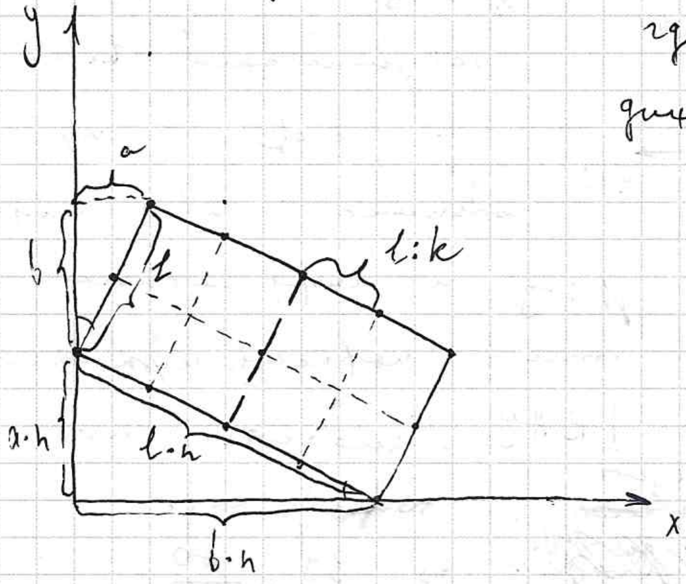
3

то a и b – тоже натуральные,
Значит, для того чтобы
исходное соотношение было верным
необходимо, чтобы было верным
соотношение $a^2+b^2=z^2$, решением
данной зависимости является
бесконечное множество троек
сторон египетских треугольников,
в общем виде $n\cdot3; n\cdot4; n\cdot5$, где
$n\in N$, также тройки вида
$n\cdot5; n\cdot12; n\cdot13$ и другие треугольники
ми с целочисленными сторонами.

Следовательно, соотношению
удовлетворяют бесконечно много
троек $x=a\cdot z^{1010}; y=b\cdot z^{1010}; z$, где
a, b, z – ~~сторон~~ тройки целочисленных
сторон прямоугольных треугольников

Значит, прямоугольник можно разбить минимум на n квадратов, сторона которых равна меньшей стороне прямоугольника, если меньшая сторона кратна какому-то целому числу k, то на $n\cdot k^2$ более мелких квадратов.

Пример разбиения:



где $n; k \in \mathbb{Z}$, все квадратного целые числа.

№11.4.

$x^2+y^2=z^{2022}$ – теорема Пифагора для ~~квадрата~~ прямоугольного ~~тре~~ треугольника со сторонами $x; y; z^{1011}$, т.к. x, y, z – целые и положительные то можно равносильно представить как

$(a\cdot z^{\cancel{1010}\,505})^2+(b\cdot z^{\cancel{1011}})^2=z^{\cancel{2022}}$

$a^2\cdot z^{2020}+b^2\cdot z^{2020}=z^2\cdot z^{2020}$

$a^2+b^2=z^2$, т.к. x, y и z – натуральные