ШИФР a14

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике в 11 классе

(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Иваницкий Георгий Сергеевич

Олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-
БУДУЩЕЕ НАУКИ

Чистовик

ШИФР a14
(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+	+	+	+	5
18	20	20	20	4

Заполняется проверяющим!

82

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№11.1

$f(x) = 2x^2 - 1$; $f(f(x)) < (f(x))^2$

Подставим $f(x)$. $2\cdot(f(x))^2 - 1 < (f(x))^2$; $(f(x))^2 < 1$

~~$-1 < (f(x))^2 < 1$~~ $-1 < f(x) < 1$

Подставим $f(x)$. Получим: $-1 < 2x^2 - 1 < 1$.

Прибавим к каждой из частей 1: $0 < 2x^2 < 2$.

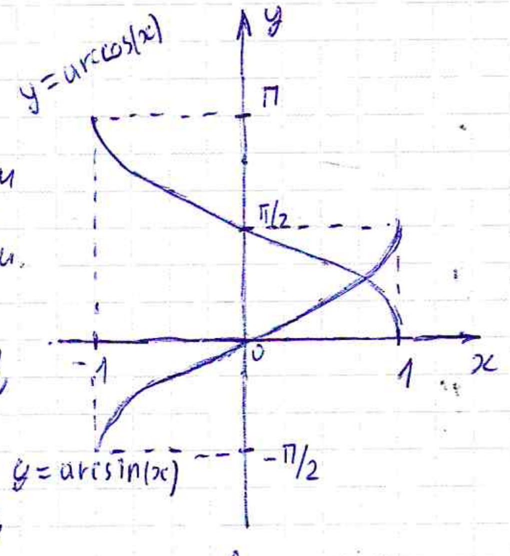
Разделим обе части на 2: $0 < x^2 < 1$.

Решение данного неравенства является $(-1;0)\cup(0;1)$.

Ответ: $x \in (-1;0)\cup(0;1)$.

№11.2

$y = (\arcsin x)(\arccos x)$



0. Построим графики функций арксинуса и арккосинуса. Оти, как и y, определены по $[-1;1]$.
1. Определим ~~максимум~~ знак данной функции. Заметим, что при $x \in [-1;0]$ $y \le 0$, а при $x \in [0;1]$ $y \ge 0$. Следовательно, минимум стоит искать при $x \in [-1;0]$, а максимум – при $x \in [0;1]$.
2. Определим минимум функции, искать его нужно при $x \le 0$. Заметим, что при приближении к $x = -1$ модули множителей увеличиваются. Следовательно, y минимальна при $x = -1$.

Минимум функции равен $\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\pi = -\frac{\pi^2}{2}$.

№ 11.2 (продолжение)

3. Пусть $a = \arcsin x$; $b = \arccos x$. Заметим, что на $[0;1]$ $a+b = \pi/2$ (следует из, например, формул приведения).

Тогда $b = \frac{\pi}{2} - a$, а $y = ab = a\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{\pi}{2}a - a^2$.

$y' = \frac{\pi}{2} - 2a$, следовательно, в точке с ~~произв~~ $a = \frac{\pi}{4}$ производная равна 0.

y' $+$ $-$ x
y $\nearrow$ $\frac{\pi}{4}$ $\searrow$

Следовательно, при $a = \frac{\pi}{4}$ y максимально.
При этом $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $y = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{16}$

$\frac{\pi^2}{16}$ - максимум функции.

Ответ: минимум $-\frac{\pi^2}{2}$; максимум $\frac{\pi^2}{16}$.

№ 11.3

$$\sqrt{x^3+y} + \sqrt{y^3+x} = \sqrt{x^3+x} + \sqrt{y^3+y}$$

Заметим, что это уравнение имеет смысл только при $x \geq 0$ и $y \geq 0$.

Возведем обе части уравнения в квадрат:

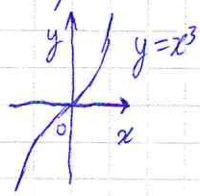
$$\cancel{x^3}+\cancel{y} + 2\sqrt{(x^3+y)(y^3+x)} + \cancel{y^3} + \cancel{x} = \cancel{x^3}+\cancel{x} + \cancel{2}\sqrt{(x^3+x)(y^3+y)} + \cancel{y^3} + \cancel{y}$$

$$\sqrt{(x^3+y)(y^3+x)} = \sqrt{(x^3+x)(y^3+y)}$$

$$(x^3+y)(y^3+x) = (x^3+x)(y^3+y)$$
$$\cancel{x^3y^3} + y^4 + \cancel{xy} + x^4 = \cancel{x^3y^3} + xy^3 + yx^3 + \cancel{xy}$$
$$y^4 + x^4 = xy^3 + yx^3$$

$(x^4 - xy^3) - (yx^3 - y^4) = 0$; $x(x^3 - y^3) - y(x^3 - y^3) = 0$; $(x-y)(x^3-y^3) = 0$

То есть, чтобы выполнялось исходное уравнение, необходимо, чтобы выполнялось либо $(x-y)=0$, либо $(x^3-y^3)=0$.



Из $(x-y)=0$ следует, что $x=y$.

Заметим, что график функции $y=x^3$ обладает следующим свойством: одно y соответствует только одному x (в отличие от $y=x^2$). Это значит, что если $x^3-y^3=0$, т.е. $x^3=y^3$, то $x=y$. Следовательно, x всегда равен y.

Подставим $y=x$ для того, чтобы убедиться в том, что при равных x и y уравнение верно: $\sqrt{x^3+x} + \sqrt{x^3+x} = \sqrt{x^3+x} + \sqrt{x^3+x}$; равенство.
Следовательно, можно утверждать, что $x=y$.
Ответ: $x=y$.

+

Олимпиада школьников
**БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-
БУДУЩЕЕ НАУКИ**

ШИФР 914
(заполняется сотрудником секретариата)

Чистовик

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№ 11.4

Рассмотрим числа $x = 4\cdot 5^{1010}$ и $y = 3\cdot 5^{1010}$. Имеем:

$x^2+y^2 = (4\cdot 5^{1010})^2 + (3\cdot 5^{1010})^2 = 16\cdot 5^{2020} + 9\cdot 5^{2020} = 25\cdot 5^{2020} = 5^{2022}$

То есть, мы получили тройку натуральных чисел: $x = 4\cdot 5^{1010}$; $y = 3\cdot 5^{1010}$ и $z = 5$. Все эти числа натуральные, т.е. тройка удовлетворяет условию. Теперь приведем способ получения других таких троек.
Пусть x_0, y_0 и z_0 — такие, что $x_0^2 + y_0^2 = z_0^{2022}$ (т.е. удовл. условию)
Рассмотрим натуральное число k. Умножим x_0 и y_0 на k^{1011}.
Имеем: $(k^{1011}\cdot x_0)^2 + (k^{1011}\cdot y_0)^2 = k^{2022}\cdot x_0^2 + k^{2022}\cdot y_0^2 =$
$= k^{2022}(x_0^2+y_0^2) = k^{2022}\cdot z_0^{2022} = (k z_0)^{2022}$

Так как k и k^{1011} натуральные, то и новая тройка: $x_0\cdot k^{1011}$; $y_0\cdot k^{1011}$ и $z_0\cdot k$ также натуральны. Количество натуральных чисел - бесконечно, поэтому и количество подходящих под условие троек чисел бесконечно. Некоторые из таких троек имеют вид:

$x = 4\cdot 5^{1010}\cdot k^{1011}$; $y = 3\cdot 5^{1010}\cdot k^{1011}$; $z = 5k$, где $k \in N$

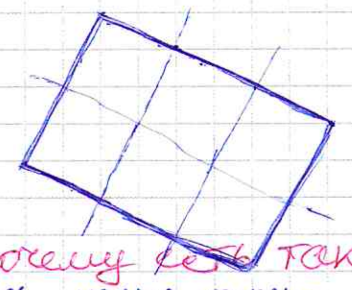
Вывод: троек, удовлетворяющих условию, — бесконечное количество.

+

№ 11.5

1. Если стороны прямоугольника параллельны осям координат, то способ разбиения очевиден: с помощью прямых, имеющих вид $x = a$ и $y = b$ для всех целых a и b, получится некоторое количество квадратов 1×1.

2. Прямоугольник не имеет сторон, параллельных осям координат. Пусть k - это угловой коэффициент одной из сторон (и той, что параллельна ей). Тогда коэффициент двух других сторон равен $-1/k$.



Рассмотрим количества точек почему есть такие т- сторон прямоугольника, имеющих целые координаты. Из перпендикулярности сторон следует, что расстояния между этими точками одинаковы. какого и как Из условия следует, что хотя бы на одной из пар почему? параллельных сторон есть не менее 3 таких точек (2 - вершины, 1 между ними).

№ 11.5 (продолжение)

Интересующее нас разбиение, следовательно, можно провести следующим образом: отметить на большей стороне все точки с целыми координатами; провести через них прямые, параллельные меньшей стороне; отметить все точки с целыми координатами на меньшей стороне и провести через них прямые, параллельные большей стороне.

Так как расстояния между прямыми равны, то полученные в ходе разбиения четырехугольники будут квадратами.

Вывод: требуемое разбиение всегда возможно.

не доказано!