ШИФР 933

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике в 11 классе
(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Круглов Егор Ильич

Олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

Чистовик

ШИФР 933
(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
$\mp$	$\mp$	+	+	−
12	8	20	20	0

60

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№1.

№11.1.

$f(f(x)) < (f(x))^2$, где $f(x) = 2x^2 - 1$.

$2\cdot(2x^2-1)^2 - 1 < (2x^2-1)^2$.

$(2x^2-1)^2 - 1 < 0$.

$(2x^2-1)^2 < 1$.

$-1 < 2x^2 - 1 < 1$. $\quad |+1$.

$0 < 2x^2 < 2 \quad |:2$.

$0 < x^2 < 1$

Т.к. $x^2 \geq 0$ для любых x, можем записать:

$x^2 < 1$.

$-1 < x < 1$.

$x \in (-1;1)$

Ответ: $x \in (-1;1)$.

№11.3.

1) Будем считать, что $x \neq y$. Тогда решим предложенное равенство.

$\sqrt{x^3+y} + \sqrt{y^3+x} = \sqrt{x^3+x} + \sqrt{y^3+y}$.

2). ОДЗ: $\begin{cases} x^3+y \geq 0 \\ y^3+x \geq 0 \\ x^3+x \geq 0 \\ y^3+y \geq 0 \end{cases}$

Т.к. ~~$\forall z$, $\forall f(x)$~~ ~~[illegible]~~ $\sqrt{f(z)} \geq 0$, где $f(z)>0$ - некая функция, возведём обе части равенства в квадрат:

$$x^3+y+y^3+x+2\sqrt{(x^3+y)\cdot(y^3+x)} = x^3+x+y^3+y+2\cdot\sqrt{(x^3+x)\cdot (y^3+y)}.$$

3) Мы не использовали модули подкоренных выражений, т.к. по ОДЗ они и так ≥ 0. Упростим равенство:

$$2\sqrt{(x^3+y)\cdot(y^3+x)} = 2\sqrt{(x^3+x)\cdot(y^3+y)}$$

$$(x^3+y)\cdot(y^3+x) = (x^3+x)\cdot(y^3+y)$$

$$x^3y^3+x^4+y^4+xy = x^3y^3+x^3y+xy^3+xy.$$

$$x^4+y^4 = x^3y+xy^3$$

$$x^4-x^3y-xy^3+y^4=0$$

$$x^3\cdot(x-y)-y^3\cdot(x-y)=0.$$

$$(x-y)\cdot(x^3-y^3)=0.$$

$$\left[\begin{array}{l} x-y=0 \\ x^3-y^3=0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=y \\ x^3=y^3 \end{array}\right.$$

4) $x^3=y^3$ только при $x=y$, ведь при возведении числа в нечётную степень знак сохраняется. Значит:

$$\left[\begin{array}{l} x=y \\ x=y \end{array}\right.$$

$x=y$.

+

Олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ- БУДУЩЕЕ НАУКИ

ШИФР 933
(заполняется сотрудником секретариата)

Чистовик

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№2

5) Мы пришли к тому, что $x=y$. Значит, что можно утверждать, что $x=y$ если $\sqrt{x^3+y}+\sqrt{y^3+x}=\sqrt{x^3+x}+\sqrt{y^3+y}$.

Ответ: да, можно.

№11.4.

$x^2+y^2=z^{2022}$.

1) можно представить, что это запись теоремы Пифагора для прямоугольного треугольника с катетами x и y, и гипотенузой z^{1011}.

2) Также существует египетский треугольник со сторонами 3;4;5. Если каждую из сторон домножить на некоторое число k, то получим верное равенство:

$(3k)^2+(4k)^2=(5k)^2$

$9k^2+16k^2=25k^2$

$25k^2=25k^2$ (верное равенство).

3). можно представить x, y, z^{1011} в виде: $z^{1011}=(5k)^{1011}=5\cdot k\cdot(5k)^{1010}$, где k - любое положительное целое число.

Тогда $x=3k\cdot(5k)^{1010}$; $y=4k\cdot(5k)^{1010}$, где k - такое же положительное целое число.

4) Подставим эти значения в изначальное равенство:

$$\left(3k\cdot(5k)^{1010}\right)^2+\left(4k\cdot(5k)^{1010}\right)^2=\left(5k\cdot(5k)^{1010}\right)^2.$$

$$9k^2\cdot(5k)^{2020}+16k^2\cdot(5k)^{2020}=25k^2\cdot(5k)^{2020}.$$

$$25k^2\cdot(5k)^{2020}=25k^2\cdot(5k)^{2020}$$ (верное равенство).

5) Значит, это верно, что x, y, z можно представить в виде:

$x=3k\cdot(5k)^{1010}$

$y=4k\cdot(5k)^{1010}$

$z=5k$, а $z^{1011}=5k\cdot(5k)^{1010}$ соответственно.

Т.к. $k=1;2;3\ldots$, то x, y, z - натуральные числа, а таких троек бесконечно много. (ч.т.д.)

+

№11.2.

$y=(\arcsin x)\cdot(\arccos x)$

1) $y'=\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{\arccos x-\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.$

—

2) $y'=0.$

$\dfrac{\arccos x-\arcsin x}{1-x}=0.$

$\arccos x-\arcsin x=0.$

$\arccos x=\arcsin x.$

~~[illegible]~~

3) Пусть $\arccos x=\arcsin x=z$.

Тогда $\cos(z)=\sin(z)$, $z\in[0;\frac{\pi}{2}]$, ведь $\arccos x\in[0;\pi]$; $\arcsin x\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

$z=\frac{\pi}{4}$, ведь $\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-
БУДУЩЕЕ НАУКИ

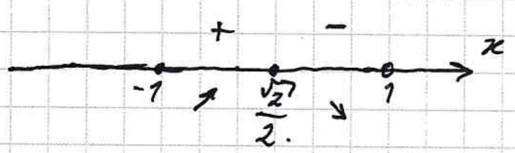
Чистовик

ШИФР 933
(заполняется сотрудником секретариата)

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№3.

4)



$x \in [-1; 1]$, ведь значения синусов и косинусов лежат в этом диапозоне.

Точками min и max. могут быть:
$x = -1$; $x = 1$; $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5) Из числовой прям. видно, что точкой максимума будет $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) \cdot \left(\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

$y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{4}$

$y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi^2}{16}$ – наибольшее значение функции.

6) ~~Также из числовой прямой~~ Проверим значения $y(-1)$ и $y(1)$, чтобы определить точку минимума:

$y(-1) = (\arcsin(-1)) \cdot (\arccos(-1))$

$y(-1) = -\frac{\pi}{2} \cdot \pi$

$y(-1) = -\frac{\pi^2}{2}$.

$y(1) = (\arcsin(1)) \cdot (\arccos(1))$

$y(1) = \frac{\pi}{2} \cdot 0$

$y(1) = 0$.

$-\frac{\pi^2}{2} < 0$ $\Rightarrow$ $y(-1) < y(1)$, а значит $x = -1$ – точка минимума.

$y(-1) = -\frac{\pi^2}{2}$ - наименьшее значение функции.

Ответ: $y = \frac{\pi^2}{16}$ - наибольшее значение функции; $y = -\frac{\pi^2}{2}$ - наименьшее значение функции.

№11.5.

1). Если рассматривать прямые, как бесконечно длинные, то любой прямоугольник можно разбить на квадраты со стороной 1.

Если $x_1 < x_2$, где x_1 и x_2 - координаты оси абсцисс двух верхних (или нижних) точек (которые лежат на прямой ∥ оси абсцисс), то вертикальные прямые будут иметь ур-я:

$x = x_1 + 1$; $x = x_1 + 2$; ... $x = x_2 - 1$.

Их кол-во будет $(x_2 - x_1) - 1$.

Если же $x_2 < x_1$, то:

$x = x_2 + 1$; $x = x_2 + 2$; ... $x = x_1 - 1$.

Для горизонтальных прямых будет аналогичная ситуация, только вместо x нужно подставлять y.

Если $y_1 > y_2$, где y_1 и y_2 - координаты двух точек, лежащих на прямой параллельной оси ординат.

$y = y_2 + 1$; $y = y_2 + 2$; ... $y = y_1 - 1$.

Олимпиада школьников
**БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-
БУДУЩЕЕ НАУКИ**

ШИФР 933
(заполняется сотрудником секретариата)

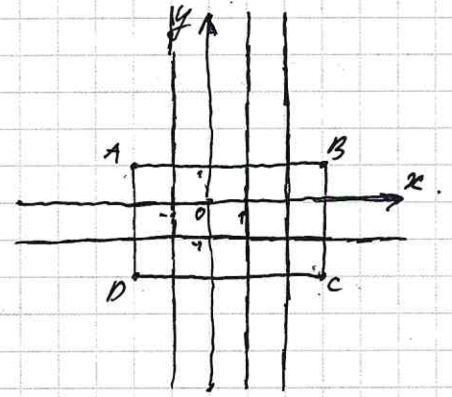
Чистовик

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№4

~~Если $y_2 > y_1$.~~
~~y_1+1, y_1+2, ... y_2-1.~~
~~Их кол-во будет $|y_1-y_2|-1$.~~

Вот пример:



A(-2;1); B(3;1);
C(3;-2); D(-2;-2).

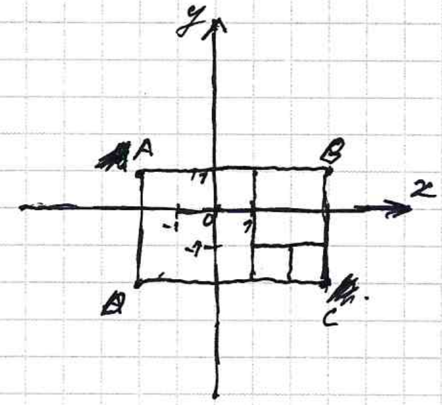
Мы видим, что прямоугольник разделился по квадратам со стороной 1, т.е. в нашем случае „по клеточкам”.

2). Кол-во прямых можно сократить считая, что прямые можно остановить с двух сторон, т.е. ограничить точками и превратить в отрезок. Тогда обозначим длиной прямоугольника большую сторону, а шириной меньшую. С одного из краёв нужно начать откладывать квадраты со стороной равной ширине прямоугольника.

Дальше ~~нужно перекорд~~ будем рассматривать оставшийся прямоугольник. (если он остался) в нём также определим длину и ширину. Опять отложим по максимуму квадратов со стороной равной ширине. Эту операцию нужно повторять, пока не получится заполнить оставшийся прямоугольник квадратами со стороной равной ширине прямоугольника.

Под ~~словом~~ сочетанием „отложим квадрат" имелось ввиду достроим квадрат проведя необходимые отрезки.

Пример:



$A(-2;1)$; $B(3;1)$;

$C(3;-2)$; $D(-2;-2)$.

3) В обоих случаях координаты вершин квадратов будут целочисленными, т.к. мы откладываем от вершин прямоугольника целочислен. длины сторон квадрата, попадая в точки с целочисленными координа-

Олимпиада школьников
**БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-
БУДУЩЕЕ НАУКИ**

Чистовик

ШИФР 933
(заполняется сотрудником секретариата)

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№5.

тали, а дальше из них также откладывая целочисленные длины сторон квадрата и опять же попадаем в точки с целочисленными координатами и т.д. Прямые в обоих случаях также будут параллельны сторонам прямоугольника.

тривиальный случай!