

ШИФР

а.65

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике в 11 классе
(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Безруков Владимир Александрович

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

$$N^{\circ} 1) f(f(x)) < (f(x))^2$$

$$f(x) = 2x^2 - 1$$

$$f(f(x)) = f(2x^2 - 1); (f(x))^2 = (2x^2 - 1)^2$$

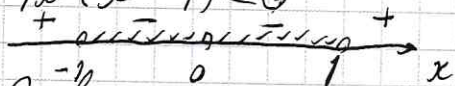
$$f(f(x)) = 2(2x^2 - 1)^2 - 1$$

$$2(2x^2 - 1)^2 - 1 < (2x^2 - 1)^2$$

$$8x^4 - 8x^2 + 2 - 1 < 4x^4 - 4x^2 + 1$$

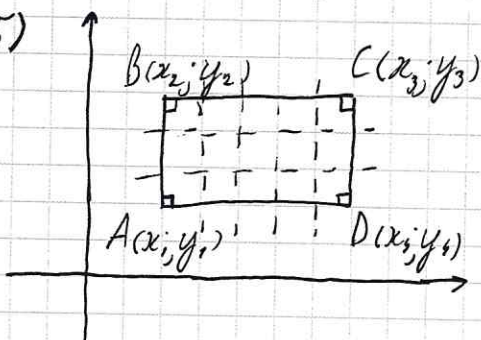
$$4x^4 - 4x^2 < 0$$

$$4x^2(x^2 - 1) < 0$$



Ответ: $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$

N^o 5)



Все x и y целочисленные.

$$x_1 = x_2, y_2 = y_3, x_3 = x_4, y_4 = y_1$$

И.к. все координаты вершин целочисленные, т.е. между

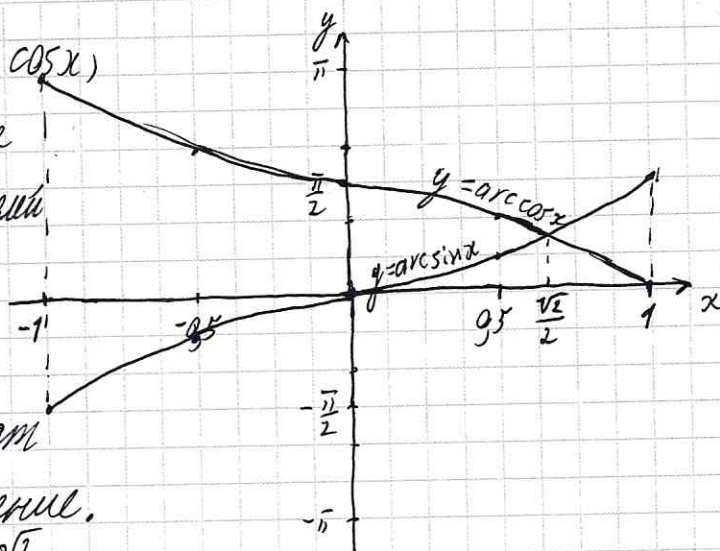
вершинами расстояние минимизи 1. В случае, когда оно больше единицы, т.е. 2, 3, ..., n , где $n \in \mathbb{N}$ можно провести линии, проходящие через целые значения координат. Таким образом любой подобный прямоугольник можно поделить на квадраты 1×1 .

Все их вершины будут лежать на целочисленных координатах, ведь все прямые, то вертикальные, то горизонтальные, проходят по целым значениям x и y , значит и их пересечения будут иметь целые x и y .

Стороны прямоугольника могут быть непараллельны осям координат!

№2) $y = (\arcsin x) \cdot (\arccos x)$

Углуб. = $-\frac{\pi^2}{2}$, т.к. в точке $x = -1$ один из множителей отрицательный, при этом модули обоих множителей принимают максимальное значение.



Углуб. = $\frac{\pi^2}{16}$, в точке $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, пересечении графиков $y = \arccos x$ и $y = \arcsin x$, в других значениях x произведение будет меньше. почему?

№3) $\sqrt{x^3+y} + \sqrt{y^3+x} = \sqrt{x^3+x} + \sqrt{y^3+y}$

Возведем обе части в квадрат

$$x^3+y + \sqrt{(x^3+y)(y^3+x)} + y^3+x = x^3+x + \sqrt{(x^3+x)(y^3+y)} + y^3+y$$

$$\sqrt{(x^3+y)(y^3+x)} = \sqrt{(x^3+x)(y^3+y)}$$

$$(x^3+y)(y^3+x) = (x^3+x)(y^3+y)$$

$$x^3y^3 + x^4 + y^4 + xy = x^3y^3 + x^3y + xy^3 + xy$$

$$x^4 + y^4 = x^3y + xy^3$$

$$x^4 - x^3y = xy^3 - y^4$$

$$x^3(x-y) = y^3(x-y)$$

либо $x-y=0$, что значит $x=y$

в противном случае (предположим что $x \neq y$), сократим

$$x^3 = y^3 \rightarrow x = y$$

x все равно равно y

Ответ: да, можно

№4) $x^2 + y^2 = z^{2022}$

Пример: $z = z^{2022} \cdot z^{2020} \cdot z^2$

если z кратен 5, то z^2 кратно 25.



Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+	+1/2	+1	+	+
40	10	19	20	0 69

Заполняется проверяющим

Фамилию, имя, отчество **НЕ** писать! Лист **НЕ** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

Будем брать все значки Z кратные 5

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

т.е. ~~любой~~ квадрат 5 можно разбить на сумму квадратов.

Пример: $Z = 5$

$$(4 \cdot Z^{1010})^2 + (3 \cdot Z^{1010})^2 = 25 \cdot Z^{2020} = Z^{2022}$$

Чтобы так работало со всеми Z кратными 5, добавим деления Z на 5,

$$\left(\frac{4Z}{5} \cdot Z^{1010}\right)^2 + \left(\frac{3Z}{5} \cdot Z^{1010}\right)^2 = Z^{2022} \quad \checkmark$$

Z - любое число кратное 5

