ШИФР а60

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по Математике в 11 классе

(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Козлов Егор Валерьевич

Олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

Чистовик

ШИФР а60
(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+	–	+	+	= 62
20	0	20	20	62

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

$\boxed{\Sigma = 62}$

продолжение задачи 11.3:

$$(x^3+y)(y^3+x) = (x^3+x)(y^3+y)$$

$$\underline{x^3y^3} + x^4 + y^4 + \underline{xy} = \underline{x^3y^3} + x^3y + xy^3 + \underline{xy}$$

$$x^4+y^4 = x^3y+xy^3$$

$$x^4 - x^3y = xy^3 - y^4$$

$$x^3(x-y) = y^3(x-y)$$

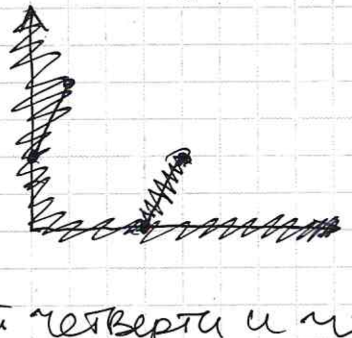
$x-y=0 \Downarrow x=y$

$x-y\neq 0 \Downarrow x^3 = y^3 \Rightarrow x=y$

т.е. да, можно утверждать.

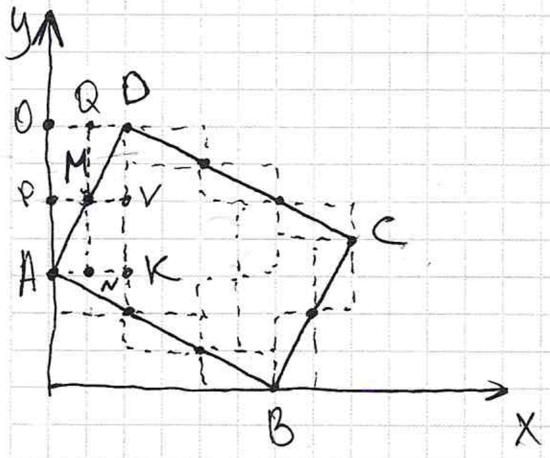
Ответ: да, можно. +

№ 11,5.



Заметим, что любой прямоугольник на координатной плоскости можно расположить в первой четверти и чтобы две ~~соседние~~ вершины принадлежали координатным осям:

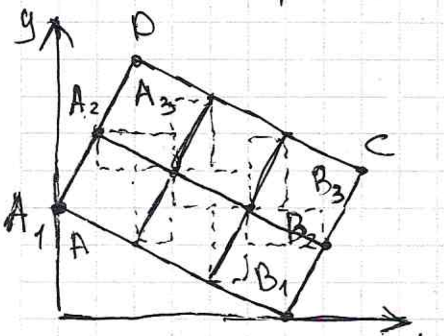
③



Вершины в целочисленных координатах. Тогда каждая сторона прямоугольника — диагональ какого-то прямоугольника с целочисленными вершинами и сторонами параллельными осям координат.

Рассмотрим точку A. Рассмотрим ближайшую к ней целочисленную точку принадлежащую стороне AD — т. M. Заметим, что AODK можно разбить по диагонали на прямоугольники с параллельными осям сторонами и целочисленными вершинами. (на рисунке это ANMP и MVDQ). ~~Назовем~~ (Назовем „хорошими" прямоугольники подобные ANMP и MVDQ). Заметим, что сторона AB также делится ~~хорошо~~ на диагонали хороших прямоугольников только повернутых на 90° по часовой стрелке относительно т. A. (т.к. угол $\angle DAB = 90°$). Так можно разделить все стороны прямоугольника.

Нет прямых разбиени ?



Пронумеруем точки — вершины хороших прямоугольников сторон AD и CB (по возрастанию координаты по y этих точек). Заметим, что $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, т.к. ее можно разбить на аналогичные хорошие

№ 11,1 данное неравенство имеет вид:

$$2(2x^2-1)^2-1 < (2x^2-1)^2$$

$$2(2x^2-1)^2-(2x^2-1)^2 < 1$$

$$(2x^2-1)^2 < 1 \Rightarrow \begin{cases} 2x^2-1>-1 \\ 2x^2-1<1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x^2>0 \\ 2x^2-2<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x^2<1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x>-1 \\ x<1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ x может принимать значения двух интервалов: $x\in(-1;0)$ или $x\in(0;1)$.

Ответ: $x\in(-1;0)$ или $x\in(0;1)$.

№ 11,2

Пусть:

$\arcsin x = A$ $\qquad$ $\arccos x = B$.

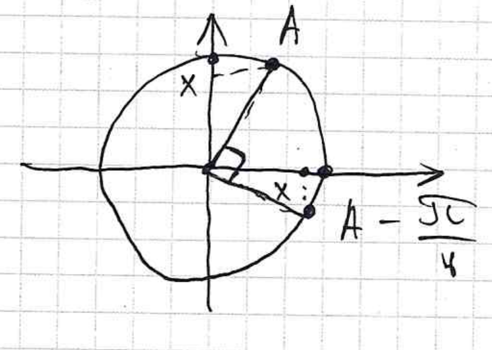
$\Downarrow$ $\qquad$ $\Downarrow$

$\sin A = x$ $\qquad$ $\cos B = x$

$y = (\arcsin x)(\arccos x)$

$y = AB$.

1) $y\to\max \Rightarrow AB\to\max$.



Заметим, что $\sin A = x$ и $\cos(A-\frac{\pi}{4})=x$. ? это не так.

Это одно из возможных решений системы

$$\begin{cases} \sin A = x \\ \cos B = x \end{cases}$$

Т.е. мы берем $B = A - \frac{\pi}{4}$.

Тогда $y = AB$

$$y = A\left(A - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = A^2 - \frac{A\pi}{4}$$ – ~~на~~ график – парабола с ветвями вверх. Максимума не существует.

Т.е. наибольшего значения не существует.

2) $y \to \min$.

$AB \to \min$.

$\sin A = x \quad \cos\left(A - \frac{\pi}{4}\right) = x. \Rightarrow \cos\left(A - \frac{\pi}{4} - 2\pi k\right) = x$

$k \in \mathbb{Z}$

Т.е. можно взять [redacted] какое-то положительное A и очень большое положительное k.

$$A\left(A - \frac{\pi}{4} - 2\pi k\right) = A^2 - \frac{A\pi}{4} - 2\pi k \cdot A.$$

это выражение убывает по k (линейно), т.е. минимума так же не существует, т.к. k – любое целое число.

Ответ: наибольшего и наименьшего значения не существует.

№ 11,3.

обе части уравнения, очевидно, не отрицательные. Возведем в квадрат.

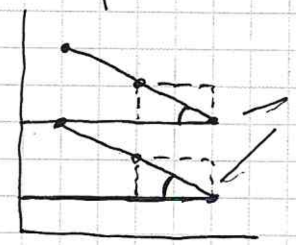
$$\left(\sqrt{x^3+y} + \sqrt{y^3+x}\right)^2 = \left(\sqrt{x^3+x} + \sqrt{y^3+y}\right)^2$$

$$x^3 + y + 2\sqrt{x^3+y} \cdot \sqrt{y^3+x} + y^3 + x = x^3 + x + 2\sqrt{x^3+x} \cdot \sqrt{y^3+y} + y^3 + y$$

$$2\sqrt{(x^3+y)(y^3+x)} = 2\sqrt{(x^3+x)(y^3+y)}$$

продолжение задачи №11.5.

прямоугольники. (только повернутые на 90°).
Аналогично все прямые вида A_iB_i.
Докажем что два отрезка, которые разбиваются ~~все~~ хорошими прямоугольниками лежат на параллельных прямых:



— углы наклона. Они равны т.к. они равны в хороших прямоугольниках.

Мы разбили ~~все~~ наш прямоугольник на прямоугольники вида $A_iA_{i+1}B_{i+1}B_i$.
Две стороны их равны AB, а другие — диагонали хороших прямоугольников.
Каждый такой прямоугольник можно разбить на квадраты со стороной равной диагонали хороших прямоугольников аналогичным образом ~~пункту~~. Мы разбили прямоугольник (любой) на квадраты удовлетворяющие условию.

ч.т.д.

~11,4

Рассмотрим $z = a$

$$x = pa^{1010} \qquad y = qa^{1010}$$

где $p^2+q^2=a^2$.

Тогда $x^2+y^2 = p^2a^{2020} + q^2a^{2020} = a^{2020}(p^2+q^2) =$

$= a^{2022}$

$$z^{2022} = a^{2022}.$$

Докажем, что троек натуральных чисел, которые удовлетворяют $p^2+q^2=a^2$ бесконечно много.

Действительно, $p = 3$ $q = 4$ $a = 5$ подходит

$3^2+4^2=5^2$

$25=25$ – верное ч.р.

Рассмотрим $p = 3\cdot 2^k$ $q = 4\cdot 2^k$ $a = 5\cdot 2^k$

где k – натуральное.

$$9\cdot 2^{2k} + 16\cdot 2^{2k} = 25\cdot 2^{2k}$$

$25\cdot 2^{2k} = 25\cdot 2^{2k}$ – верно. k – любое натуральное. Значит, таких троек чисел бесконечно много. А значит и троек вида

$z = a$ $x = p\cdot a^{1010}$ $y = q\cdot a^{1010}$, где $p^2+q^2=a^2$ (и все числа натуральные) также бесконечно много.

ч.т.д.

P.S: нам подходят тройки чисел:

$z = 5\cdot 2^k$, $x = 3\cdot 2^k(5\cdot 2^k)^{1010}$ $y = 4\cdot 2^k\cdot(5\cdot 2^k)^{1010}$

+

6