ШИФР a 47

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по МАТЕМАТИКЕ в 11 классе

(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Россохин Александр Владимирович

Олимпиада школьников
**БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-
БУДУЩЕЕ НАУКИ**

Чистовик

ШИФР 9 47
(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов	
+	+	+	+	±	96
20	20	20	20	16	

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№ 11.1 (лист № 1)

$f(x)=2x^2-1$

$f(f(x))<(f(x))^2$

$2(2x^2-1)^2-1<(2x^2-1)^2$

$(2x^2-1)^2<1$

$\begin{cases} 2x^2-1<1 \\ 2x^2-1>-1 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x^2<2 \\ 2x^2>0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2<1 \\ x^2>0 \end{cases}$

$\begin{cases} x<1 \\ x>-1 \\ \left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<0 \end{array}\right. \end{cases}$

$\begin{cases} x<1 \\ x>-1 \\ x\neq 0 \end{cases}$

Ответ: $x\in(-1;\ 0)\cup(0;\ 1)$

№ 11.2

$y=(\arcsin x)\cdot(\arccos x)$

Пусть $\arcsin x=\varphi$; $-\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$

Тогда $x=\sin\varphi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$; $\arccos x=\frac{\pi}{2}-\varphi$

$\frac{\pi}{2}\geq-\varphi\geq-\frac{\pi}{2}$

$\pi\geq\frac{\pi}{2}-\varphi\geq0$ – диапазон совпадает с множеством значений функции $\arccos x$.

Тогда $y = \varphi\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$

$$y = \frac{\pi}{2}\varphi - \varphi^2$$

$$y' = \frac{\pi}{2} - 2\varphi$$

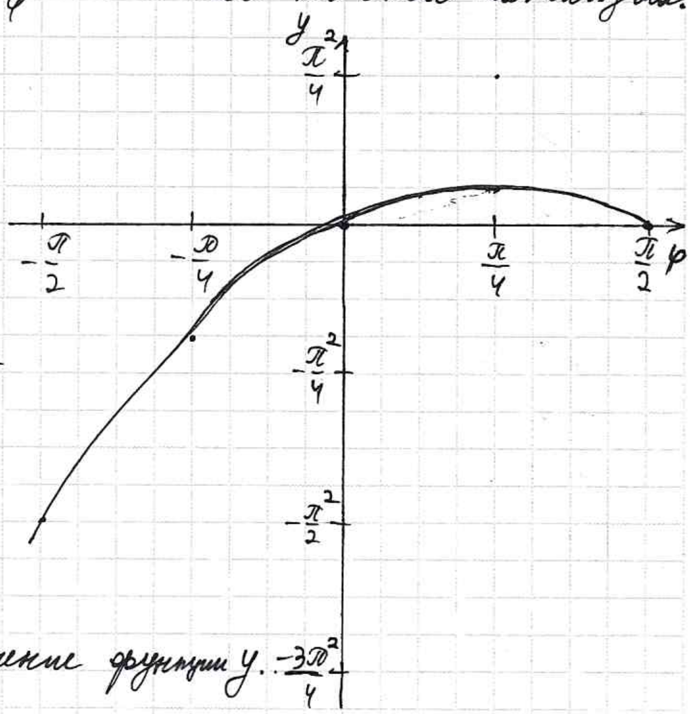
$$\frac{\pi}{2} - 2\varphi = 0$$

$\varphi = \frac{\pi}{4}$ – точка экстремума функции $y(\varphi)$

Так как функция $y(\varphi)$ квадратичная с отрицательным коэффициентом при φ^2, её график представляет собой параболу с направленными вниз ветвями. Тогда точка экстремума $\varphi = \frac{\pi}{4}$ является точкой максимума.

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{16}$$

$\frac{\pi^2}{16}$ – ~~максимальное~~ наибольшее значение y.



Для нахождения ~~минимального~~ наименьшего значения y рассмотрим крайние значения диапазона φ:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{2}$$

$y = -\frac{\pi^2}{2}$ – ~~минимальное~~ наименьшее значение функции y.

Ответ: наибольшее значение $\frac{\pi^2}{16}$;
наименьшее значение $-\frac{\pi^2}{2}$.

№11.3.

$$\sqrt{x^3+y} + \sqrt{y^3+x} = \sqrt{x^3+x} + \sqrt{y^3+y}$$

Так как обе части уравнения неотрицательны, возведём их в квадрат:

$$(x^3+y) + (y^3+x) + 2\sqrt{x^3+y}\cdot\sqrt{y^3+x} = (x^3+x) + (y^3+y) + 2\sqrt{x^3+x} + \sqrt{y^3+y}$$

Олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

ШИФР а47
(заполняется сотрудником секретариата)

Чистовик

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

$\sqrt{x^3+y}\cdot\sqrt{y^3+x} = \sqrt{x^3+x}\cdot\sqrt{y^3+y}$ (лист №2)

Так как обе части уравнения неотрицательны, возведем их в квадрат.

$$\begin{cases}(x^3+y)(y^3+x)=(x^3+x)(y^3+y) \quad (1)\\ x^3+y\geq 0\\ y^3+x\geq 0\\ x^3+x\geq 0\\ y^3+y\geq 0\end{cases}$$

Рассмотрим уравнение (1):

$(x^3+y)(y^3+x)=(x^3+x)(y^3+y)$

$x^3y^3+x^4+y^4+xy=x^3y^3+x^3y+xy^3+xy$

$x^4+y^4=x^3y+xy^3$

$(x^4-x^3y)+(y^4-xy^3)=0$

$x^3(x-y)-y^3(x-y)=0$

$(x^3-y^3)(x-y)=0$

$(x-y)^2(x^2+xy+y^2)=0.$

Рассмотрим уравнение относительно x, считая, что y — параметр:

$(x-y)^2=0$

$x-y=0$

$x=y$

$x^2+xy+y^2=0$

$D=y^2-4y^2=-3y^2$

уравнение имеет корень только при $y=0$, тогда $x=\frac{-y}{2}=0$

$x=y=0.$

Таким образом, можно утверждать, что $x=y$.

Ответ: можно.

+

№ 11.4.

Пусть $m, n \in$ ~~Nат~~ $\mathbb{N}$. Тогда $mn \in \mathbb{N}$, $m^n \in \mathbb{N}$.

Пусть a — натуральное число; $x^2+y^2=z^{2022}$, $x, y, z \in \mathbb{N}$.

~~$x_1 = ...$~~ Пусть $x_1 = a^{1011}x$; $y_1 = a^{1011}y$; $z_1 = az$.

Тогда $x_1^2+y_1^2 = a^{2022}x^2 + a^{2022}y^2 = a^{2022}(x^2+y^2) = a^{2022}z^{2022} = z_1^{2022}$

Таким образом, числа x_1, y_1, z_1 также удовлетворяют соотношению $x_1^2+y_1^2=z_1^{2022}$. Так как ~~так~~ множество натуральных чисел бесконечно, существует бесконечное множество таких троек чисел с разным коэффициентом a, что и требовалось доказать. Еще нужно ~~было~~ док-ть, что хотя бы одна тройка существует!

Альтернативное объяснение:

~~Так как~~, $z^{2022} = (z^{1011})^2$

$x^2+y^2=(z^{1011})^2$

Числа x, y и z^{1011} образуют пифагорову тройку. ~~Такая тройка существует: ее можно получить из тройки x_1, y_1, z_1 при условии~~

~~$x = z^{1010}x_1$; $y = z^{1010}y_1$~~

Докажем, что такая тройка существует.

Пусть √ x_1; y_1, z — пифагорова тройка. Тогда $z^{1010}x_1$; $z^{1010}y_1$; z^{1011} — пифагорова тройка (так как $z^{2020}x_1^2 + z^{2020}y_1^2 = z^{2020}(x_1^2+y_1^2) = z^{2020}z^2 = z^{2022}$).

Причем √ $x = z^{1010}x_1$; $y = z^{1010}y_1$; Значит, ~~эта~~ пифагорова тройка ~~x~~ x; y, z^{1011} существует.

Олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

Чистовик

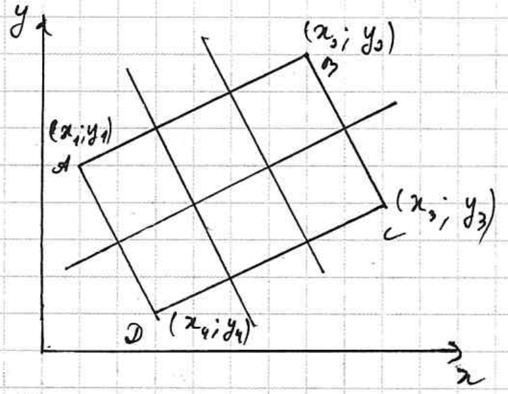
ШИФР а 47
(заполняется сотрудником секретариата)

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

пифагоровых троек бесконечное (лист №3)
множество, значит, существует бесконечное множество троек $x;\ y;\ z^{1011}$. Так как в натуральных числах ~~двух~~ можно однозначно соотнести z и z^{1011}, троек $x;\ y;\ z$ также бесконечное множество, что и требовалось доказать.

+

№ 11.5



Проведем прямые, параллельные сторонам прямоугольника через точки с целочисленными координатами, лежащие на сторонах прямоугольника.

А всегда ли есть такие точки?

Докажем, что эти прямые разбивают прямоугольник на квадраты с целочисленными координатами вершин.
Пусть сторона AB лежит на прямой $ax + by + c = 0$.
Тогда: $\begin{cases} ax_1 + by_1 + c = 0 \\ ax_2 + by_2 + c = 0 \end{cases}$

$a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0.$

$a(x_1 - x_2) = b(y_2 - y_1)$

$\frac{a}{b} = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$

~~$a = y_2 - y_1;\ b = x_1 - x_2;\ c = -ax_1 - by_1 = (y_1 - y_2)x_1 + (x_2 - x_1)y_1$~~

~~$a;\ b;\ c \in \mathbb{Z}$~~

~~[illegible]~~ $\frac{a}{b}$] Выберем такие a и b, чтобы дробь $\frac{a}{b}$ была несократима. Тогда $c = -(ax_1+by_1)$; $c \in \mathbb{Z}$

Расстояние между параллельными прямыми $ax+by+c_1=0$ и $ax+by+c_2=0$ равно $\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Расстояние между ближайшими целочисленными точками на прямой AB равно $\sqrt{a^2+b^2}$. обосно-вание?

Тогда расстояние между всеми прямыми, перпендикулярными AB, равно $\sqrt{a^2+b^2}$.

Так как $AD \perp AB$, уравнение прямой AD ~~[illegible]~~ выглядит как $-bx+ay+d=0$

Тогда расстояние между всеми прямыми, перпендикулярными AD, равно $\sqrt{(-b)^2+a^2} = \sqrt{a^2+b^2}$

Тогда для всех прямых, параллельных AB:

$|c_1-c_2| = a^2+b^2$, $\rightarrow$ ~~[illegible]~~. Если $c_1 \in \mathbb{Z}$, то $c_2 = \mathbb{Z}$.

Так как $c \in \mathbb{Z}$, для всех прямых, параллельных AB $c_x \in \mathbb{Z}$? Аналогично, для всех прямых, параллельных AD, $d_x \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим пересечение двух произвольных прямых:

$$\begin{cases} ax+by+c_x=0 \\ -bx+ay+d_x=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} abx+b^2y+c_xb=0 \\ -abx+a^2y+d_xa=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2x+aby+ac_x=0 \\ b^2x-aby-d_xb=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (b^2+a^2)y = c_xb+d_xa \\ \cancel{-bx+ay+d} \end{cases} \qquad \begin{cases} (a^2+b^2)x = ac_x-bd_x \\ \end{cases}$$

$$y = \frac{bc_x+ad_x}{a^2+b^2}; \qquad x = \frac{ac_x-bd_x}{a^2+b^2}$$

$\cancel{c_x = -(ax_1+by_1)+n(a^2+b^2)}$ $\cancel{n\in\mathbb{Z}}$

$d_x = -(\cancel{a}-bx_1+ay_1)+m(a^2+b^2)$; $\cancel{m\in\mathbb{Z}}$

Олимпиада школьников
**БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-
БУДУЩЕЕ НАУКИ**

Чистовик

ШИФР а 47
(заполняется сотрудником секретариата)

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

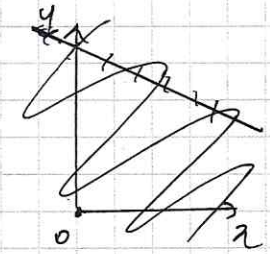
$c_x = c + n(a^2+b^2)$ (лист №4)

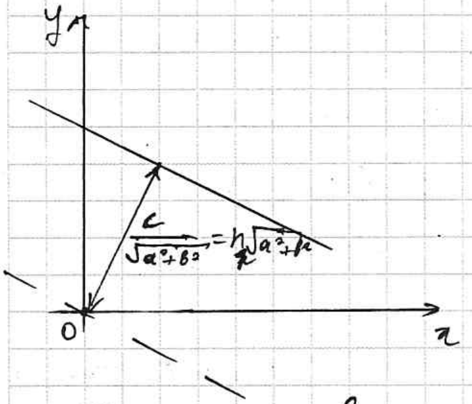
$d_x = d + m(a^2+b^2)$

Так как координаты ~~изначальн~~ вершин изначального прямоугольника ~~были~~ целочисленны,

$c = n_1(a^2+b^2)$ и $d = m_1(a^2+b^2)$, $n_1; m_1 \in \mathbb{Z}$.

(как показано на рисунке:





Тогда $c_x = (n+n_1)(a^2+b^2)$

$d_x = (m+m_1)(a^2+b^2)$.

Тогда $y = \frac{b(n+n_1)(a^2+b^2)+a(m+m_1)(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)} = b(n+n_1)+a(m+m_1)$

$b, n, n_1, a, m, m_1 \in \mathbb{Z} \to y \in \mathbb{Z}$.

$x = \frac{a(n+n_1)(a^2+b^2) - b(m+m_1)(a^2+b^2)}{a^2+b^2} = a(n+n_1) - b(m+m_1)$

$b, m_1, m, a, n, n_1 \in \mathbb{Z} \to x \in \mathbb{Z}$.

Значит, любые проведённые перпендикулярные прямые пересекаются в ~~целочисленных коорди~~ точках с целочисленными координатами.

Значит, все фигуры, на которые эти прямые разбивают прямоугольник, обладают целочисленными координатами вершин.

Так как линии параллельны либо перпендикулярны друг другу, то все углы прямые. Отрезки между точками пересечения равны расстояниям между соседними прямыми ($\sqrt{a^2+b^2}$ во всех случаях) в силу перпендикулярности. Таким образом, прямые делят прямоугольник на четырехугольники с прямыми углами и равными сторонами то есть на квадраты.

Прямые пересекаются в точках с целочисленными координатами и делят прямоугольник на квадраты, следовательно, они разбивают прямоугольник на квадраты с целочисленными координатами вершин.

Значит, можно провести несколько таких прямых, что и требовалось доказать.

2