ШИФР а 3
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике в 11 классе
(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Габатдуллин Руслан Рушанович

олимпиада школьников
**...УЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-
БУДУЩЕЕ НАУКИ**

ШИФР а3
(заполняется сотрудником секретариата)

Чистовик

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№ 11.3.

$$\sqrt{x^3+\underset{\geq 0}{y}}+\sqrt{y^3+\underset{\geq 0}{x}}=\sqrt{x^3+\underset{\geq 0}{x}}+\sqrt{y^3+\underset{\geq 0}{y}}$$

т.к обе части неотрицательны, возведем во 2 степень обе части.

$$\left(\sqrt{x^3+y}+\sqrt{y^3+x}\right)^2=\left(\sqrt{x^3+x}+\sqrt{y^3+y}\right)^2$$

$$\cancel{x^3}+\cancel{y}+\cancel{y^3}+\cancel{x}+2\sqrt{(x^3+y)(y^3+x)}=\cancel{x^3}+\cancel{x}+\cancel{y^3}+\cancel{y}+2\sqrt{(x^3+x)(y^3+y)}$$

$$2\sqrt{(x^3+y)(y^3+x)}=2\sqrt{(x^3+x)(y^3+y)} \quad |:2, \; 2>0$$

$$\sqrt{(x^3+\underset{\geq 0}{y})(y^3+\underset{\geq 0}{x})}=\sqrt{(x^3+\underset{\geq 0}{x})(y^3+\underset{\geq 0}{y})}$$ | возведем во 2 степень обе части.

$$(x^3+y)(y^3+x)=(x^3+x)(y^3+y)$$

$$\cancel{x^3y^3}+x^4+y^4+\cancel{xy}=\cancel{x^3y^3}+x^3y+xy^3+\cancel{xy}$$

$$x^4+y^4=x^3y+xy^3$$

Пусть ~~$x \geq y$ и~~ $x=y+b$ и $x \geq y$, т.е $b \geq 0$

Тогда $(y+b)^4+y^4=(y+b)^3y+(y+b)y^3$

л.ч $= y^4+b^4+4by^3+4b^3y+6y^2b^2+y^4 =$
(левая часть)

$=$ п.ч $=(y^3+3y^2b+3b^2y+b^3)y+y^4+by^3$
(правая часть)

л.ч = п.ч, $2y^4+b^4+4by^3+4b^3y+6y^2b^2=2y^4+4y^3b+3b^2y^2+yb^3$

$$b^4+3y^2b^2+3b^3y=0$$

$$b^2(b^2+3y^2+3by)=0$$

~~(1): $b^2+3y^2+3by=0$~~

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l} b=0 \\ b^2+3y^2+3by=0 \;(1)\end{array}\right. \\ b\geq 0\end{cases}$$

(продолжение на стр № 2)

№ 11.1.

$$f(x) = 2x^2 - 1$$

$$f(f(x)) < (f(x))^2$$

$$f(f(x)) = 2(2x^2-1)^2 - 1;$$

$$(f(x))^2 = (2x^2-1)^2$$

$$2(2x^2-1)^2 - 1 < (2x^2-1)^2$$

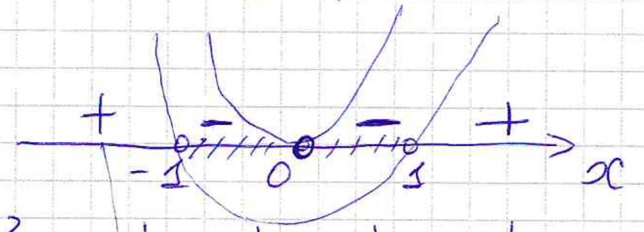
$$(2x^2-1)^2 - 1^2 < 0$$

$$(2x^2-1-1)(2x^2-1+1) < 0$$

$$2x^2 \cdot 2(x^2-1) < 0 \quad | : 4, \; 4>0$$

~~y=x^2~~

$$x^2(x^2-1) < 0$$



$y=x^2$	+	+	+	+
$y=x^2-1$	+	−	−	+

$$x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$$ ~~(или $-1 \le x < 0$~~

Ответ: $x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$

№ 11.2.

$$y = (\arcsin x) \cdot (\arccos x) \quad ; -1 \le x \le 1$$

Область множество значений определения функции: $y = \arcsin x : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$,

т.е. $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$

Область определения функции $y = \arccos x : [0; \pi]$,

т.е. $0 \le \arccos x \le \pi$.

Если не обращать внимание на функции и принять их за переменные а и в,

Олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-
БУДУЩЕЕ НАУКИ

Чистовик

ШИФР a 3
(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+	+.	+	—	—
20	20	20	0	0

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№11.3 (продолжение)

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b^2+3y^2+3by=0 \quad (1) \end{array} \right. \\ b\geq 0 \end{cases}$$

также мы знаем, что $y \geq 0$, т.к $\sqrt{y^3+y}$ - ~~до~~ подкоренное выражение неотрицательно.

(1): $b^2+3y^2+3by=0$

~~по оценка~~ $b^2 \geq 0$; ~~$3y^2\geq 0$;~~

$3y^2 \geq 0$

$3by \geq 0$

$b^2+3y^2+3by \geq 0$ при любых возможных b и y.

Равенство достигается,

• если $y=0$, то $b=0 \Rightarrow x=y+0 \Rightarrow x=y$

• если $y>0$, то $b=0 \Rightarrow x=y$

получаем, что $\begin{cases} b=0 \\ b\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow b=0.$

Получаем, что при любых x и y: $b=0$, то есть $x=y$; $\boxed{\text{Аналогичное получим при } y=x+b, \text{ т.к } x^4+y^4=yx^3+xy^3 \text{ — симметрическое уравнение}}$

Тогда можно утверждать, что $x=y$

Ответ: да, можно.

(+)

№2

№ 11.2 (продолжение)

то можно легко найти наибольшее и наименьшее значение их произведения, т.е $y = a \cdot b$.

тогда, если $-\frac{\pi}{2} \le a \le \frac{\pi}{2}$; $0 \le b \le \pi$

, то $y_{наиб} = \pi \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}$

$y_{наим} = -\frac{\pi}{2} \cdot \pi = -\frac{\pi^2}{2}$

Теперь нужно проверить есть ли такое значение x, при котором:

1) $\begin{cases} \arcsin x = \frac{\pi}{2} \\ \arccos x = \pi \end{cases}$; ~~x=~~

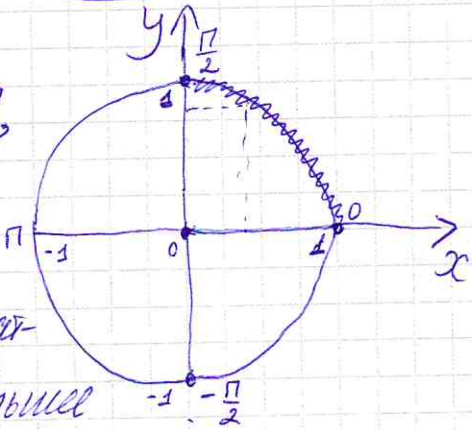
2) $\begin{cases} \arcsin x = -\frac{\pi}{2} \\ \arccos x = \pi. \end{cases}$

в 1): $\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ — неверно, значит, $y_{наиб} \ne \frac{\pi^2}{2}$

в 2) $\begin{cases} x = -1 \\ x = -1 \end{cases}$ — верно, значит,

$\underline{y_{наим} = -\frac{\pi^2}{2}}$.

Осталось найти y наибольшее:



Заметим, что, если $x \in [-1; 0]$, то $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}; 0]$, т.е $\arcsin x \le 0$; $y_{наиб} = 0$

Тогда этот участок мы не рассматриваем, т.к хотим получить наибольшее значение y. Заметим, что при $x \in [0; 1]$:

$\arcsin(x) \in [0; \frac{\pi}{2}]$ и $\arccos x \in [0; \frac{\pi}{2}]$

Пусть $\sin a = x$, тогда $\arcsin x = a$;

Олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

Чистовик

ШИФР а3
(заполняется сотрудником секретариата)

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

Пусть $\cos\beta = x$, тогда $\arccos \cancel{\beta}^{x} = \beta$

получаем, что $\sin a = \cos \beta$

~~как ранее~~ мы рассматриваем $a \in [0; \frac{\pi}{2}]$; $\beta \in [0; \frac{\pi}{2}]$

~~(ранее было прописано~~

тогда, получаем, что $\beta = 90 - a$.
(использовал тригонометрическое св-во)

$y = a \cdot \beta$; подставим $\beta = 90 - a$;

$y = a(90 - a) = 90a - a^2$ — парабола, с ~~вершин~~ ветвями вниз, ~~вершина~~ максимум в вершине.

$y_{наиб}$ при $a = 45°$ или $a = \frac{\pi}{4}$;

~~$y_{наиб} = \pi$~~ ~~cos~~ $\beta = 45°$, или $\beta = \frac{\pi}{4}$

$y_{наиб} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{16}$; $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

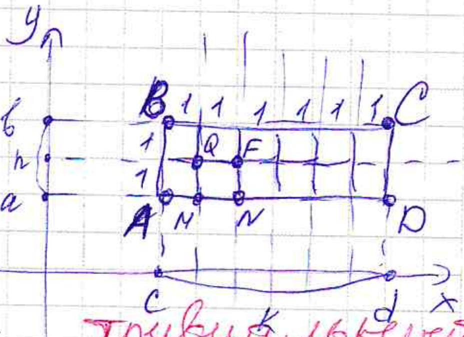
Получаем $y_{наиб} = \frac{\pi^2}{16}$ при $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$y_{наим} = -\frac{\pi^2}{2}$ при $x = -1$

Ответ: $y_{наиб} = \frac{\pi^2}{16}$ при $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ +

$y_{наим} = -\frac{\pi^2}{2}$ при $x = -1$.

№ 11.5



Т.к координаты прямоугольника — целочисленные, то $n = b - a$ и $k = d - c$ — целые числа, ~~значит~~, т.е n; k — целочисленные стороны прямоугольника.

Тривиальный случай!

Тогда мы можем разделить сторону AB на n сторон, равных 1 единицы, проводя ~~параллельные~~

№5

№ 11.5 (продолжение)

прямые, параллельные BC и AD (BC||AD (определ))
в количестве n - 1 ~~штук~~.

Аналогично, с другой парой параллельных сторон прямоугольника ABCD : BC и AD:
проводя K - 1 ~~параллельных~~ прямых, параллельных AB и CD. (AB||CD). разделим стороны K отрезков, ~~по 1 едини~~ длиной 1 единица каждого.

Тогда мы получим n · K квадратов (равных) с длиной = 1 единицы, где кординаты вершин данных квадратов будут целочисленные (т.к a, b, c, d - изначально целые, и координаты вершин квадратов будут. целочисленными, т.к 1 - целое число),
(пример координат вершин квадратов:
MNFQ: M(c+1; a); N(c+2; a); F(c+2; a+1);
Q(c+1; a+1) - целые.

Ч.Т.Д

№ 11.4

$x^2+y^2=z^{2022}$

$x^2+y^2=(z^{2011})^2$ — бесконечное кол-во нат-ых троек.

№ 6