ШИФР 931
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике в 11 классе
(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Щавлева Ксения Владимировна

Дата рождения 3 0 . 0 8 . 2 0 0 4

Олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-
БУДУЩЕЕ НАУКИ

Чистовик

ШИФР a31
(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+	+	+.1	+	−0
20	20	18	20	1 | 79

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№11.1

$f(f(x)) < (f(x))^2$; $f(x) = 2x^2-1$

$f(f(x)) = 2(2x^2-1)^2-1$

$(f(x))^2 = (2x^2-1)^2$

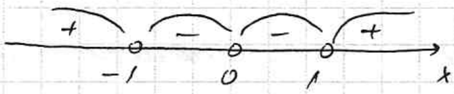
$2(2x^2-1)^2-1 < (2x^2-1)^2$

$(2x^2-1)^2 < 1$

$(2x^2-1-1)(2x^2-1+1) < 0$

$(2x^2-2)(2x^2) < 0$

$2\cdot 2(x-1)(x+1)x^2 < 0$



$x \in (-1;0) \cup (0;1)$

Ответ: $x \in (-1;0) \cup (0;1)$

№11.2

$y = (\arcsin x)\cdot(\arccos x)$.

Рассмотрим $f(x) = \arcsin x$ и $g(x) = \arccos x$ и построим графики этих функций

$f(x) = \arcsin x$, $x \in [-1;1]$, $f(x) \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

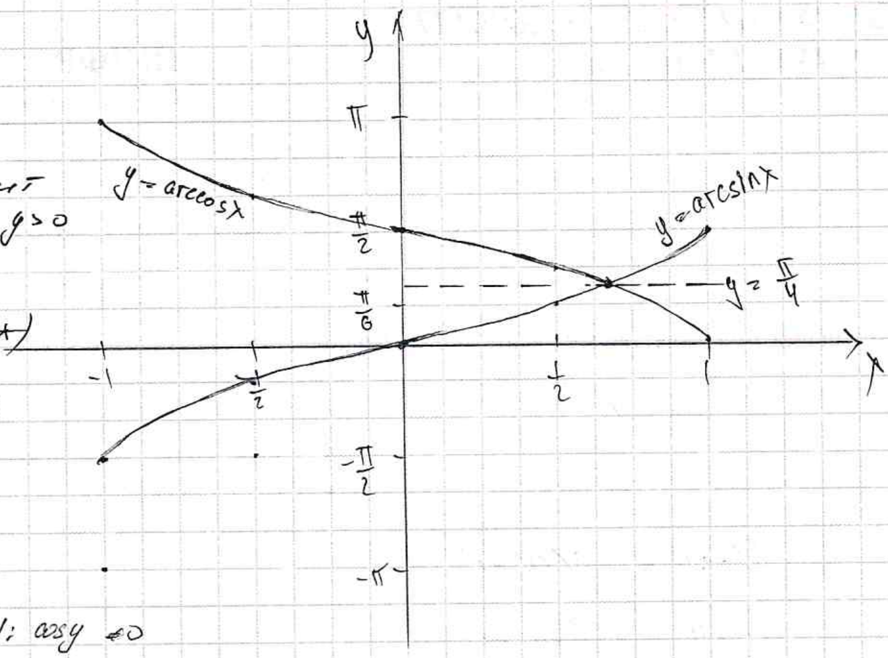
$g(x) = \arccos x$, $x \in [-1;1]$, $g(x) \in [0;\pi]$

Найдем точку пересечения этих функций

$\arcsin x = \arccos x$

Т. пересечения лежит в первой четверти, $x > 0$, $y > 0$

~~$\sin(\arcsin x) = \sin(\arccos x)$~~



$y = \arcsin x = \arccos x$

$$\begin{cases} \sin y = x \\ \cos y = x \end{cases}$$

$\Downarrow$

$\sin y = \cos y \quad | : \cos y \neq 0$

$\operatorname{tg} y = 1$

$y = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Но $y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ для $\arcsin x$

и в $[0; \pi]$ для $\arccos x$

Т.к. мы ищем точку пересечения функций, то

$y \in [0; \frac{\pi}{2}]$

$y = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ y \in [0; \frac{\pi}{2}] \Rightarrow y = \frac{\pi}{4}$

Чтобы произведение было наименьшим множители должны быть разных знаков и наибольшие по модулю.

Очевидно, что при $x = -1$ значения функций имеют разные знаки и исходя из значений наибольшие по модулю. Значит наименьшее значение функции $g = (\arcsin x)(\arccos x) =$

$= \pi \cdot (-\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi^2}{2}$

Наибольшее значение достигается, когда значения функции $g(x)$ и $f(x)$ одного знака и наибольшие по модулю. Одного знака значения при $x \in$ ~~$[0;1]$~~. $(0; 1)$

По графику очевидно, что функции симметричны относительно

(2) прямой $y = \frac{\pi}{4}$

Тогда при каждом x произведение значений функций можно записать как $\left(\frac{\pi}{4}+a\right)\cdot\left(\frac{\pi}{4}-a\right)=\frac{\pi^2}{16}-a^2$, где a — расстояние от прямой $y=\frac{\pi}{4}$ до ординаты графика $y=\arccos x$ при произвольном x.

Но в точке пересечения $a=0$ и произведение будет равно $\frac{\pi^2}{16}$.

Тогда для всех $x\in(0;1)$ произведение будет равно $\frac{\pi^2}{16}-a^2$, а для точки пересечения $\frac{\pi^2}{16}$

$\frac{\pi^2}{16}>\frac{\pi}{16}-a^2$ при любом значении.

Значит $\frac{\pi^2}{16}$ - наибольшее значение функции.

Ответ: наим. — $\left(-\frac{\pi^2}{2}\right)$. наиб. — $\left(\frac{\pi^2}{16}\right)$. +

№ 11.3

$$\sqrt{x^3+y}+\sqrt{y^3+x}=\sqrt{x^3+x}+\sqrt{y^3+y}$$

Обе части неравенства неотрицательные => можно возвести обе части в квадрат

$$\cancel{x^3}+\cancel{y}+\cancel{y^3}+\cancel{x}+2\sqrt{x^3+y}\cdot\sqrt{y^3+x}=\cancel{x^3}+\cancel{x}+\cancel{y^3}+\cancel{y}+2\sqrt{x^3+x}\cdot\sqrt{y^3+y}$$

$$\sqrt{x^3+y}\cdot\sqrt{y^3+x}=\sqrt{x^3+x}\cdot\sqrt{y^3+y}$$

Обе части неотрицательные => можно возвести в квадрат

$$(x^3+y)(y^3+x)=(x^3+x)(y^3+y)$$

$$\cancel{x^3y^3}+x^4+y^4+\cancel{xy}=\cancel{x^3y^3}+x^3y+xy^3+\cancel{xy}$$

$$x^4-x^3y+y^4-xy^3=0$$

$$x^3(x-y)+y^3(y-x)=0$$

$$x^3(x-y)-y^3(x-y)=0$$

$$(x-y)(x^3-y^3)=0$$

$$(x-y)(x-y)(x^2+xy+y^2)=0$$

>0 при всех x и y

Тогда $x=y$ ч.т.д.

$x^2+xy+y^2=0$

$D=y^2-4y^2=-3y^2$

$D\leq 0$

$D=0$ при $y=0$

~~a~~

$a=1>0$ =>

=> $x^2+xy+y^2>0$ при всех x и y

при $x=y=0$

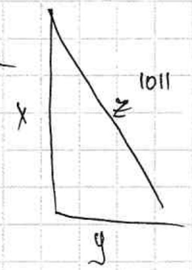
(+.) 3

0.

№ 11.4

Рассмотрим египетский треугольник. У него катеты равны 3 и 4, а гипотенуза 5. Такие треугольники со ~~сторонами~~ сторонами $3a$, $4a$ и $5a$ будет прямоугольным и подобным египетскому.

$a \in N$.



Тогда рассмотрим прямоугольный треугольник, когда такой треугольник существует, а ~~то~~ x, y, z — натуральные условие выполняется.

Известно, что треугольник со сторонами $3a$, $4a$ и $5a$ всегда прямоугольный. $(9a^2+16a^2=25a^2)$.

Тогда пусть $x=3a$, $y=4a$, а $z^{1011}=5a$

$a=\frac{z^{1011}}{5}$. Чтобы x и y были натуральными $a \in N$.

~~z~~ Тогда число z^{1011} должно делиться на 5.

Пусть тогда $z=5k$, где $k \in N$.

$$a=\frac{(5k)^{1011}}{5}=\frac{5^{1011}\cdot k^{1011}}{5}=5^{1010}\cdot k^{1011}$$

$$x=3\cdot a=3\cdot 5^{1010}\cdot k^{1011}$$

$$y=4a=4\cdot 5^{1010}\cdot k^{1011}$$

$$z=5k$$

~~z~~

$$x^2+y^2=9\cdot 5^{2020}\cdot k^{2022}+16\cdot 5^{2020}\cdot k^{2022}=$$

$$=25\cdot 5^{2020}\cdot k^{2022}=5^{2022}\cdot k^{2022}=(5k)^{2022}.$$

Значит при любом натуральном k мы ~~сто~~ ~~сто~~ сможем найти числа x и y, которые будут целыми и при котором будет выполняться $x^2+y^2=z^{2022}$

Натуральных чисел бесконечное множество, значит бесконечное множество значений k можно подобрать. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ можно подобрать бесконечное множество троек $x=3\cdot 5^{1010}\cdot k^{1011}$, $y=4\cdot 5^{1010}\cdot k^{1011}$, $z=5k$ $(k \in N)$

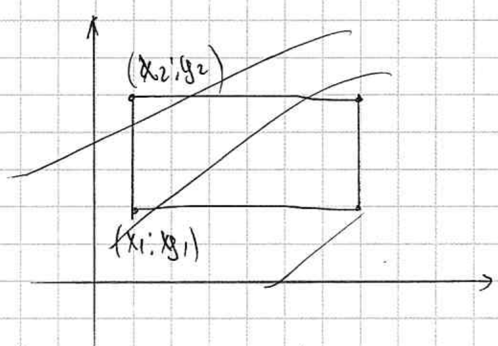
+

ч.т.д.

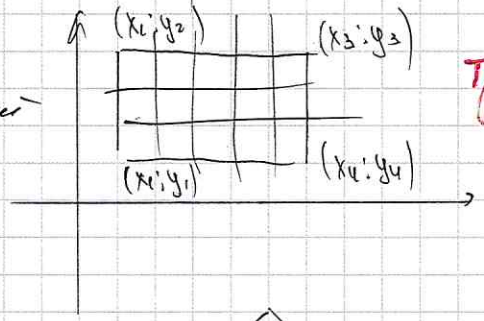
4

№ 11.5

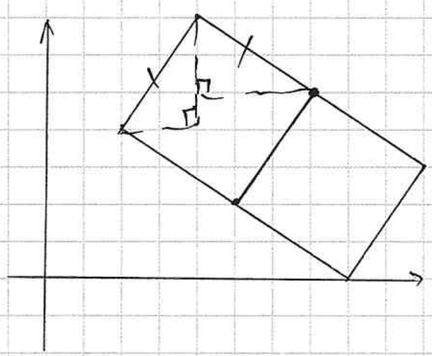
Не имеет значения как расположен прямоугольник относительно осей.

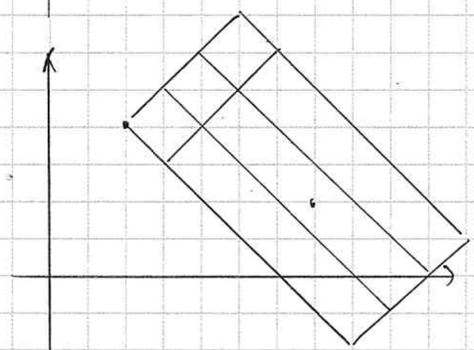


Если стороны прямоугольника параллельны осям, то можно ~~п~~ провести прямые, ~~совпадающие~~ проходящие через каждый единичный отрезок



Тривиальный случай!





Если ~~стороны~~ на стороне прямоугольника только два узла сетки (вершины), то нельзя проводить прямую, перпендикулярную этой стороне. Чтобы получить нужное разбиение нужно проводить прямые, перпендикулярные сторонам из узлов сетки. Т.к. стороны перпендикулярны, то эти прямые будут параллельны сторонам.

можно ли?

и получим ли квадраты?