ШИФР 922

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по Математике в 11 классе

(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Клешнин Роман Олегович

Олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

Чистовик

ШИФР a22
(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов	
+	−	+	+	5 −	Σ
20	4	20	20	4	68

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№11.1

$f(f(x)) < (f(x))^2 \qquad f(x) = 2x^2-1$

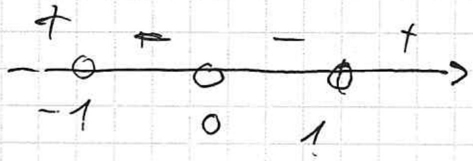
$2\cdot(2x^2-1)^2-1 < (2x^2-1)^2$

$(2x^2-1)^2-1<0$

$2x^2(2x^2-2)<0$

$2x^2(2(x-1)(x+1))<0$

$4x^2(x-1)(x+1)<0 \qquad x\neq 0;\ 1;\ -1$



$\cancel{0<x<1} \qquad -1<x<1$

$\cancel{x<}-1 \qquad x\neq 0$

Ответ: $-1<x<1;\ x\neq 0$

№2.

Т.к. наибольшее значение $\sin x\cdot\cos x$ принимает при $x=\frac{\pi}{4}$ (т.к. $\sin x\cdot\cos x=\frac{\sin 2x}{2}$, $\sin x = 1$ при $x=\frac{\pi}{2}$, а $\sin 2x$ при $x=\frac{\pi}{4}$), то наибольшее значение y, при $y=\arcsin x\cdot\arccos x$ при $x=\sin\frac{\pi}{4}$, т.е. $x=\frac{1}{\sqrt2}$.

При $x=\frac{1}{\sqrt2}$ $\arccos x=\arcsin x=\frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\arcsin x\cdot\arccos x)_{max}=\frac{\pi^2}{16}$

№1.3.

$\sqrt{x^3+y}+\sqrt{y^3+x}=\sqrt{x^3+x}+\sqrt{y^3+y}$

ОДЗ:

$x^3 \geq -y$

$y^3 \geq -x$

$x^3 \geq x$

$y^3 \geq y$

Возведём обе части данного уравнения в квадрат: $\sqrt{\ }+\sqrt{\ } \geq 0$!

$x^3+y+y^3+x+2\sqrt{(x^3+y)(y^3+x)}=x^3+x+y^3+y+$
$+2\sqrt{(x^3+x)(y^3+y)}$

$\sqrt{x^3y^3+x^4+y^4+xy}=\sqrt{x^3y^3+x^3y+y^3x+xy}$ $\sqrt{\ } \geq 0$!

$x^3y^3+x^4+y^4+xy=x^3y^3+x^3y+y^3x+xy$

$x^4-x^3y+y^4-y^3x=0$

$x^3(x-y)-y^3(x-y)=0$

$(x-y)(x^3-y^3)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=y \\ x^3=y^3 \end{array}\right.$

Т.к. у x^3 и y^3 нечётная степень, то выражение $x^3=y^3$ равносильно выражению $x=y$

Ответ: да, можно

+

№2

Найдём ограничения $\arcsin x$ и $\arccos x$

Олимпиада школьников
**БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-
БУДУЩЕЕ НАУКИ**

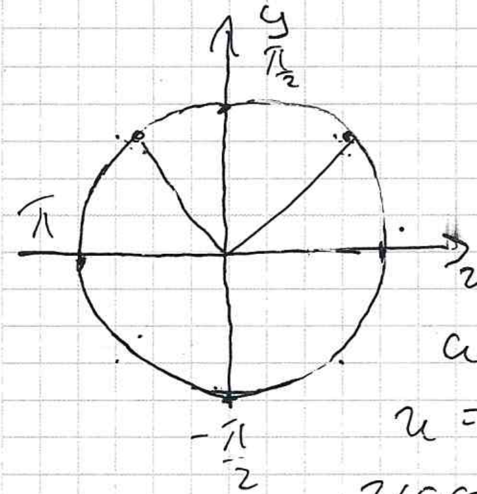
ШИФР а22
(заполняется сотрудником секретариата)

Чистовик

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№2(прод.)

Для этого на координатной плоскости построим окружность с ед. радиусом



Тогда можно увидеть, что $-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}$ и $0 \le \arccos x \le \pi$

И тогда наибольшее значение $\arcsin x \cdot \arccos x$ будет при $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ т.к. при $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ на графике строится биссектриса, которая равноудалена от обеих координат

~~$y_{наиб} = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi^2}{16}$~~

~~$y_{наим}$ будет при $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ (т.к. $\arccos x = \arccos x$~~

$y_{наим} = \arcsin -1 \cdot \arccos -1 = -\frac{\pi^2}{2}$

$y_{наиб} = \arcsin 1 \cdot \arccos 1 = \frac{\pi^2}{2}$ это не так.

№11.4.

$x^2 + y^2 = z^{2022}$ $x \in N$; $y \in N$; $z \in N$

Скажем, что $b = z^{1011}$, тогда:

$x^2 + y^2 = b^2$

Сразу видно, что x, y и b - стороны пифагорого треугольника, скажем, что $x = 3k$, $y = 4k$, $b = 5k$, где $k \in N$, тогда $5k = z^{1011}$, $k = \frac{z^{1011}}{5}$

и уже здесь мы видим, что при любых z

кратным 5 данное равенство выполняется ($x^2+y^2=z^2$), т.к. $k \in N$ и $z \in N$

Конечно это равенство выполняется для ~~любых~~ искомых нечётных $z > 3$

~~5-z=~~

$(5k)^2=(3k)^2+(4k)^2$

$(13k)^2=(12k)^2+(5k)^2$

$(25k)^2=(24k)^2+(7k)^2$

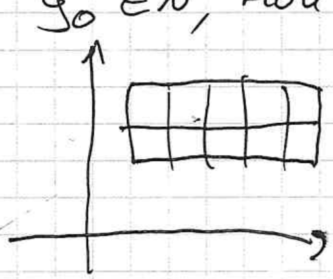
$\vdots$

Что доказывает, что таких z, y бесконечное множество

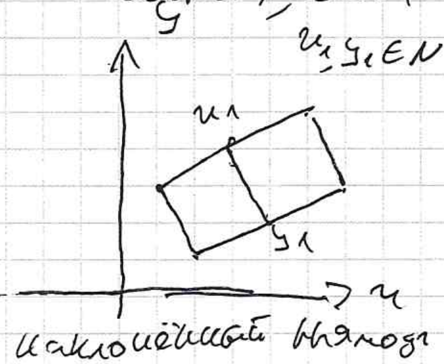
№ 11.5.

Док-во:

Разделим данные прямоугольники на две группы: прямые и наклонённые. Прямые построены из двух прямых $x=a_1$; $x=a_2$ и двух $y=c_1$ $y=c_2$. Такие прямоугольники всегда будут делиться на квадраты с целочисленными координатами вершин, т.к. в данном прямоуг. если ~~x~~$_0$ в выбранной точке $(x_0; y_0)$ $x_0 \in N$, то и $y_0 \in N$ и наоборот, если $y_0 \in N$, то и $x_0 \in N$



– все квадраты с целочисленными вершинами



наклонённый прямоуг

Олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-
БУДУЩЕЕ НАУКИ

Чистовик

ШИФР 922
(заполняется сотрудником секретариата)

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

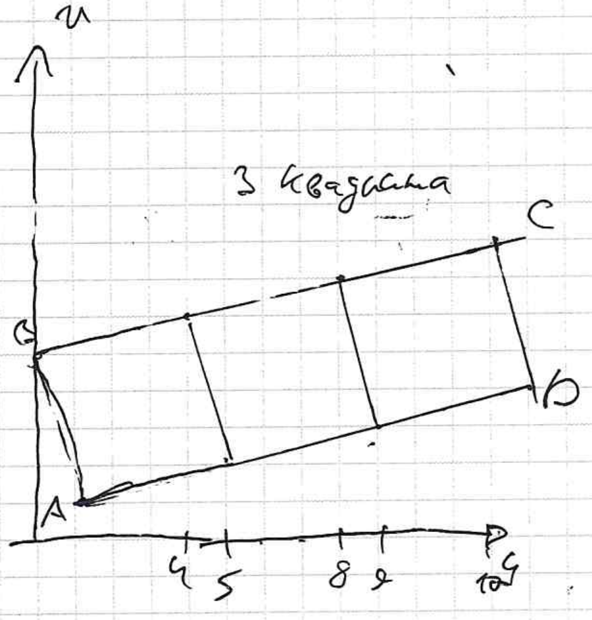
№5. прод.

~~На~~ Наклонённый прямоугольник состоит из 4 прямых

1. $y = a_1x + b_1$ где прямая $1 \perp 2$ и $3 \perp 4$
2. $y = a_2x + c_1$ чтобы прямые были перпендикулярны эти должно выполняться
3. $y = a_1x + b_2$
4. $y = a_2x + c_2$ равенство: $a_1 \cdot a_2 = -1$

$a_1 = -\frac{1}{a_2}$

Тогда количество квадратов выполняющих данное условие на которые можно разделить данный прямоугольник $= \frac{AB}{BC}$? (где AB и BC – неравные стороны квадрата.) и $AB \geq BC$



$ABC = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

$BA = \sqrt{16 \cdot 9 + 1 \cdot 9} = 3\sqrt{17}$

$\frac{AB}{BC} = 3$

а если $\frac{AB}{BC} \notin \mathbb{N}$?