ШИФР a64
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике в 11 классе
(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Жебпяков ~~Д.~~ Данила Александрович

Олимпиада школьников
**БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-
БУДУЩЕЕ НАУКИ**

ШИФР a64
(заполняется сотрудником секретариата)

Чистовик

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№ 11.1

$f(f(x)) < (f(x)^2)^2 \qquad f(x) = 2x^2 - 1$

$2f(x)^2 - 1 < f(x)^2$

$f(x)^2 < 1$

$-1 < f(x) < 1$

$-1 < 2x^2 - 1 < 1$

$0 < 2x^2 < 2$

$0 < x^2 < 1$

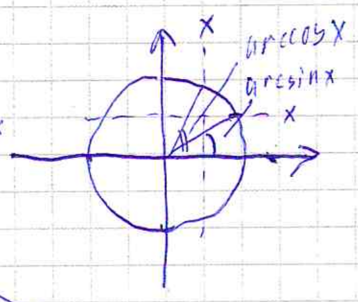
$\begin{cases} x \neq 0 \\ -1 < x < 1 \end{cases}$

$x \in (-1;0) \cup (0;1)$ — ответ

№ 11,2

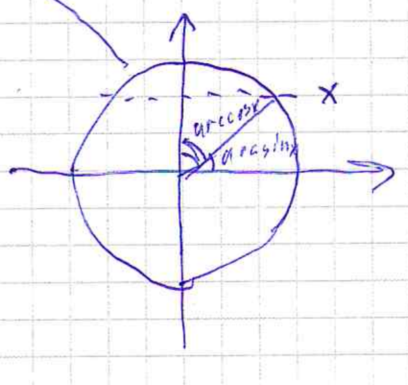
$y = \arcsin(x) \cdot \arccos(x)$

то есть $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$



$y = \arcsin x \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)$

обозначим $\arcsin x$ за S



$y = S\left(\frac{\pi}{2} - S\right)$

$y = S\frac{\pi}{2} - S^2$

максимум в точке

$S = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4}$ — вполне возможное значение арксинуса

$x = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$y = s\left(\frac{\pi}{2} - s\right)$

при $s = \frac{\pi}{4}$

$y = \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2$ – максимальное значение (наибольшее)

при ~~минимальное – на~~

т.к это парабола ветвями вниз, минимальное значение находится на одном из концов рассматриваемого участка.

$s \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ по определению арксинуса

$-\frac{\pi}{2}$:

$y = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{2}$

$+\frac{\pi}{2}$

$y = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

$-\frac{\pi^2}{2}$ – меньше

$-\frac{\pi^2}{2}$ – наименьшее значение

+

№ 3

$\sqrt{x^3+y} + \sqrt{y^3+x} = \sqrt{x^3+x} + \sqrt{y^3+y}$

обе части положительны (корень)

возведём в квадрат.

$x^3+y + 2\sqrt{(x^3+y)(y^3+x)} + y^3+x = x^3+x+2\sqrt{(x^3+x)(y^3+y)} + y^3+y$

~~вот~~ $\sqrt{(x^3+y)(y^3+x)} = \sqrt{(x^3+x)(y^3+y)}$

$(x^3+y)(y^3+x) = (x^3+x)(y^3+y)$

$(x^4+y^4+x^3y^3+xy = x^3y+y^3x+x^3y^3+xy$

$x^4+y^4 = x^3y+y^3x$

Олимпиада школьников
**БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-
БУДУЩЕЕ НАУКИ**

Чистовик

ШИФР д64
(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов	
+	+	+	+	+/2	90
20	20	20	20	10	

Заполняется проверяющим.

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

$x^4+y^4=x^3y+y^3x$

$x^4-x^3y=y^3x-y^4$

$x^3(x-y)=y^3(x-y)$

если $x\neq y$, то делим на $x-y$

$x^3=y^3$

$x=y$. противоречие.

+

значит можно утверждать, что $x=y$

№ 11.5

~~проведём прямую~~,

пусть $(x;y)$ и $(x+a;y+b)$ – координаты двух вершин прямоугольника, принадлежащих одной его короткой стороне.

обозначение: $gcd(a;b)$ – наибольший общий делитель чисел a и b

~~Если эта сторона имеет цел~~

эти точки имеют целочисленные координаты так же сторона проходит через несколько точек с целочисленными координатами (кроме концов)

это наибольший общий делитель?

всего их $gcd(a;b)-1$ ($k\frac{a}{gcd(a;b)}$ и $k\frac{b}{gcd(a;b)}$ целое), $k<gcd(a,b)$

расстояние между этими точками (по осям)

$x: \frac{a}{gcd(a;b)}$ $y: \frac{b}{gcd(a;b)}$

заметим, что точка $\left(x+\frac{\cancel{\gcd}\, b}{gcd(a;b)}; y-\frac{a}{gcd(a;b)}\right)$

(либо $\left(x-\frac{b}{gcd(a;b)}; \cancel{y}\, y+\frac{a}{gcd(a;b)}\right)$, зависит

от выбранной стороны) тоже имеет

целые координаты и принадлежит длинной ✓

стороне прямоугольника.

~~таким образом~~,

Более того, одна из вершин удовлетворяет

условию $\left(x+\frac{kb}{gcd(a;b)}; y-\frac{ka}{gcd(a;b)}\right), k\in Z$

Почему вершина прямоугольника имеет такой вид?

можно провести прямые, через все точки,

с координатами

$$\left(x+\frac{ka}{gcd(a;b)}; y+\frac{kb}{gcd(a;b)}\right)$$

$$k\in Z$$

$$\left(x+\frac{kb}{gcd(a;b)}; y-\frac{ka}{gcd(a;b)}\right)$$

, принадлежащие сторонам прямоугольника.

Эти прямые не окажутся проведены

через точки на обеих сторонах, с

одинаковым интервалом. значит прямые

разобьют прямоугольник на квадраты.

точки пересечения их со сторонами

прямоугольника имеют Почему? целочисленные координаты

, значит и все вершины квадратов — тоже.

Доказано.

Олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

ШИФР а 64
(заполняется сотрудником секретариата)

Чистовик

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№ 11.~~1~~

1) тройку x, y, z можно получить из пифагоровой тройки a, b, c следующим образом:

$a^2+b^2=c^2$

умножим на c^{2020}

$a^2c^{2020}+b^2c^{2020}=c^{2022}$

$(ac^{1010})^2+(bc^{1010})^2=c^{2022}$

$x=a\cdot c^{1010}$

$y=b\cdot c^{1010}$

$z=c$

например тройка 3, 4, 5

$x=3\cdot 5^{1010}$

$y=4\cdot 5^{1010}$

$z=5^{2022}$

$3^2\cdot 5^{2020}+4^2\cdot 5^{2020}=5^{2022}$

если x, y, z – подходят условию, то при натуральном $k>1$

$x^2+y^2=z^{2022}$

$x^2\cdot k^{2022}+y^2\cdot k^{2022}=z^{2022}\cdot k^{2022}$

~~$x^2+\dots$~~

$(x\cdot k^{1011})^2+(y\cdot k^{1011})^2=(kz)^{2022}$

соответственно, $(x\cdot k^{1011}; y\cdot k^{1011}; kz)$ – тоже подходит под условие.

~~того этого, если $k>1$, $kz>z$.~~

можно подставлять любое натуральное k получая бесконечное число троек. Доказано.

+