ШИФР а 56

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников

БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике в 11 классе

(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Горбунов Никита Александрович

Олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

ШИФР а56
(заполняется сотрудником секретариата)

Чистовик

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

1. Произведём замену $2x^2-1=t$

Тогда неравенство имеет вид $2t^2-1<t^2$, откуда $t^2<1 \Rightarrow -1<t<1$.

Обратная замена:

$-1<2x^2-1<1$

$0<x^2<1$

$-1<x<0$; $0<x<1$

Ответ: $-1<x<0$; $0<x<1$

2. Т.к. $|\arcsin x| \le \frac{\pi}{2}$; $|\arccos x| \le \pi$, то наименьшее значение по модулю не больше меньше $\frac{\pi^2}{2}$ почему?

При этом $(\arcsin(-1))(\arccos(-1)) = -\frac{\pi}{2}\cdot\pi = -\frac{\pi^2}{2}$, то есть это и есть наименьшее значение

Теперь найдём наиб-ольшее. Так как $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$, то по неравенству Коши

$(\arccos x)(\arcsin x) \le \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\pi^2}{16}$

При этом $\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{16}$, то есть это и есть наибольшее значение +

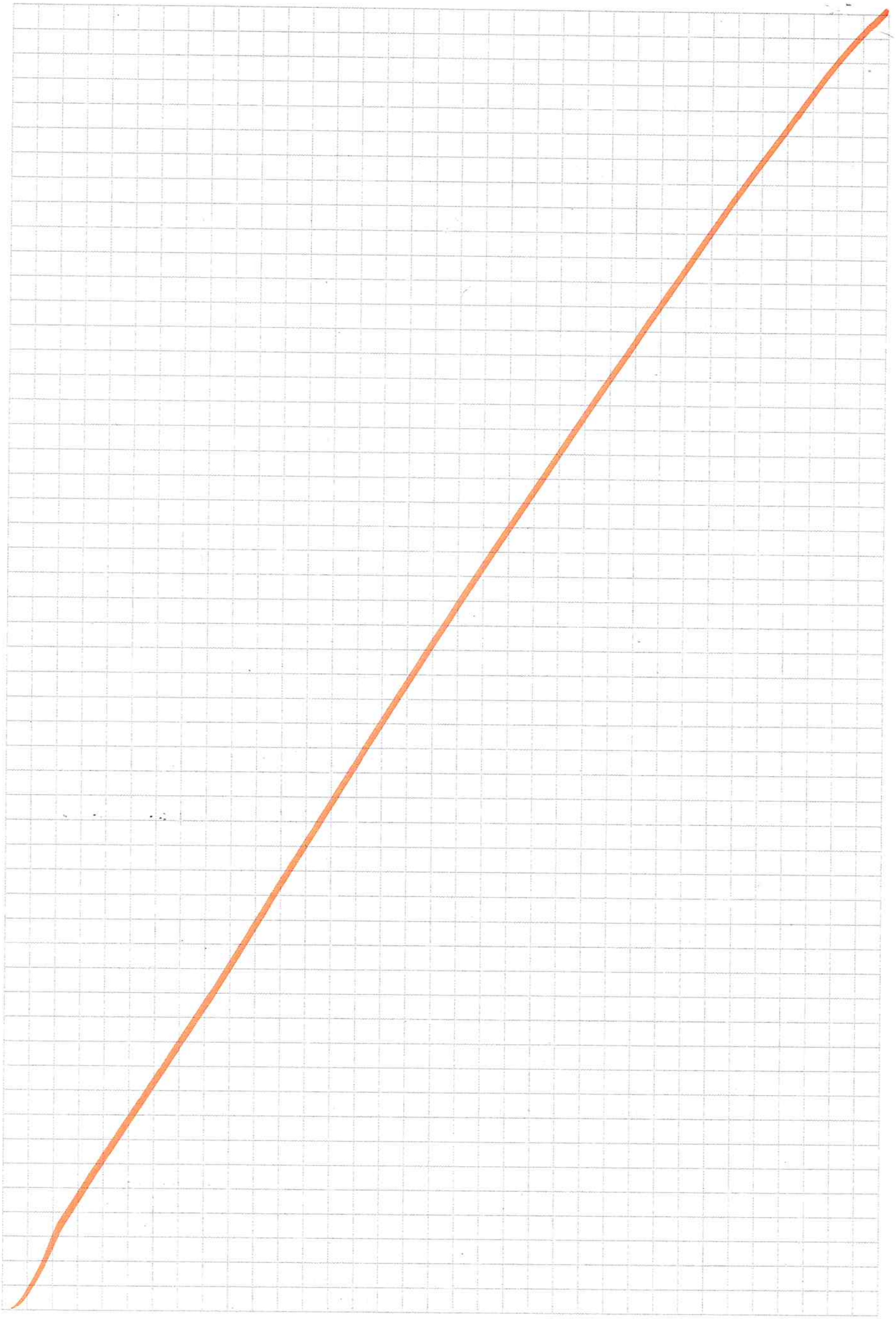
Ответ: $\frac{\pi^2}{16}$; $-\frac{\pi^2}{2}$

3. Произведём замену $y=x+k$. Докажем, что $k=0$

$$\sqrt{x^3+x+k} + \sqrt{(x+k)^3+x} = \sqrt{x^3+x} + \sqrt{(x+k)^3+x+k}$$

Произведём ещё замену $x^3+x=n$; $(x+k)^3+x=m$

Получаем $\sqrt{n+k} + \sqrt{m} = \sqrt{n} + \sqrt{m+k}$ или



Олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

Чистовик

ШИФР 956
(заполняется сотрудником секретариата)

$\Sigma = 88$

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+.	+	±	+	+.
18	20	14	20	16 / 88

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

Надо было подробнее написать

$\sqrt{n+k} - \sqrt{n} = \sqrt{m+k} - \sqrt{m}$

Так как $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, а это всегда убывающая функция, то такое равенство выполняется только при $m = n$ или $k = 0$. А если $m = n$, то $x^3 = (x+k)^3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = x+k \Rightarrow k = 0$.

Вы рассматриваете функцию $\sqrt{x+k} - \sqrt{x}$. А убывание доказано только для $\sqrt{x}$.

Следовательно, k всегда равно 0 и $x = y$

Ответ: да.

4. Одно из множеств решений: $z = 5n$, где $n \in N$
$y = \frac{3}{5} \cdot z^{1011}$
$x = \frac{4}{5} \cdot z^{1011}$

+

Так как $z \vdots 5$, то x и y натуральные

При таких числах получаем $\frac{16}{25} z^{2022} + \frac{9}{25} z^{2022} = z^{2022}$

5. Возьмём крайнюю левую вершину как начало координат.

Если стороны прямоугольника параллельны осям координат, то он разбивается на единичные квадраты.

Рассмотрим случай, когда они не параллельны осям. Прилежащие к началу координат стороны задаются прямыми $y = kx$ и $y = -\frac{1}{k}x$. При этом k — рациональное, т.к. прямые пересекают целочисленные точки. Пусть $k = \frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ —

3

несократимая дробь. Тогда координаты двух других вершин равны $(nqx; npx)$ и $(mpx; -mqx)$, где n и m – натуральные, $n \neq m$ по условию (прямоугольник – не квадрат). Но тогда ~~эт~~ на этих сторонах также лежат точки $(q; p)$, $(2q; 2p)$, … $((n-1)q; (n-1)p)$ и $(p; -q)$, $(2p; -2q)$, … $((m-1)p; -(m-1)q)$. Проведём через эти точки прямые, параллельные сторонам прямоугольника. Заметим, что если в произвольном прямоугольнике 3 вершины целочисленные, то и четвёртая тоже. Следовательно, все точки пересечения построенных прямых между собой и с изначальными сторонами целочисленны. При этом так как расстояние ~~от~~ (между двумя соседними отмеченными точками (например, $(q; p)$ и $(2q; 2p)$) на одной стороне равно расстоянию между двумя соседними отмеченными точками на другой стороне (например, $(2p; -2q)$ и $(3p; -3q)$), то мы разбили прямоугольник на квадраты.

Отдельно можно рассмотреть случай $n = 1$ или $m = 1$. Тогда на этой стороне нет других целочисленных точек, кроме её концов, и все прямые мы будем проводить через другую сторону. И так как $n \neq m$, то мы проведём хотя бы одну прямую. Все остальные рассуждения останутся те же.