ШИФР а 41

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников

БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике в 11 классе

(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Черепнов Максим Михайлович

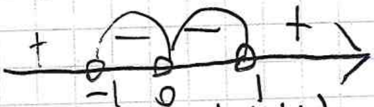
N1

$f(x)=2x^2-1 \quad (f(x))^2=(2x^2-1)^2 \quad f(f(x))=2(2x^2-1)^2-1$

$(f(x))^2 > f(f(x))$

$(2x^2-1)^2 > 2(2x^2-1)^2-1$

$(2x^2-1)^2 < 1 \quad (2x^2-2)\cdot 2x^2<0 \quad (x-1)(x+1)x^2<0$



Ответ: $(-1;0)\cup(0;1)$

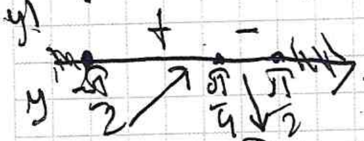
$x\in(-1;0)\cup(0;1)$

N2

$y=\arcsin x\cdot\arccos x=\arcsin x\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)$

Пусть $t=\arcsin x$, $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$

$y=t\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=-t^2+t\cdot\frac{\pi}{2} \quad y'=\frac{\pi}{2}-2t. \quad y'=0 \quad t=\frac{\pi}{4}$



y_{max} на отр. $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ при $t=\frac{\pi}{4}$ => $y_{max}=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2}{16}$. y_{min} на отр. $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ при $t=-\frac{\pi}{2}$ => $y_{min}=-\frac{\pi}{2}\cdot\pi=-\frac{\pi^2}{2}$. Проверим $y\left(\frac{\pi}{2}\right)$: $y=0$. => $y_{min}=-\frac{\pi^2}{2}$. Ответ: $y_{max}=\frac{\pi^2}{16}$, $y_{min}=-\frac{\pi^2}{2}$

N3

$\sqrt{x^3+y}+\sqrt{y^3+x}=\sqrt{x^3+x}+\sqrt{y^3+y}$

При подстановке $y=x$ получаем тождество.

Пусть $x\ne y$. Учтём, что $\begin{cases}x^3+x\ge0\\y^3+y\ge0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x(x^2+1)\ge0\\y(y^2+1)\ge0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\ge0\\y\ge0\end{cases}$

Возведём обе части в квадрат:

$x^3+y+y^3+x+2\sqrt{(x^3+y)(y^3+x)}=x^3+x+y^3+y+2\sqrt{(y^3+y)(x^3+x)}$

$\sqrt{(x^3+y)(y^3+x)}=\sqrt{(y^3+y)(x^3+x)}$. Каждая скобка больше или равна 0 изначально. Возводим в квадрат:

$(x^3+y)(y^3+x)=(y^3+y)(x^3+x)$

$x^3y^3+x^4+y^4+xy=x^3y^3+x^3y+xy^3+xy$ л. 2

~~$x^4-xy^3-(y^4-x$~~ $x^4-x^3y-(y^3x-y^4)=0$

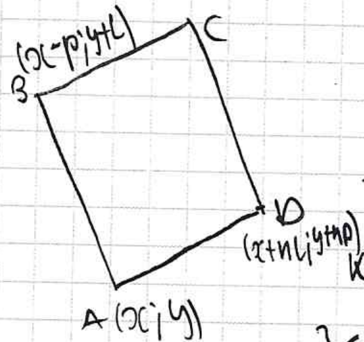
$x^3(x-y)-y^3(x-y)=0$

$(x-y)(x^3-y^3)=0$

$(x-y)^2(x^2+xy+y^2)=0$ +

Т.к по доказанному выше $x\ge0$ и $y\ge0$, то вторая скобка принимает значение 0, только если $x=y=0$. Тогда в любом случае $x=y$.

Ответ: можно



N5

Параллельные? стороны ABCD задаются уравнениями перпендикулярных прямых $y_1=k_1x+b_1$, $y_2=k_2x+b_2$, где $k_1\cdot k_2=-1$. Т.к пусть $A(x;y)$, (p, l – целые числа) $B(x-p;y+l)$. Т.к $AD\ne AB$ (пусть $AD>AB$), то (1) почему? $D(x+nl;y+np)$, где $n>1$. Т.к x,y – целые, $x+nl$, $y+np$ – целые, то $(x+nl-x)$ и $(y+np-y)$ – целые числа => n – целое число. не обязательно! Тогда прямоугольник можно поделить ~~на n прямых~~ на n частей n-1 прямой, параллельных AB. (смещение по AB на x_0 (по оси x) даст смещение по AD на y_0 (по оси y) и наоборот)

(4): $y_1=k_1x+b_1$. $y+l=k(x-p)+b_1$ $l=-k_1p$ $k_1=-\frac{l}{p}$ => $k_2=\frac{p}{l}$ =>

$y=k(x-p)+b_1$

=> $y_2(l)=y+p+b_2$, $y_2(nl)=y+np+b_2$ ч.т.д.

N4

Возьмём пифагоровый треугольник со сторонами x,y,k, где k – гипотенуза. Через подобия очевидно, что треугольник со сторонами xn, yn, kn, где $n>1\in N$

Олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

Чистовик

ШИФР а41
(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+	+	+	+	−
20	20	20	20	0 | 80

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

также является пифагоровым. Если коэффициент подобия равен гипотенузе, то можно подобрать такие x, y, z, что $x^2+y^2=z^4$. (например $15^2+20^2=25^2=5^4$). ~~Числ~~ Катеты пифагорова треугольника можно еще домножить на ~~квадрат~~ гипотенузы, тогда будет верным равенство $x^2+y^2=z^{\cancel{8}6}$ (например, $(3\cdot5^2)^2+(4\cdot5^2)^2=(5\cdot5^2)^2=5^6$ $\cancel{375+500=625=5^8}$). Аналогично с каждой чётной степенью до бесконечности. ~~Я~~ Возьмём пифагоровый треугольник со сторонами l, m, z (z-гипотенуза). ~~И~~ Подобный ему треугольник со сторонами $x=l\cdot z^{1010}$, $y=m\cdot z^{1010}$, $z\cdot z^{1010}$. По теореме Пифагора $x^2+y^2=l^2\cdot z^{2020}+m^2\cdot z^{2020}=z^2\cdot z^{2020}=z^{2022}$. Т.к пифагоровых троек бесконечное количество, то и троек, удовлетворяющих равенству $x^2+y^2=z^{2022}$ будет тоже бесконечное количество. Ч.Т.Д

+