ШИФР 935
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике в 11 классе
(наименование общеобразовательного предмета)

Олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-
БУДУЩЕЕ НАУКИ

Чистовик

ШИФР 935
(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+	+	+↓	+	5 −
20	20	19	20	0	~~79~~

Σ= 80

Заполняется проверяющим!

+1 = 20

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№ 11.1

$f(x)=2x^2-1$; $f(f(x))=2(2x^2-1)^2-1$; $(f(x))^2=(2x^2-1)^2$

$(2x^2-1)^2=4x^4-4x^2+1$

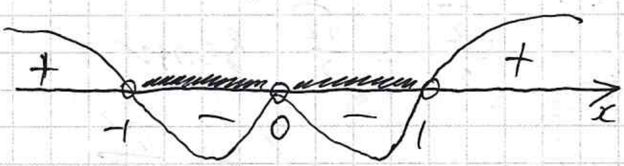
$f(f(x))<(f(x))^2$

$8x^4-8x^2+2-1<4x^4-4x^2+1$

$4x^4-4x^2<0$

$4x^2(x^2-1)<0$

$4x^2(x-1)(x+1)<0$



$x\in(-1;0)\cup(0;1)$

Ответ: $x\in(-1;0)\cup(0;1)$.

№ 11.2.

$y=(\arcsin x)\cdot(\arccos x)$

Пусть $\arcsin x=\alpha$, тогда $\sin\alpha=x$, где $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$;

$\arccos x=\beta$, тогда $\cos\beta=x$, где $0\le\beta\le\pi$

Видим, что $\sin\alpha=\cos\beta$, отсюда $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

$y=\alpha\cdot\beta$; Понятно, что $y=-\frac{\pi}{2}\cdot\pi=-\frac{\pi^2}{2}$ — это минимальное значение функции y, т.к $\alpha=-\frac{\pi}{2}$ — это максимальное по модулю значение α, а $\beta=\pi$ — это максимально возможное по модулю знач. β, притом, что произведение отрицательно, т.е. это максимальное по модулю значение и со знаком "−", значит, минимальное знач. для функции. Конечно, не забываем убедиться, что $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ и $\beta = \pi$ могли быть: $\sin\alpha = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$;

$$\cos\beta = \cos\pi = -1$$

$$-1 = -1 \text{ Верно;}$$

Наименьшее значение функции y равно $-\frac{\pi^2}{2}$.

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$; $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

$y = \alpha \cdot \beta$; $y = \alpha \cdot (\frac{\pi}{2} - \alpha)$; $y = -\alpha^2 + \frac{\pi}{2}\alpha$. – это парабола ветвями вниз (относительно α), а значит, её максимальное значение в вершине.

$\alpha_в = \frac{-\frac{\pi}{2}}{-2} = \frac{\pi}{4}$; $y_{max} = -\frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{16}$.

При $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

Проверка: $\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Верно

$\cos\beta = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

Наибольшее значение функции y равно $\frac{\pi^2}{16}$.

Ответ: Наименьшее: $-\frac{\pi^2}{2}$

Наибольшее: $\frac{\pi^2}{16}$.

N 11.3.

$\sqrt{x^3+y} + \sqrt{y^3+x} = \sqrt{x^3+x} + \sqrt{y^3+y} \Rightarrow$ т.к. $\sqrt{\ } + \sqrt{\ } \geq 0$

$\cancel{x^3} + \cancel{y^3} + \cancel{x} + \cancel{y} + \cancel{2}\sqrt{(x^3+y)(y^3+x)} = \cancel{x^3} + \cancel{y^3} + \cancel{x} + \cancel{y} + \cancel{2}\sqrt{(x^3+x)(y^3+y)}$

$\Rightarrow \sqrt{x^3y^3 + x^4 + y^4 + xy} = \sqrt{x^3y^3 + x^3y + xy^3 + xy} \Rightarrow$ т.к. $\sqrt{\ } \geq 0$

$\cancel{x^3y^3} + x^4 + y^4 + \cancel{xy} = \cancel{x^3y^3} + x^3y + xy^3 + \cancel{xy} \Rightarrow$

$x^4 + y^4 = x^3y + xy^3$

$\boxed{2}$

$x^4 - x^3y + y^4 - xy^3 = 0$

$x^3(x-y) - y^3(x-y) = 0$

$(x-y)(x^3-y^3) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x-y=0 \\ x^3-y^3=0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=y \\ x^3=y^3 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=y \\ x=y \end{array}\right.$ В любом случае, получаем, что $x=y$

Таким образом, из исходного уравнения следует, что обязательно $x=y$.

Нетрудно убедиться, что существуют $x=y$ удовлет. исходному уравнению, например, $x=y=0$.

Ответ: Да, можно.

+↓

№ 11.4.

Известно, что существует бесконечное множество троек натуральных чисел a, в, c, удовлетворяющих соотношению $a^2+b^2=c^2$ (так называемые Пифагоровы тройки), тогда:

$a^2+b^2 = c^2 \quad | \cdot c^{2020}$

$a^2 \cdot c^{2020} + b^2 \cdot c^{2020} = c^{2022}$

$(a \cdot c^{1010})^2 + (b \cdot c^{1010})^2 = c^{2022}$

Таким образом: $x = a \cdot c^{1010}$, $y = b \cdot c^{1010}$, $z = c$.

Каждой тройке натур. чисел a, в, c из бесконечного множества удалось поставить в соответствие тройку натур. чисел x, y, z удовлетворяющих соотнош. $x^2+y^2=z^{2022}$, значит, множество таких троек x, y, z бесконечно и существует. +

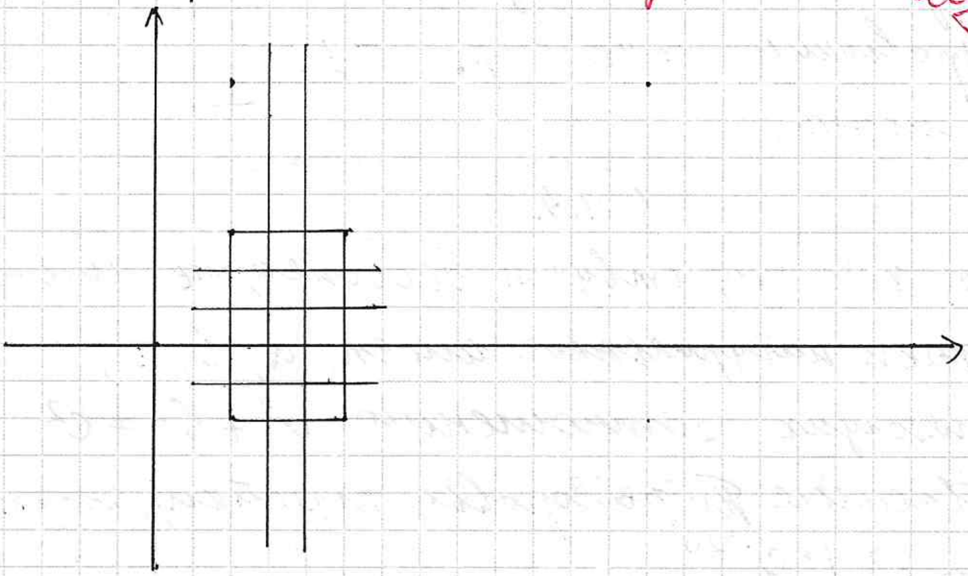
№ 11.5

$\boxed{3}$

Рассмотрим случай, когда стороны прямоугольника параллельны осям координат. В этом случае прямоугольник можно разбить на еденичные квадраты (сторона 1) по линиям сетки (где сетка формируется путём проведения всех прямых через каждые два узла между которыми расстояние 1, где узел — точка с целыми координатами).

Пример:

Тривиальный случай!



Такие прямые параллельны осям координат, а значит, и сторонам прямоугольника.