ШИФР а59

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников

БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике в 11 классе

(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Смирнов Алексей Андреевич

Олимпиада школьников

БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-
БУДУЩЕЕ НАУКИ

Чистовик

ШИФР a53

(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+	∓	+	+	−
20	8	20	20	0 | 68

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

11.1 $f(f(x)) < (f(x))^2$, где $f(x) = 2x^2 - 1$

$2(2x^2-1)^2 - 1 < (2x^2-1)\cdot(2x^2-1)$

$2(4x^4 - 4x^2 + 1) - 1 < 4x^4 - 2x^2 - 2x^2 + 1$

$8x^4 - 8x^2 + 2 - 1 < 4x^4 - 4x^2 + 1$

$4x^4 - 4x^2 < 0$

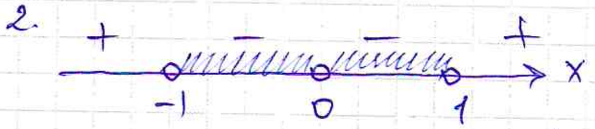
$4x^2(x^2-1) < 0$

метод интервалов:

1. $x = 0$ – ноль кратности 2.

$x^2 = 1$: $x = \pm 1$

2.



$x \in (-1; 0) \cup (0; 1)$

<u>Ответ:</u> $(-1;0) \cup (0;1)$

11.3 $\sqrt{x^3+y} + \sqrt{y^3+x} = \sqrt{x^3+x} + \sqrt{y^3+y}$ ОДЗ: $x \geq 0$, $y \geq 0$.

$(x^3+y) + (y^3+x) + 2\sqrt{x^3+y}\cdot\sqrt{y^3+x} = (x^3+x) + (y^3+y) + 2\sqrt{x^3+x}\cdot\sqrt{y^3+y}$

$\cancel{x^3} + \cancel{y} + \cancel{y^3} + \cancel{x} + 2\sqrt{(x^3+y)(y^3+x)} = \cancel{x^3} + \cancel{x} + \cancel{y^3} + \cancel{y} + 2\sqrt{(x^3+x)(y^3+y)}$.

$\sqrt{(x^3+y)(y^3+x)} = \sqrt{(x^3+x)(y^3+y)}$

$\Downarrow$

1

№11.3 (продолжение)

$$(x^3+y)(y^3+x) = (x^3+x)(y^3+y)$$

$$\cancel{x^3y^3}+x^4+y^4+\cancel{yx} = \cancel{x^3y^3}+x^3y+xy^3+\cancel{xy}$$

$$x^4+y^4 = x^3y+y^3x$$

$$x^4 - x^3y = y^3x - y^4$$

$$x^3(x-y) = y^3(x-y)$$

$$(x-y)(x^3-y^3)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=y \\ x^3=y^3 \end{array}\right. \iff x=y$$

$(f(x)=x^3$ – монотонная функция$)$

+

Итак, можно утверждать, что $x=y$.

Ответ: можно.

~~11.4~~ $\cancel{\{x, y, z\} \subset \mathbb{N}}$

$\cancel{x^2+y^2=z^{2022}}$

~~Для любого натурального n:~~

~~Пусть $x=n^{1011}$, $y=0$, $z=n^{2022}$~~

$\cancel{x^2+y^2=(n^{1011})^2+0^2=n^{2022}=}$

~~Пусть $x=3n^{1011}$, $y=4n^{1011}$, $z=5n^{1011}$~~

$\cancel{x^2+y^2=9n^{2022}+16n^{2022}=25n^{2022}=(5n^{1011})^2=z^2}$

~~То есть для $x=3n^{1011}$, $y=4n^{1011}$, $z=5\cdot n^{1011}$, где n – любое натуральное число, выполняется равенство $x^2+y^2=z^{2022}$~~

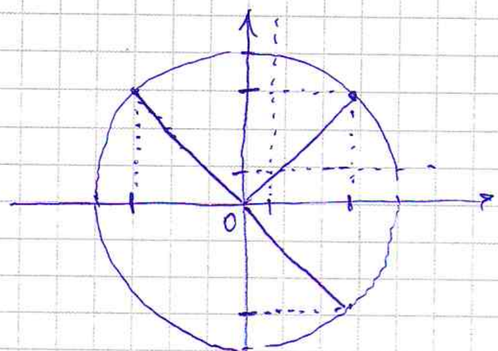
Олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

Чистовик

ШИФР a53
(заполняется сотрудником секретариата)

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

11.2 $y=(\arcsin x)\cdot(\arccos x)$



1. если $x<0$, то
$\arccos x>0$, $\arcsin x<0$ | $(\arccos x)\cdot(\arcsin x)<0$

2. если $x>0$, то
$\arccos x>0$, $\arcsin x>0$ | $(\arccos x)\cdot(\arcsin x)>0$

3. С увеличением x от 0 до 1:
$\arcsin x$ возрастает, $\arccos x$ убывает (их сумма постоянна и равна $\pi/2$)
Их произведение станет наибольшим, когда они сравняются: они будут равны $\frac{\pi}{4}$. почему?
Тогда $(\arcsin x)(\arccos x)=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi^2}{16}$ – наибольшее значение функции.

4. С уменьшением x от 0 до -1:
$\arcsin x$ убывает, $\arccos x$ возрастает, а их сумма постоянна и равна $\frac{\pi}{2}$.
Их произведение станет наименьшим, когда ~~их модули сравняются. Тогда $\arcsin x$ будет равен $-\frac{\pi}{4}$, а arccos~~ $\arcsin x$ станет равным $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, а arccos $\left(\frac{3\pi}{4}\right)$. Их произведение: $\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{3\pi^2}{16}$ – наименьшее значение функции.

<u>Ответ:</u> наибольшее: $\frac{\pi^2}{16}$; наименьшее: $-\frac{3\pi^2}{16}$ это не так. нет

3

11.4 $\{x, y, z\} \subset \mathbb{N}$

$$x^2 + y^2 = z^{2022}$$

Для любого натурального n, кратного 5:

Пусть $x = \dfrac{3 \cdot n^{1011}}{5}$ – натуральное число, тк $n \vdots 5$.

$y = \dfrac{4 \cdot n^{1011}}{5}$ – натуральное число, тк $n \vdots 5$

$z = n$

$$x^2 + y^2 = \frac{9n^{2022}}{25} + \frac{16n^{2022}}{25} = \frac{25n^{2022}}{25} = n^{2022} = z^{2022}.$$

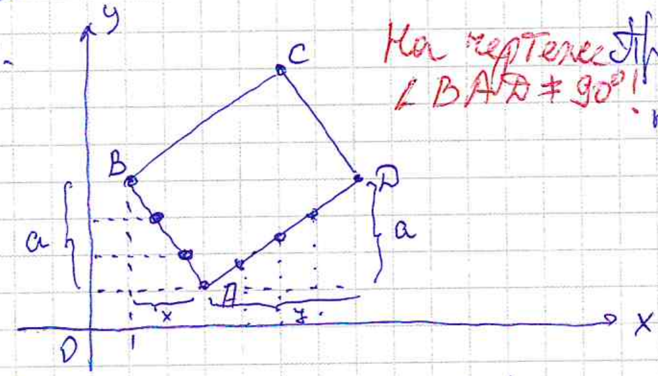
А так как натуральных чисел, кратных пяти бесконечно много, то существует бесконечно много троек натуральных чисел x, y, z, удволетворяющих соотношению $x^2 + y^2 = z^{2022}$.

+

чтд.

11.5

1.



На чертеже $\angle BAD \neq 90°$!

Проведём из вершины B прямую, параллельную оси y, а из точки A – прямую, параллельную оси x.

Тогда, если мы проведём через все целочисленные точки на прямой Oy прямые, перпендикулярные ей, мы разделим отрезок AB на равные части, так, что все точки на AB будут иметь

(4)

Олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-
БУДУЩЕЕ НАУКИ

ШИФР a53
(заполняется сотрудником секретариата)

Чистовик

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

11.5 (продолжение)
целочисленные ординаты.
Аналогично можем разбить все стороны прямоугольника.
Тогда у нас будут отмечены все точки сторон прямоугольника, имеющие целочисленную абсциссу или ординату. Требуется, чтобы обе координаты были целыми

2. $AB^2 = x^2 + a^2$ совпадение второго слагаемого — это частный случай!
$AD^2 = y^2 + a^2$

$\frac{y}{a} = \frac{a}{x}$ (тк прямые AB и AD перпендикулярны)

$y = \frac{a^2}{x}$

$AD^2 = \left(\frac{a^2}{x}\right)^2 + a^2 = \frac{a^4 + a^2x^2}{x^2} = \frac{a^2}{x^2}(a^2+x^2) = \frac{a^2}{x^2}AB^2$

$AD = \frac{a}{x}AB$. То есть отмеченные нами точки на одной стороне встречаются чаще или реже в a/x раз

3. Далее отметим все точки сторон прямоугольника, имеющих целую абсциссу и ординату. На этих есть ли такие точки? точках построим квадраты.
Таким образом, можно провести несколько прямых так, что прямоугольник разобьётся на квадраты с целочисленными координатами вершин.

чтд

5