ШИФР E 31137
(заполняется представителем Оргкомитета)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике Дата проведения 22 января 2023г
(наименование общеобразовательного предмета)

ФИО участника *(полностью)* Малышев Артем Андреевич

Дата рождения

Класс 11

Школа № МБОУ „Лицей №39" район Челябинская обл. город ОЗЕРСК

Особые отметки **(Заполняется представителем оргкомитета)** о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

13:05 вышел

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады **обязан**:
- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады **запрещается**:
- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполнявшуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий.

Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы.

Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! *Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.*

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады)

Олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ- БУДУЩЕЕ НАУКИ

Чистовик

ШИФР E31137
(заполняется сотрудником секретариата)

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

1	2	3	4	5	Σ
0	+	±	−	0	=
0	20	12	0	0	32

№ 11.2.

$(\sqrt{2023}+\sqrt{2022})^x-(\sqrt{2023}-\sqrt{2022})^x=\sqrt{8088}$

1. $x=1 \Rightarrow \sqrt{2023}+\sqrt{2022}-\sqrt{2023}+\sqrt{2022}=\sqrt{8088}$
(подбор)

$2\cdot\sqrt{2022}=\sqrt{8088}$

$\sqrt{4\cdot 2022}=\sqrt{8088}$

$\sqrt{8088}=\sqrt{8088}$ – верно $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $x-1$ – корень ур-ния.

2. Пусть $(\sqrt{2023}+\sqrt{2022})=a$, $(\sqrt{2023}-\sqrt{2022})=b$, $a>b \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $a^x-b^x=y$ – наша функция.

Исследуем её на точки экстремума:

$(a^x-b^x)'=a^x\cdot\ln a-b^x\cdot\ln b=0$, $a>0$ и $b>0$

$\ln a^{a^x}=\ln b^{b^x}$

$a^{a^x}=b^{b^x} \Rightarrow$ т.к. $a\neq b$, то

$\Rightarrow$ $a^x=b^x=0$ – условие для $a^{a^x}=b^{b^x}=1$, но

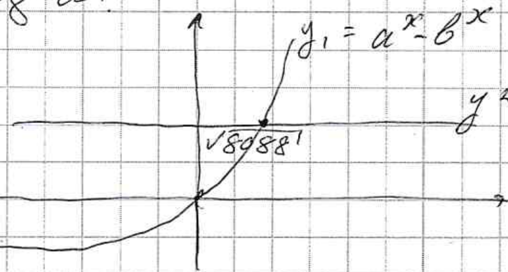
т.к. ~~$a\neq b$~~ $a\neq 0$ и $b\neq 0$, то $a^x=0$ не имеет корней $\Rightarrow \varnothing \Rightarrow$ точек экстремума нет $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ это монотонная функция $\Rightarrow$ одному знач. (x) соответствует 1 значение (y)

x	0	1	2	…
y	0	$a-b$	$(a-b)(a+b)$	

$\Rightarrow$ это монотонно возрастающая функция.

3. $y_2=\sqrt{8088}$



$\Rightarrow$ мы имеем только 1 пересечение

(+)

$\Rightarrow$ у уравнения $\left[(\sqrt{2023}-\sqrt{2022})^x-(\sqrt{2023}-\sqrt{2022})^x=\sqrt{8088}\right]$ – 1 корень

$\Downarrow$

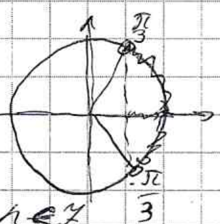
это $x = 1$

Ответ: $x = 1$

№11.1

$2\cos(\cos x) > 1$

$\cos(\cos x) > \frac{1}{2}$



$\Downarrow$

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{3} + 2\pi n < \cos x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \; n \in \mathbb{Z} \\ -1 \le \cos x \le 1 \end{cases}$$

$-\frac{\pi}{3} \approx -\frac{3{,}14}{3} \approx -1{,}04 < -1$, аналогично $\frac{\pi}{3} > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\cancel{\cos x < \frac{\pi}{3}} \Rightarrow -\frac{\pi}{3} < -1 < \cos x < 1 < \frac{\pi}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $-\frac{\pi}{3} < \cos x < \frac{\pi}{3} \Rightarrow$

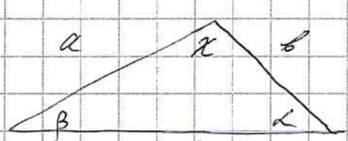
$\Rightarrow$ ~~при~~ $x \in (-\infty; \infty)$ ~~$\cos x$ удовлетво~~ удовлетворяет неравенству $-\frac{\pi}{3} < \cos x < \frac{\pi}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos(\cos x) > \frac{1}{2} \Rightarrow 2\cos(\cos x) > 1.$

Ответ: $x \in (-\infty; +\infty)$.

№11.3

a, b, c – стороны треуг-ка, $\{a, b, c\} \in R$



а) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$

$\left.\begin{aligned} S = S_R = \frac{abc}{4R} \\ S = S_r = p \cdot r \end{aligned}\right| \Rightarrow S_R = S_r$, $\frac{abc}{4R} = p \cdot r \Rightarrow$

! $R:r$

$\Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{abc}{4p} \overset{?}{=} \frac{abc}{2(a+b+c)} \Rightarrow$ т.к. $\{a, b, c\} \subset R$ и мы выполняем только действия сложения, умножения и деления над ними, то и $\frac{R}{r}$ – рациональное число, чтд.

E31137

б) $\frac{a}{\sin\alpha}=2R \Rightarrow \sin\alpha=\frac{a}{2R}$, $\{a, R\}\in\mathbb{Q}$ $\Big|\Rightarrow \sin\alpha\in\mathbb{Q}$.

аналогично $\sin\beta\in\mathbb{Q}$ и $\sin\gamma\in\mathbb{Q}$.

$\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}=90^\circ$, т.к. $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$.

Из т. косинусов следует, что $\cos\alpha=\frac{a^2+b^2-c^2}{2a\cdot b}$, $\{a, b, c\}\in\mathbb{Q}\Rightarrow$

$\Rightarrow\cos\alpha\in\mathbb{Q}$, аналогично $\cos\beta\in\mathbb{Q}$ и $\cos\gamma\in\mathbb{Q}$.

$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\left(90^\circ-\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\right)=$

$=\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)$

$\left[\sin x\cdot\sin y=\frac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))\right]$ $\Big\}\Rightarrow$

$\Rightarrow\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\right)\cdot$

$\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)\right)$

$\left[\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{2}(\cos(x+y)+\cos(x-y))\right]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot(\cos(\alpha)+\cos(-\beta))-\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos 0)\right)=$

$=\frac{1}{4}\left(\cos\alpha+\cos\beta-1-\cos(180^\circ-\gamma)\right)=$

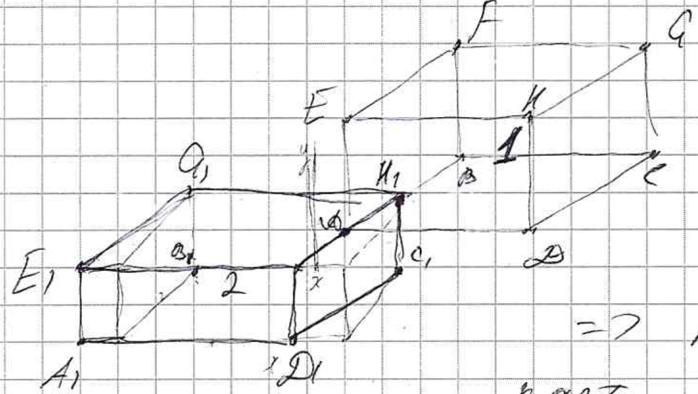
$=\frac{1}{4}(\cos\alpha+\cos\beta-1+\cos\gamma)\Rightarrow$

$\Rightarrow\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{1}{4}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1)$, т.к. $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}\subset\mathbb{Q}$, то и $\frac{1}{4}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1)\in$

$\in\mathbb{Q}\Rightarrow\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\right)\in\mathbb{Q}$, чтд.

+

№11.4



п-д ABCDHEFG и п-д $A_1B_1C_1D_1H_1E_1F_1G_1$ пере сед. ~~по~~ отрезком H_1A. => => пл-ть $AH_1C_1D_1$ пересекает как ① так и ② парал-ды.

Пусть 3-ий пар-д. ~~имеет общие точки X и Y с первыми двумя.~~ пересек. со 2-ым в точке x. проведем через точку x прямую xy: : $xy \parallel H_1A$