ШИФР Е31114
(заполняется представителем Оргкомитета)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике Дата проведения 22.01.2023
(наименование общеобразовательного предмета)

ФИО участника *(полностью)* Фалалеев Максим Евгеньевич

Дата рождения ____________ Класс 11

Школа № лицей №135 район ____________ город Екатеринбург

Особые отметки **(Заполняется представителем оргкомитета)**
о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

Правила поведения
Участник очного тура олимпиады **обязан**:
- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады **запрещается**:
- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполнявшуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий.

Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы
Участник аккуратно заполняет титульный лист «Письменная работа», ставит дату и подпись.
На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).
Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы.
Нельзя делать исправления карандашом.
Внимание! *Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.*

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

____
(подпись участника олимпиады)

Олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

Чистовик

ШИФР E31114
(заполняется сотрудником секретариата)

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№11.5

б) Да, можно. Пример: 11, 8, 3, 6, 1, 4, 9, 12, 7, 10, 5, 2

1	2	3	4	5	Σ
+.	+	+/2	-.	0	=
19	20	10	1	0	50

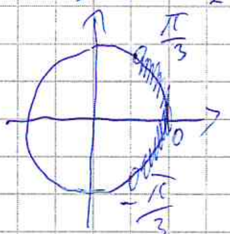
№11.1.

$2\cos(\cos x) > 1 \quad |:2$

$\cos(\cos x) > \frac{1}{2}$

$\cos x = t, \ -1 \leq t \leq 1$

$\cos t > \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{3} + 2\pi k < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$



Получаем систему: $\begin{cases} -1 \leq \cos x \leq 1 \\ -\frac{\pi}{3} + 2\pi k < \cos x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z \end{cases}$

При $k=0$ x - любое число, т.к. значение $\cos x$ будет находиться в пределах от -1 до 1, а $-\frac{\pi}{3} \approx -\frac{3,14}{3} < -1$, $\frac{\pi}{3} \approx \frac{3,14}{3} > 1$. То есть второе нер-ство системы будет выполняться всегда.

Мало строгого записей $\frac{\pi}{3} > 1$

При $k \neq 0$ решений нет. При отрицательных k $\frac{\pi}{3} + 2\pi k < -1$, например $\frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot (-1) \approx \frac{3,14}{3} + 2 \cdot 3,14 \cdot (-1) = \frac{3,14}{3} - 6,28 < -1$, следовательно второе неравенство системы не будет выполняться (наименьшее ~~значение~~ возможное значение $\cos x = -1$, а необходимо, чтобы оно было меньше, чем $\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ - это невозможно). Аналогично при положительных k $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k > 1 \Rightarrow$ решений нет.

Ответ: x - любое число

№11.2.

$(\sqrt{2023} + \sqrt{2022})^x - (\sqrt{2023} - \sqrt{2022})^x = \sqrt{8088}$

Заметим, что $x = 1$ ~~и $x=-1$~~ ~~являются решениями~~ является решением, легко проверить подстановкой.

$(\sqrt{2023}+\sqrt{2022})^1-(\sqrt{2023}-\sqrt{2022})^1=\sqrt{8088}$

$2\sqrt{2022}=\sqrt{4\cdot 2022}$

$2\sqrt{2022}=2\sqrt{2022} \Rightarrow x=1$ - решение ур-ия

$\cancel{x=-1:}$

$\cancel{(\sqrt{2023}+\sqrt{2022})^{-1}-(\sqrt{2023}-\sqrt{2022})^{-1}=\sqrt{8088}}$

$\cancel{\frac{1}{\sqrt{2023}+\sqrt{2022}}-\frac{1}{\sqrt{2023}-\sqrt{2022}}=\sqrt{8088}}$

$\cancel{\frac{\sqrt{2023}-\sqrt{2022}-\sqrt{2023}-\sqrt{2022}}{(\sqrt{2023}+\sqrt{2022})(\sqrt{2023}-\sqrt{2022})}=\sqrt{8088}}$

$\cancel{-2\sqrt{\ }}$

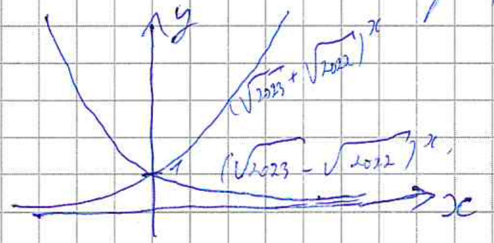
Докажем, что других решений нет. Для этого проанализируем графики функций $(\sqrt{2023}+\sqrt{2022})^x$ и $(\sqrt{2023}-\sqrt{2022})^x$.

$\sqrt{2023}+\sqrt{2022}>1 \Rightarrow$ это монотонновозрастающая показательная функция.

$\sqrt{2023}-\sqrt{2022}<1$ (т.к. $44^2=1936$; $45^2=2025 \Rightarrow \sqrt{2023}$ и $\sqrt{2022}$ - нецелые числа между 44 и 45) $\Rightarrow$ это монотонноубывающая показат. ф-ция.

+

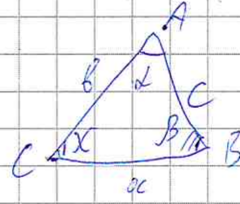
Схематично их графики выглядят так:



Мы видим, что разность между ф-циями $(\sqrt{2023}+\sqrt{2022})^x$ и $(\sqrt{2023}-\sqrt{2022})^x$ монотонно возрастает $\Rightarrow$ других решений, кроме $x=1$, нет (разность была бы либо больше, чем $\sqrt{8088}$ при $x>1$, либо меньше при $x<1$)

№11.3.

Дано: $\triangle ABC$; AB, BC, AC - рац. Док-ть: $\frac{R}{r}$ - рац; $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$ - рац.



По т. синусов $\frac{a}{\sin\alpha} = R$ (Заменим AB, BC, AC на ~~a, b,~~ c, a, b соотв.)

Площадь Δ можно выразить как $S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p}$

$S = bc\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{S}{bc}$

$$\frac{R}{r} = \frac{a}{\sin\alpha} : \frac{S}{p} = \frac{a}{\frac{S}{bc}} : \frac{S}{p} = \frac{abc\cdot p}{S\cdot S} = \frac{abcp}{S^2}$$

По формуле Герона $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$

Т.к. a, b, c – рац. (по усл.), то $p = \frac{a+b+c}{2}$ тоже рациональное, тогда S^2 тоже рациональное, и $\frac{R}{r} = \frac{abcp}{S^2}$ – рац. ч.т.д.

(произв. рац. чисел – рац. число) (сумма – тоже)

+1/2

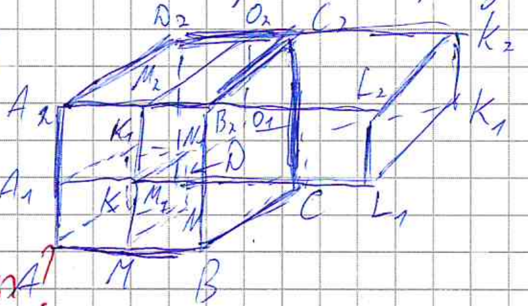
~~$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot 2\sin\beta$~~

№11.4.

Нет, необязательно. Например, если дано 3 парал-да, то при расположении как на рисунке не у всех есть общая точка:

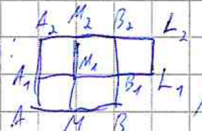
Т.

а условия проверил?!



Изображены парал-ды $ABCDA_2B_2C_2D_2$, $AMNKA_1M_1N_1K_1$, $M_1L_1K_1O_1M_2L_2K_2O_2$.

$M \in AB$, $A_1 \in AA_2$, $K \in AD$, $M_2 \in A_2B_2$, $O_2 \in C_2D_2$

(вид сбоку: 

)

M – общая точка $ABCDA_2B_2C_2D_2$, $AMNKA_1M_1N_1K_1$

$K M_1$ – общая точка $AMNKA_1M_1N_1K_1$, $M_1L_1K_1O_1M_2L_2K_2O_2$

M_2 – общая точка $ABCDA_2B_2C_2D_2$, $M_1L_1K_1O_1M_2L_2K_2O_2$

№11.3

Из теоремы косинусов можно доказать, что $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – рац.

Например, $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}$, a, b, c – рац. $\Rightarrow \cos\alpha$ – рац.