ШИФР Е11132
(заполняется представителем Оргкомитета)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по Математике Дата проведения 22.01.2023
(наименование общеобразовательного предмета)

ФИО участника *(полностью)* Галиев Рафаэль Радикович

Дата рождения

Класс 11

Школа № МАОУ „ФМЛицей №93" район ~~Октябрьский~~ респ. Башкортостан город Уфа

Особые отметки **(Заполняется представителем оргкомитета)** о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

+1 черновик

+1 чистовик

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады **обязан**:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады **запрещается**:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполнявшуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий.

Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы.

Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! *Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.*

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады)

Олимпиада школьников
**БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-
БУДУЩЕЕ НАУКИ**

Чистовик

ШИФР E11132
(заполняется сотрудником секретариата)

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

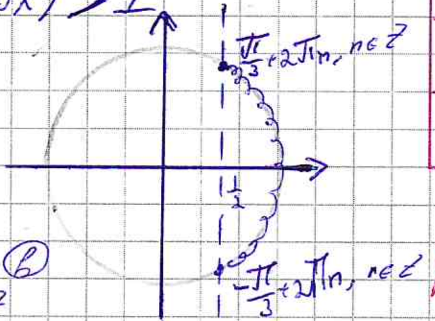
№1	№2	№3	№4	№5
$+_{\cdot}$	+	+ | +	—	$\dot{-}$
19	20	20	0	1

$\boxed{\Sigma = 50}$

№1. $2\cos(\cos x) > 1$

$\cos(\cos x) > \frac{1}{2}$

см. тригоном. окр.



$\begin{cases} (\cos x) > -\frac{\pi}{3}+2\pi n \\ \cos x < \frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z \end{cases}$ (B)

Заметим, что $\frac{\pi}{3} > \frac{3}{3} = 1. \Rightarrow \cos x < \frac{\pi}{3}$ | при любом ~~x~~ x

Аналогично $\cos x > -\frac{\pi}{3}$

Тогда, при $n=0$ (B) $\Rightarrow \begin{cases} \cos x > -\frac{\pi}{3} \\ \cos x < \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow x \in R$

Ответ: $x \in R$.

II способ $\cos x \in [-1;1]$, $\cos x = \varphi$, тогда $\cos(\varphi) > \frac{1}{2}$,

Надо: $1 < \frac{\pi}{3}$ (строго)

т.к 1 радиан $\approx 57^0 < 60^0$. т.к $\cos x$ – убывающ. функ

то $\cos 1 \approx \cos 57^0 > \cos 60^0$ $\cos x > \cos 1 \approx \cos 57^0 > \frac{1}{2}$

Аналогично

$\cos x > \cos(-1) \approx \cos(-57^0) > \frac{1}{2}$

~~№2.~~ $(\sqrt{2023}+\sqrt{2022})^x - (\sqrt{2023}-\sqrt{2022})^x = \sqrt{8088}$ (A)

Заметим, что $(\sqrt{2023})^2 - (\sqrt{2022})^2 = 1$

$(\sqrt{2023}-\sqrt{2022})(\sqrt{2023}+\sqrt{2022}) = 1 \Rightarrow$

$(\sqrt{2023}+\sqrt{2022}) = \frac{1}{\sqrt{2023}-\sqrt{2022}}$ (2)

Пусть $a = (\sqrt{2023}+\sqrt{2022})^x$, тогда (2) $\Rightarrow (\sqrt{2023}-\sqrt{2022}) = \frac{1}{a}$

$a > 0$

(A) $\Rightarrow a - \frac{1}{a} = \sqrt{8088}$ $\quad a^2 - \sqrt{8088} - 1 = 0$

$D = 8088 + 4 = 4(2022+1) = (2\sqrt{2023})^2$

$a = \frac{2\sqrt{2022} \pm 2\sqrt{2023}}{2} = \sqrt{2022} \pm \sqrt{2023}$

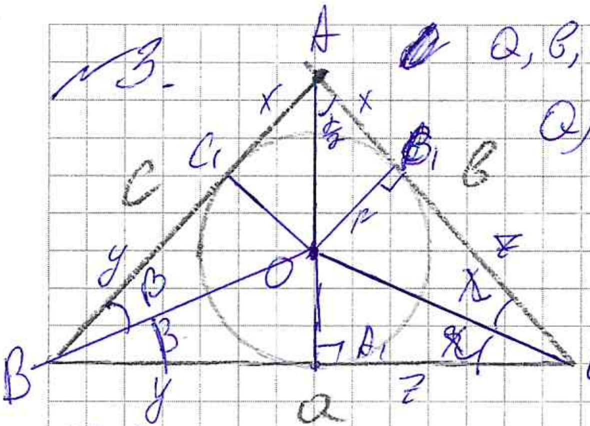
$\left[\begin{array}{l} a = \sqrt{2022}+\sqrt{2023} > 0 \text{ уд} \\ a = \sqrt{2022}-\sqrt{2023} < 0 \text{ неуд} \end{array}\right.$

$(\sqrt{2023}+\sqrt{2022})^x = (\sqrt{2022}+\sqrt{2023})^1$

$x = 1$

(1)

№3.



a, b, c — рациональны.

а) $p = \frac{a+b+c}{2}$; Заметим, что p тоже рацион.

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$; $(p(p-a)(p-b)(p-c))$ рациональна (3)

$S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S}$ (4)

$S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p}$ (5)

(4):(5)

$\frac{R}{r} = \frac{abcp}{4S \cdot S} =$

$\frac{R}{r} = \frac{abcp}{4S^2}$; см (3), $\frac{R}{r} = \frac{abc\cancel{p}}{4\cancel{p}(p-a)(p-b)(p-c)}$

$\frac{R}{r} = \frac{abc}{4(p-a)(p-b)(p-c)}$ (6)

$\left.\begin{array}{l}(a \cdot b \cdot c) \text{ — рационально} \\ (p-a)(p-b)(p-c) \text{ — рационально}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{R}{r}$ — рациональн.

ЧТД

б) Обозначим $A_1; B_1; C_1$ — основание ⊥-ор опущенн. из центра вписанной окружности (см. рис)

Пусть $AB_1 = x$, тогда по правилу о двух касательных провед. через одну точку к одной окружности $AB_1 = AC_1 = x$

Пусть $\begin{cases} CB_1 = z \Rightarrow CA_1 = z \\ BC_1 = y \Rightarrow BA_1 = y \end{cases}$ тогда $2x + 2y + 2z = a+b+c$

$x = \frac{a+b+c}{2} - (y+z)$

см. рис.

$x = p - c$ (7)

(7) $\Rightarrow \begin{cases} y = p - b \\ z = p - c \end{cases}$

$\triangle OAB_1$: $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{x}$ см (7) $tg\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{p-a}$

Аналогично $tg\frac{\beta}{2} = \frac{r}{p-b}$; $tg\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{p-c}$

Продолжение на след

~~Пусть 3-парал-пед имеет с F_1 (первым) общ. точку т. M~~
~~F_3 F_2 т. N~~

Пусть 3-парал-пед имеет общую точку M с F_1 (первым) и т. N с F_2.

Тогда т. M и т. N лежат в разных полупр. от α, β, γ.

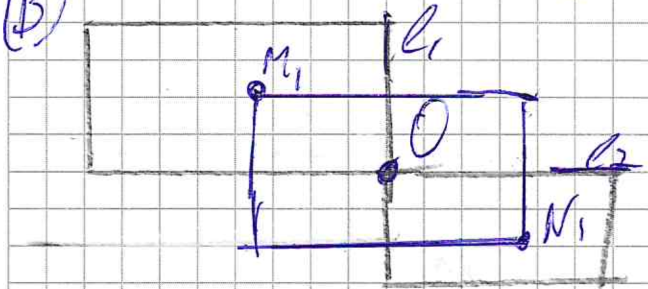
Проведем через них
$$\begin{cases} \alpha_1, \alpha_2 \parallel \alpha \\ \beta_1; \beta_2 \parallel \beta \\ \gamma_1; \gamma_2 \parallel \gamma \end{cases}$$

?

Пусть. M_1, N_1 – проекции M и N на пл. β.
Дорисуем из M_1 и N_1 – парр-пед, с гранями α_1, α_2; β_2 ...

~~Пусть П~~ Тогда грань с пл. β_1 проецируется на пл. β и фигура проекции явл. прямоуг. (т.к ~~грани~~ ребра $\parallel$-ны)

(β)



Т.к т. M_1 и N_1 лежат в разных полуплоскостях от прямых l_1 и l_2 то т. O лежит внутри прямоугольника

тогда „наш дорисованный парал-пед" имеет также общую точку O, тогда и F_3 тоже имеет эту точку. Т.к „дорисованный" $\in F_3$.

Аналогично, если 2-парал-педа имеет $\geq$ чем 1 точку 3 паррал. будет иметь их. Тогда каждая (попарно) раз по 3-ем параллелепи. то они будут иметь общ. точку.

Ответ: Да

2

№3 (Продолжение)

$r = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(p-a)$ (8)

По т. синусов в Δ-ке $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$

$R=\frac{a}{2\sin\alpha}=\frac{b}{2\sin\beta}=\frac{c}{\sin\frac{\gamma}{2}}$ (9)

(9):(8) $\frac{R}{r}=\frac{a}{2\sin\alpha}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{(p-a)\sin\frac{\alpha}{2}}$ $\frac{R}{r}=\frac{a}{p-a}\cdot\frac{\cancel{\cos\frac{\alpha}{2}}}{2\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cancel{\cos\frac{\alpha}{2}}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}$

$\frac{R}{r}=\frac{a}{p-a}\cdot\frac{1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ (10)

(10)=(6) $\frac{a}{(p-a)}\cdot\frac{1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{abc}{4(p-a)(p-b)(p-c)}$ $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}$

Аналогично: $\sin^2\frac{\beta}{2}=\frac{(p-a)(p-c)}{ac}$

$\sin^2\frac{\gamma}{2}=\frac{(p-a)(p-b)}{ab}$ (11)

$\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}=\frac{(p-a)^2(p-c)^2(p-b)^2}{a^2b^2c^2}$

$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{(p-a)(p-c)(p-b)}{abc}$ – рационально

ЧТД.

№4. Изобразим 2 параллелепипеда, которые ~~имеа~~ имеют только 1 общую точку. (т. O)

Только, так =>

Заметим, что грани ||-ны по признаку.

Ведь, если общ. точка лежат на ребре, то т.к ребра ||-ны, будет „наложение" и ребра обоих парал-дов имеют общ. отрезок. Если внутри одного из парал-дов, то отсекается ~~об~~ 3 парал-пипед.

Заметим, что парал-перы лежат в разных полупростр. от плоскостей α, β, γ

№4 Противоречие

Мы доказали, что у 3-ех обязательно имеется 1-общая точка. Тогда разбирая каждый раз по 3-ем паралл-педы то будем иметь, что у них всех минимум общ. точка

Ответ: да ~~можно~~.

№5

б) да, можно

Пример: 1, 4, 7, 2, 5, 8, 3, 6, 9, 12, 7, 10

+3 +3 −5 +3 +3 −5 +3 +3 +3 −5 −5.

повтор

нет 11

3