

ШИФР

11-28

(заполняется представителем Оргкомитета)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике Дата проведения 22.01.2023
(наименование общеобразовательного предмета)Фамилия И.О. участника Цоганов П.И.

Серия и номер паспорта []

Дата рождения [] Класс 11Школа № 3 район [] город Симферополь

Особые отметки (Заполняется представителем оргкомитета)
о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады обязан:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады запрещается:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполняющуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий.

Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись (другие записи на папке делать запрещено).

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы.

Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады)

Фамилию, имя, отчество не писать! Лист не подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№ 11.1

(1)

$2 \cos(\cos x) > 1$. Пусть $t = \cos x$, тогда

$2 \cos t > 1$

$\cos t > \frac{1}{2}$

$-\frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\begin{cases} \cos x > -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \\ \cos x < \frac{\pi}{3} + 2\pi n \end{cases} n \in \mathbb{Z}$

Если $n = 0$, то $\begin{cases} \cos x > -\frac{\pi}{3} \\ \cos x < \frac{\pi}{3} \end{cases}$

Заметим, что $-\frac{\pi}{3} < -1$, а $\frac{\pi}{3} > 1$, но $\cos x \in [-1; 1] \Rightarrow$ система верна всегда при любом $x \Rightarrow x \in (-\infty; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; +\infty)$

№ 11.2

$(\sqrt{2023} + \sqrt{2022})^x - (\sqrt{2023} - \sqrt{2022})^x = \sqrt{8088}$

Заметим, что $(\sqrt{2023} + \sqrt{2022}) / (\sqrt{2023} - \sqrt{2022}) = 2023 - 2022 = 1$

$\Rightarrow \sqrt{2023} + \sqrt{2022} = \frac{1}{\sqrt{2023} - \sqrt{2022}}$

Пусть $t = \sqrt{2023} + \sqrt{2022}$, тогда

$t^x - \frac{1}{t^x} = \sqrt{8088}$

Рассмотрим функцию $f(x) = t^x - \frac{1}{t^x}$

$f'(x) = t^x \ln t - (-\frac{1}{t^x}) \cdot t^x \ln t = t^x \ln t + \frac{t^x \ln t}{t^x} > 0 \Rightarrow$

функция монотонно возрастает \Rightarrow уравнение $t^x - \frac{1}{t^x} = \sqrt{8088}$ имеет максимум 1 корень

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

Заметим, что при $x=7$:
 $(\sqrt{2023} + \sqrt{2022})^7 - (\sqrt{2023} - \sqrt{2022})^7 = 2\sqrt{2022}$
 $= \sqrt{8088}$. Значит, при $x=7$ равенство верно.
 Как уже было доказано, боковые корни быть не может.

Ответ: 7

№11.4

Докажем, что для трёх параллелингов, удовлетворяющих условию, будет верно, что у них есть минимум одна общая точка. Из этого утверждения на прямую следует доказательство общего случая, потому что его доказательство легко обобщается.

Рассмотрим 3 параллелингов α , β и γ . Пусть $A = \alpha \cap \beta$, $B = \alpha \cap \gamma$, $C = \beta \cap \gamma$.

Существуют такие A и B , лежащие в грани параллелингов α , потому что иначе точки C бы не существовало, потому что параллелингов лежали бы по разные стороны от грани α с учётом ~~их~~ параллельности рёбер.

Рассмотрим также A , B и C , которые лежат в грани α (ранее было доказано их существование).

A \dots B \dots C в грани α C - общая точка двух параллелингов β и γ и параллелингов α и γ .

Фамилию, имя, отчество не писать! Лист не подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

никогда \times , т.к. они пересекаются в его центре.

Что и требовалось доказать. Значит, обязательно -
но все параллельные имеют общую точку

Ответ: обязательно

3

✓ 11.3

а) Пусть a, b, c — стороны треугольника, по условию
 $a, b, c \in \mathbb{Q}$ (рациональные)

Тогда $p = \frac{a+b+c}{2} \in \mathbb{Q}$

$S = pZ = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ — площадь треугольника \Rightarrow

~~$$Z = \frac{S}{p}, R = \frac{abc}{4S} \Rightarrow \frac{R}{Z} = \frac{\frac{abc}{4S}}{\frac{S}{p}} = \frac{pabc}{4S^2}$$~~

$$Z = \frac{S}{p}, R = \frac{abc}{4S} \Rightarrow \frac{R}{Z} = \frac{\frac{pabc}{4S}}{\frac{S}{p}} = \frac{pabc}{4S^2}$$

$pabc$ — рациональное число, т.к. получено умножением
и делением рациональных чисел

$4S^2 = 4 \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}^2 = 4p(p-a)(p-b)(p-c)$ —
рациональное число, т.к. получено умножением
рациональных чисел \Rightarrow

$\frac{R}{Z} \in \mathbb{Q}$ — рациональное число, так как получено
делением одного рационального числа на другое

рациональное число. \therefore т.д. \neq $+1/2$

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№ 71.5 (4)

а) Давайте для каждого числа запишем, какие соседи у него могут быть:

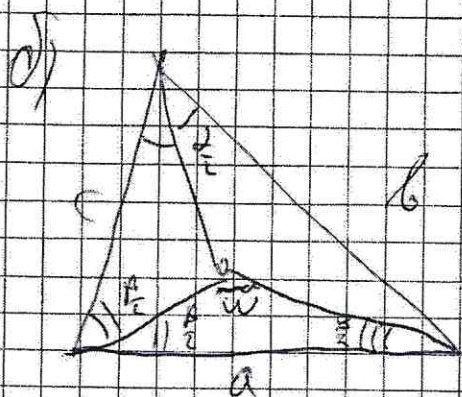
1 — 4, 6; 2 — 5, 7; 3 — 6, 8; 4 — 1, 9; 5 — 8, 10, 2;
 6 — 9, 11, 3, 1; 7 — 10, 4, 8; 8 — 11, 5, 3; 9 — 6, 4;
 10 — 7, 5; 11 — 8, 6.

Заметим, что есть числа, у которых нет соседа
 соседа то есть всего 2 возможных соседа.
 Такие числа являются: 1, 2, 3, 9, 10, 11. Из-за
 этого, если эти числа стоят не в начале и не в конце,
 обязательно быть следующие цепочки соседей:
 $7 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 10 \rightarrow 1$, $6 \rightarrow 11 \rightarrow 8 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \Rightarrow$
 2 или 5, а также 11 или 3 должны стоять по
 краям.

При этом 6 участвует в ещё одной
 цепи: $6 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 9 \rightarrow 6$, но уже ничего
 по краям расставить нельзя, т.к. эти места
 заняты \Rightarrow невозможно расставить числа
 от 1 до 11 так чтобы выполнялось описание
 в условии свойства. Ч.т.д.

б) Если расставить числа от 1 до 12 следующим
 образом: 11, 8, 3, 6, 1, 4, 9, 12, 7, 10, 5, 2 — то описанные
 условия будут выполняться. Ответ: можно

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!



№ 3 (дополнение)

5

$$\begin{aligned} W &= 180^\circ - \frac{A}{2} - \frac{B}{2} = \\ &= 90^\circ + \frac{C}{2} \Rightarrow \\ \sin W &= \sin \frac{C}{2} \end{aligned}$$

Из теоремы синусов

следует, что

$$\sin \alpha = \frac{2R}{a}$$

