



ШИФР

аЕ - 43

(заполняется представителем Оргкомитета)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИпо математике

(наименование общеобразовательного предмета)

Дата проведения 21.01.2024ФИО участника (полностью) Пахотинский Лев ВасильевичДата рожденияКласс 11Школа № СШ № 37 районгород Екатеринбург

Особые отметки (Заполняется представителем оргкомитета)
о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

письменному заявлению после истечения времени,
предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), односторонней во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы.

Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады)

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады обязан:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады запрещается:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполняющуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий.

Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по

ШИФР **AE-43**

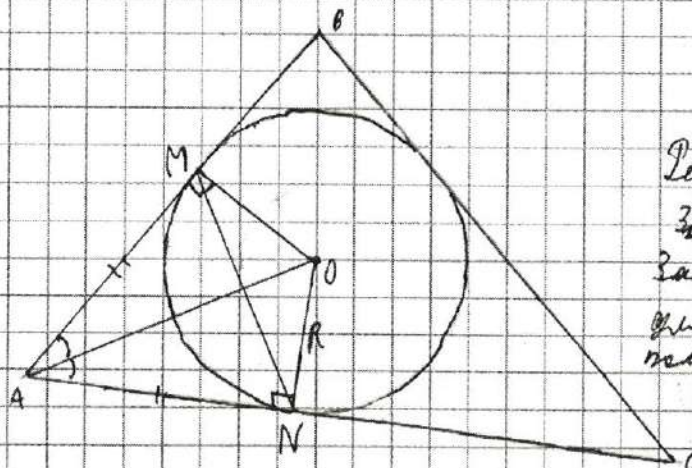
(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Задание 5	Сумма баллов
+	+	+	-	-	
20	12	18	2	0	50

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

N 1.1.



Решение:

Заметим, что $\angle MON = 180^\circ - \angle A$ ($\angle AMO = \angle ANO = 90^\circ$).
Заметим т. cos в $\triangle AMN$ и $\triangle MON$, т. $\angle AMN = \angle MON$ (или $\triangle AMO \sim \triangle ONA$ по св-ву кас.) и $AO = 2 \cdot MN$, т. $AO = 2R$, т. $OM = ON = R$, и $\angle AMN = \angle MON$ по св-ву касательных, извл-м из (1-й).

$$MN^2 = 2R^2 - 2R^2 \cdot \cos(180^\circ - \angle A) = 2R^2(1 + \cos \angle A)$$

$$MN^2 = 2AN^2 - 2AN^2 \cdot \cos(\angle A) = 2AN^2(1 - \cos \angle A)$$

$$AN^2 = AO^2 - R^2 = 4MN^2 - R^2$$

сократим 2-е выражение на R^2 и раскроем скобки:

$$MN^2 = 2R^2 \cdot (1 + \cos \angle A)$$

$$2(1 + \cos \angle A) = 16 - 16 \cos \angle A + 16 \cos^2 \angle A - 16 \cos^2 \angle A - 2 + 2 \cos \angle A \quad (2)$$

$$AN^2 = 4MN^2 - R^2$$

(2):

$$2 + 2 \cos \angle A = 16 - 16 \cos^2 \angle A - 2 + 2 \cos \angle A$$

$$-12 + 16 \cos^2 \angle A = 0$$

$$\cos^2 \angle A = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos \angle A = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos \angle A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\angle A = 30^\circ$$

$$\angle A = 150^\circ$$

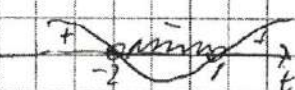
Ответ $\angle A = 30^\circ$, $\angle A = 150^\circ$

N 1.3(a)

$$x^2 y^2 \leq 2 - xy$$

$$\text{пусть } t = xy; \quad t^2 + t - 2 \leq 0$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 1 \end{cases}$$



$$t \in [-2; 1] \Rightarrow xy \in [-2; 1]$$

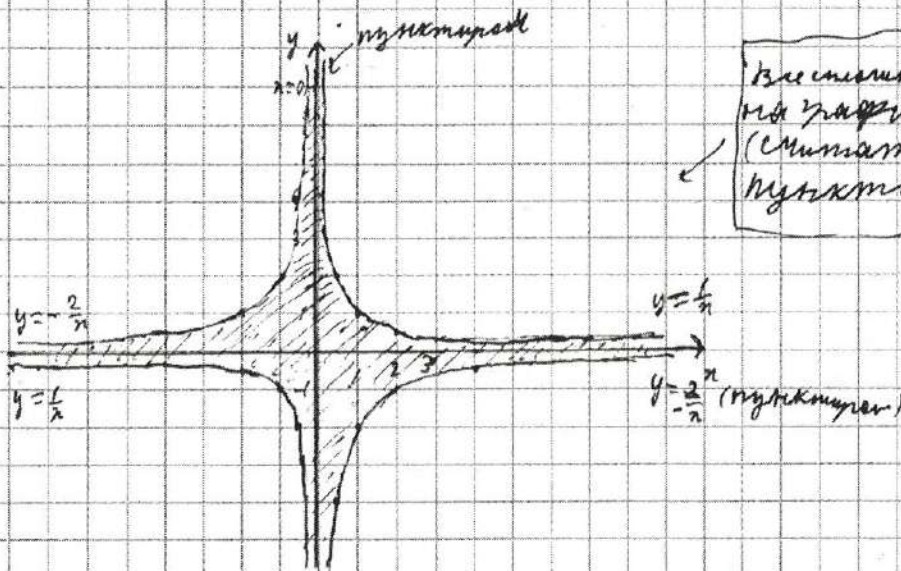
Серь

рассмотрим 3 случая:

$$1) x=0: \begin{cases} xy > -2 \\ xy < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 > -2 \\ 0 < 1 \end{cases} \checkmark$$

$$2) x > 0: \begin{cases} y > -\frac{2}{x} \\ y < \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$3) x < 0: \begin{cases} y < -\frac{2}{x} \\ y > \frac{1}{x} \end{cases}$$



Важно помнить! Вспомогательные функции на графике - не включаются! (считать по рисовочным пустыням!!!)

Заметим, что из любой точки множества можно провести прямую вида $y = k_1 x$ или $x = 0$, которая пройдет через точку $(0, 0)$.

Из этой точки также можно провести прямую $y = k_2 x$ (возможно, $k = k_1$).

Или $x=0$, тем самым соединив 2 точки при помощи 2 прямых, или,

в случае, когда $k_1 = k_2$, или $x=0$ пройдет через обе точки - при помощи одной прямой.

Но как можно проводить прямые вида $kx + b = y$, для

того, чтобы соединить 2 точки, но 1 прямой? Если это возможно при условии

принадлежности отрезка AB к плоскости, то можно соединить 2 точки A и B при помощи 1 прямой.

В случае если, это невозможно без выхода за границы множества,

тогда, если (1), при помощи способа, можно гарантированно

соединить 2 точки не более чем 2-мя прямыми. Отрезками! (или

прямой): $\begin{cases} y = k_1 x + b_1 \\ y = k_2 x + b_2 \end{cases} \quad k_1 x + b_1 = k_2 x + b_2 \quad x_0 = \frac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2} \Rightarrow y_0 =$

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

N 11.4.

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6} = \frac{p}{q}, \quad \begin{cases} p \in \mathbb{Z} \\ q \in \mathbb{N} \end{cases}, \quad a, b, c \in \mathbb{Q}, \text{ где}$$

$$\sqrt{6}\left(\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{2}} + c\right) = \frac{p}{q} \Rightarrow \text{можно, так как } \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{6}\left(\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{6}c = \frac{p}{q} \quad \text{или} \quad a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6} = \frac{p}{q}, \text{ где } \begin{cases} p \in \mathbb{Z} \\ q \in \mathbb{N} \\ a, b, c \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Рассматриваем случаи

1) ~~оба не равны 0~~ $a, b, c \neq 0$: $\frac{\sqrt{2}}{bc} + \frac{\sqrt{3}}{ac} + \frac{\sqrt{6}}{ab} = \frac{p}{qabc}$ - уравнение

$\Rightarrow \nexists a, b, c \in \mathbb{Q} \text{ и } a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$

2.1) $a \neq 0, b, c \neq 0$ $\sqrt{3}b + \sqrt{6}c = \frac{p}{q}$ - уравнение \Rightarrow обратим \Rightarrow $\nexists b, c \in \mathbb{Q}$, так как $\sqrt{3}$ и $\sqrt{6}$ несоизмеримы.

выполняется это усл.

2.2) $b = 0, a, c \neq 0$ $\sqrt{2}a + \sqrt{6}c = \frac{p}{q}$ - уравнение \Rightarrow $\nexists a, c \in \mathbb{Q}$

2.3) $c = 0, a, b \neq 0$ $\sqrt{2}a + \sqrt{3}b = \frac{p}{q}$ - уравнение \Rightarrow $\nexists a, b \in \mathbb{Q}$

3). $a, b, c = 0$: $0 \cdot \sqrt{2} + 0 \cdot \sqrt{3} + 0 \cdot \sqrt{6} = \frac{p}{q}$ $0 = \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{p}{q} = 0 \in \mathbb{Q}$

Отсюда следует, что $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6}$ является рациональным

числом только при $a = b = c = 0$.

N 11.5. $\log_2 \frac{64}{2} = 32$

Ответ: 32

N 11.2.

$\left| \sin \frac{11\pi x}{24} \right| = a, \quad a \in [0; 1], \quad x \in [0; 24)$ рассмотрим 3 случая:

1) $a = 0$: $\begin{cases} \sin \frac{11\pi x}{24} = 0 \\ x \in [0; 24) \end{cases} \Rightarrow \frac{11\pi x}{24} = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{48k}{11}$

$0 \leq k < 5,5$ - 6 значений для $a = 0$

?

$$2) \begin{cases} \alpha = 1 \\ |\sin \frac{11\pi}{29} x| = 1 \\ x \in [0; 24) \end{cases}$$

$$\alpha = 1 \quad \frac{11\pi}{29} = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \sin \frac{11\pi}{29} x = 1 \\ \sin \frac{11\pi}{29} x = -1 \\ x \in [0; 24) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ x = \frac{12}{11} + \frac{91}{11}k \\ x = -\frac{12}{11} + \frac{91}{11}k \\ x \in [0; 24) \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{12}{11} + \frac{91}{11}k < 24 \\ 0 \leq -\frac{12}{11} + \frac{91}{11}k < 24 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq 1 + 4k < 22 \\ 0 \leq -1 + 4k < 22 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \leq k < \frac{21}{4} \\ 0 \leq k < \frac{23}{4} \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$k = 1 - 2 \text{ или } k = 1 - 2 \text{ или } k \in [0; 5\frac{3}{4}) - 11\pi/29$$

$$\alpha = 1 - 11$$

$$\alpha = 1 - 1/2 \text{ периода (корни)}$$

$$3) \begin{cases} \alpha \in (0; 1) \\ |\sin \frac{11\pi}{29} x| = \alpha \\ x \in [0; 24) \end{cases}$$

~~аргумент функции~~
поскольку $\alpha > 0$, можно разложить на множители
корни, когда $\sin > 0$, α замен

$$\begin{cases} \alpha \in (0; 1) \\ \sin \frac{11\pi}{29} x > 0 \\ \sin \frac{11\pi}{29} x = \alpha \\ \sin \frac{11\pi}{29} x = -\alpha \\ x \in [0; 24) \end{cases}$$

Рассмотрим промежуток $x \in [0; \frac{48}{11}]$

$$\begin{cases} \alpha \in (0; 1) \\ x \in [0; 24) \\ \frac{11\pi}{29} x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2\pi k; \pi + 2\pi k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{11\pi}{29} x = \arcsin \alpha + 2\pi n \\ \frac{11\pi}{29} x = \pi - \arcsin \alpha - 2\pi n \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\frac{11\pi}{29} x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (-\pi + 2\pi k; 2\pi k)$$

$$\begin{cases} \frac{11\pi}{29} x = -\arcsin \alpha + 2\pi n \\ \frac{11\pi}{29} x = \pi + \arcsin \alpha + 2\pi n \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№ 11.2 (продолжение)

$$\left\{ \begin{array}{l} x \in U_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{48}{11}k; 2\pi \frac{29}{11} + \frac{48}{11}k \right) \\ \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{29}{11\pi} \arcsin a + \frac{48}{11}n \\ x = 2\pi \frac{29}{11} - \frac{29}{11\pi} \arcsin a + 2\pi n \end{array} \right. , n \in \mathbb{Z} \\ x \in U_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\frac{29}{11}k + \frac{48}{11}k; \frac{48}{11}k \right) \\ \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{29}{11\pi} \arcsin a + \frac{48}{11}n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{29}{11\pi} + \frac{29}{11\pi} \arcsin a + \frac{48}{11}n, n \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \\ a \in (0; 1) \\ x \in [0; 24) \end{array} \right.$$

Заметим $\frac{29}{11\pi} \frac{11\pi n}{29} = t, t \in [0; 11\pi)$

$$\left\{ \begin{array}{l} a \in (0; 1) \\ |\sin t| = a \\ t \in [0; 11\pi) \end{array} \right.$$

$$t \in \left\{ \begin{array}{l} a \in (0; 1) \\ \begin{cases} \sin t = a \\ \sin t = -a \end{cases} \\ t \in [0; 11\pi) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a \in (0; 1) \\ t \in [2\pi k; \pi + 2\pi k) \\ \begin{cases} t = \arcsin a + 2\pi h, h \in \mathbb{Z} \\ t = \pi - \arcsin a + 2\pi h, h \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ \begin{cases} t \in U_{k \in \mathbb{Z}} (-\pi + 2\pi k; 2\pi k) \\ t = -\arcsin a + 2\pi h, h \in \mathbb{Z} \\ t = \pi + \arcsin a + 2\pi h, h \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{array} \right. \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{matrix}$$

$$2\pi k - \arcsin a + 2\pi h \leq \pi + 2\pi k$$

$$2\pi(k-h) - \arcsin a \leq \pi(1+k-h)$$

$$2\pi k - \arcsin a \leq \pi + 2\pi h \leq \pi + 2\pi k, \text{ так как } \arcsin a \leq \frac{\pi}{2}, \text{ так как } a \in (0; 1)$$

$$(1) 0 \leq \arcsin a + 2\pi h \leq 11\pi - n \in \mathbb{Z}$$

$$-\arcsin a \in 2\pi n \leq 11\pi - \arcsin a - \text{брем}$$

$$2) 0 \leq \pi - \arcsin a + 2\pi h \leq 11\pi$$

$$-\pi + \arcsin a \leq 2\pi h \leq 11\pi - \pi + \arcsin a$$

2) - брем.

, $n \in \mathbb{Z}$

3/

$$0 \leq -\arcsin \alpha + 2\pi n < \pi$$

$$\arcsin \alpha \leq 2\pi n < \pi + \arcsin \alpha - 5 \text{ рел.}$$

$$\textcircled{4} \quad 0 \leq \pi + \arcsin \alpha + 2\pi n < 2\pi$$

$$-\pi - \arcsin \alpha \leq 2\pi n < \pi - \arcsin \alpha - 5 \text{ рел.}$$

, $n \in \mathbb{Z}$

Умно, при $\alpha \in (0, 1)$ - 6+6+5+5=22 перемен. при $n \in [0, 24)$

~~Две~~
~~Две~~ -
~~Две~~ $\alpha = 0$ - 6 перемен, $\alpha = 1$ - 12 перемен, $\alpha \in (0, 1)$ - 22 перемен
~~при $\alpha \in (0, 1)$ - 22 перемен~~
 ~~$\alpha \in (0, 1)$~~

1/2) Две $\alpha = 0$ - 6 копий, $\alpha = 1$ - 12 копий,
 $\alpha \in (0, 1)$ - 22 копии

