



ШИФР

ака - 32

Единогласно принято и утверждено Оргкомитетом

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИпо математике Дата проведения 28.01.2024

(наименование общеобразовательного предмета)

ФИО участника (полностью) Разлеев Ян СтаниславовичДата рождения _____ Класс 11Школа № 35 район Нижнекамский город Нижнекамск

Особые отметки (заполняется представителем оргкомитета)
о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил
поведения и т.д.

Все виды шпательков изымаются и выдаются по
письменному заявлению после истечения времени,
предусмотренного на подачу и рассмотрение
апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист
«Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для
черновых записей, можно писать или синей, или
фиолетовой, или черной пастой (чернилами),
одинаковой во всей работе (при необходимости смены
цвета пасты (чернил), следует обратиться за
разрешением к представителю оргкомитета
олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах,
на которых имеются рисунки или записи, не
относящиеся к выполняемому заданию, а также записи
не на русском языке, и любые другие пометки,
которые могут идентифицировать участника, на
проверку не поступают и претензии по этим заданиям
(задачам) не принимаются. На проверку не поступают
также листы, подписанные участником, листы, на
которых имеются записи карандашом (кроме
рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и
рваные (надорванные) листы.

Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! Если в работе ошибки исправлены
карандашом, то при цифровке работы карандашные
исправления будут стерты и на проверку поступит
работа без исправлений.

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады обязан:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады запрещается:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпательки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполняющуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады)



Вариант

Бланк ответов №2

uka-32

Шифр

Отвечая на задания теста, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы. Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете, например, С1. Условия задания переписывать не нужно.

1	2	3	4	5	Σ = 68
+	+	+	+	+	
20	20	20	4	4	

$$n \neq 1.$$

$$\sin^4 x + 1 = \cos(\sqrt{3} \cdot x) \quad (1)$$

$$0 \leq \sin^4 x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \sin^4 x + 1 \leq 2$$

$$-1 \leq \cos(\sqrt{3} \cdot x) \leq 1$$

Левая часть принимает значение $\in [1; 2]$, а правая только $\in [-1; 1]$. Знаем, равенство возможно только если обе части равны 1. Получаем:

$$\begin{cases} \sin^4 x + 1 = 1 \\ \cos(\sqrt{3} x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^4 x = 0, \\ \sqrt{3} x = 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}), \\ x = \frac{2\pi k}{\sqrt{3}} \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Не трудно заметить, что $x = 0$ является решением системы ($x = 0$ - решение при $n = k = 0$).

Других решений система не имеет, так как:

$$\pi n = \frac{2\pi k}{\sqrt{3}}, \text{ где } n, k \in \mathbb{Z} \text{ (даже } n, k \text{ тоже целые)}$$

$$n\sqrt{3} = 2k - \text{при } n \neq 0 \text{ и } k \neq 0 \text{ левая}$$

часть иррациональна, а правая - целое; такого

быть не может. Поэтому, $x = 0$ - единственное



Вариант

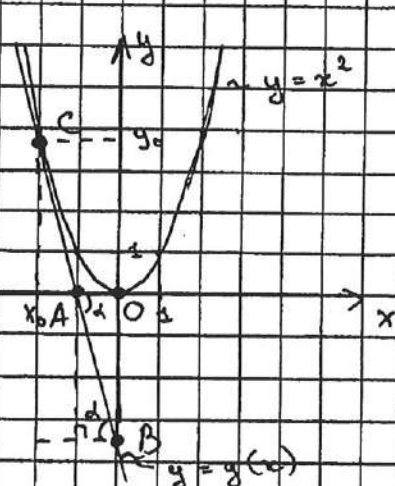
Бланк ответов №2

Ka-52

Шифр

Отвечая на задания теста, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы.
Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете, например, С1.
Условия задания переписывать не нужно.

решение уравнение (1).

Ответ: $x = 0$. ~ 2 .

Уравнение касательной:

$$g(x) = kx + b \quad (k \neq 0, \text{ т.к. если } k=0, \text{ то } 0 \neq 4)$$

Из соображений симметрии

рассмотрим случай, когда

 $k < 0$ (при $k > 0$ решение аналогичное)

Проведём касательную, пусть C — точка касания

, а её координаты $(x_0; y_0)$. В точке касания

значение производной равно тангенсу угла наклона

касательной, то есть $-\tan \alpha$ („—“ из-за того, что $y_0(x)$ — убывает).

$$-\tan \alpha = -\frac{OB}{AO} = -4.$$

Найдём производные функций:

$$y'(x) = 2x; \quad g'(x) = k$$

Из условия касания имеем:

$$g'(x_0) = y'(x_0) = -\tan \alpha = -4$$

$$g'(x_0) = k = -4.$$

$$y'(x_0) = 2x_0 = -4 \Rightarrow x_0 = -2.$$



Вариант

Бланк ответов №2

ака-32

Шифр

Отвечая на задания теста, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы.
Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете, например, С1.
Условия задания переписывать не нужно.

Тогда $y(x_0) = g(x_0) = (-2)^2 = 4.$

$$g(x_0) = kx_0 + b$$

$$(-4) \cdot (-2) + b = 4 \Leftrightarrow b = -4.$$

+

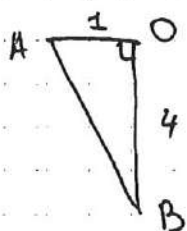
Тогда уравнение касательной: $g(x) = -4x - 4.$

Найдём длины отрезков AO и BO :

$$-4x_A - 4 = 0 \Leftrightarrow x_A = -1 \Rightarrow AO = 1.$$

$$BO = 4 \cdot AO = 4.$$

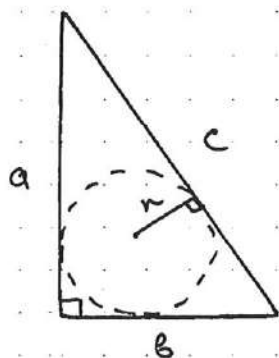
Тогда в прямоугольном $\triangle AOB$:



по т. Пифагора: $AB = \sqrt{AO^2 + OB^2} =$
 $= \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}.$

Ответ: $\sqrt{17}.$

~ 3.



Пусть катеты треугольника равны a и b ,
гипотенуза — c , а радиус вписанной
окружности — r .

По условию $a, b, c \in \mathbb{Z}$

Требуется доказать, что $r \in \mathbb{Z}$

$$r = \frac{a+b-c}{2}, \text{ если } (a+b-c) : 2, \text{ то } r \text{ — целое}$$

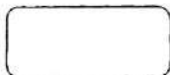
т.к. $r = \frac{2k}{2} = k$, где k — целое.

Так как \triangle прямоугольный: $a^2 + b^2 = c^2$

$$(a+b)^2 - 2ab = c^2$$

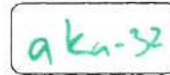
$$(a+b)^2 - c^2 = 2ab$$

$$(a+b-c)(a+b+c) = 2ab$$



Вариант

Бланк ответов №2



Шифр

Отвечая на задания теста, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы.
Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете, например, С1.
Условия задания переписывать не нужно.



Получаем уравнение в целых числах, где правая часть делится на 2, следовательно и левая часть должна делиться на 2. Возможны 3 случая:

Случай 1. $a + b + c \equiv 0 \pmod{2}$

(Здесь и далее " \equiv " - сравнение по модулю 2)

$$a + b + c \equiv 0 \Rightarrow a + b \equiv -c, \text{ тогда}$$

$$a + b - c \equiv -c - c = -2c \equiv 0$$

\Rightarrow в этом случае $(a + b - c)$ - четное $\Rightarrow r$ - целое число.

Случай 2. $a + b - c \equiv 0$

Сразу получаем, что r - целое число.

Случай 3. $a + b - c \equiv 0$ и $a + b + c \equiv 0$

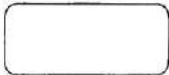
Аналогично случаю 2, r - целое число.

Таким образом, у прямоугольного треугольника с целочисленными сторонами радиус вписанной окружности тоже является целым числом.

ч.т.д.

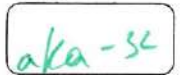
~ 4.

Пусть есть 2 набора чисел A_0 - набор чисел вида $\sin \alpha_i$, где $i \in [1; 100]$ ($i \in \mathbb{Z}$) и B_0 - набор чисел вида $\sin \alpha_j$, где $j \in [1; 100]$ ($j \in \mathbb{Z}$).



Вариант

Бланк ответов №2



Шифр

Отвечая на задания теста, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы.
Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете, например, С1.
Условия задания переписывать не нужно.

Пусть $\sin \alpha_1 \leq \sin \alpha_2 \leq \dots \leq \sin \alpha_{100}$. Тогда набор A , где числа α_i ^{из набора A_0} отсортированы в порядке убывания, имеет вид: $A = \{\sin \alpha_1; \sin \alpha_2; \dots; \sin \alpha_{99}; \sin \alpha_{100}\}$.

Тогда если B - отсортированный в порядке убывания набор A_0 , имеет вид: $B = \{\cos \alpha_{100}; \cos \alpha_{99}; \dots; \cos \alpha_2; \cos \alpha_1\}$

так как чем больше $\sin \alpha$, тем меньше $\cos \alpha$;

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

нет строгого обоснования

Сравним числа: $\sin \alpha_1 \cos \alpha_2$ и $\sin \alpha_1 \cos \alpha_1$
(при $\sin \alpha_1 \neq 0$, иначе получаем тождество $0=0$)
 $\cos \alpha_2 \leq \cos \alpha_1$

$$\text{Значит, } \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \leq \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 = \frac{1}{2} \sin 2\alpha_1 \leq \frac{1}{2}$$

Аналогично рассуждая для $\sin \alpha_2 \cos \alpha_3; \sin \alpha_3 \cos \alpha_4; \dots$

$\dots \sin \alpha_{99} \cos \alpha_{100}$; $\sin \alpha_{100} \cos \alpha_1$, получаем, что каждое из них $\leq \frac{1}{2}$.

~~Для числа $\sin \alpha_{100} \cos \alpha_1$~~

~~аналогично, $\sin \alpha_{100} \cos \alpha_1 \leq \sin \alpha_{100}$ - произведение~~

~~двух убывающих чисел каждого из наборов. Значит,~~

~~они не меньше, чем произведение любых двух~~

~~чисел наборов A и B (из каждого набора по 1 числу).~~

Тогда ~~числа $\sin \alpha_{100}$ и $\cos \alpha_1$ не превосходят~~

$$\text{Тогда } \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 + \dots + \sin \alpha_{100} \cos \alpha_1 \leq \frac{1}{2} \cdot 100 = 50.$$

з.т.г.



Вариант

Бланк ответов №2

ака-32

Шифр

Отвечая на задания теста, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы.
Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете, например, С1.
Условия задания переписывать не нужно.

№5

x - иррациональное ; p - целое

$$x(x+1)(x+2) \stackrel{?}{=} p$$

При $p = 0$: $x(x+1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$ не удовлетворяет условию

Рассмотрим функцию

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x ; f'(x) = 3x^2 + 6x + 2$$

~~$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 2$$~~

Среди значений функции $f(x)$ не может быть целого числа, так как ^{одно из} слагаемых всегда

будет иррационально. ($2x$ - всегда иррационально).

Чтобы иррациональные слагаемые сократились необходимо:

~~$$\begin{aligned} x^3 &= 2x, & x \neq 0 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm\frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$~~

с учетом того, что x - иррациональное число, могут получиться только $x = \pm\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} f(\sqrt{2}) &= \\ f(-\sqrt{2}) &= \end{aligned} \quad \begin{cases} x^3 = -2x, \\ 3x^2 = -2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -2, \\ x = 0 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

неверно

Нам может получиться только $x = -\frac{2}{3}$

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{2}{3}\right) &= -\frac{8}{81} + 3 \cdot \frac{4}{81} - \frac{2 \cdot 2}{3} = -\frac{8}{81} + \frac{8}{81} - \frac{4}{3} = -\frac{4}{3} \\ &= -\frac{8}{81} - \text{не целое число. Значит такого быть не может.} \end{aligned}$$

Ответ: нет, не существует.