



ШИФР

a Kp-6

(заполняется представителем Оргкомитета)

## Письменная работа

### Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике Дата проведения 21.01.2024  
(наименование общеобразовательного предмета)ФИО участника (полностью) Солоненко Андрей АлексеевичДата рождения \_\_\_\_\_ Класс 11Школа № ФМШ СФУ район Красноярский край город Красноярск**Особые отметки** (Заполняется представителем оргкомитета)  
о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

+ 1 чистовик  
+ 1 чистовик

предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

#### Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы.

Нельзя делать исправления карандашом.

**Внимание!** Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады)

#### Правила поведения

Участник очного тура олимпиады обязан:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

**Внимание.** Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады запрещается:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

**Внимание.** За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполнявшуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий.

Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени,



1	2	3	4	5	Σ
+	+	+	+	+	
20	20	16	6	4	66

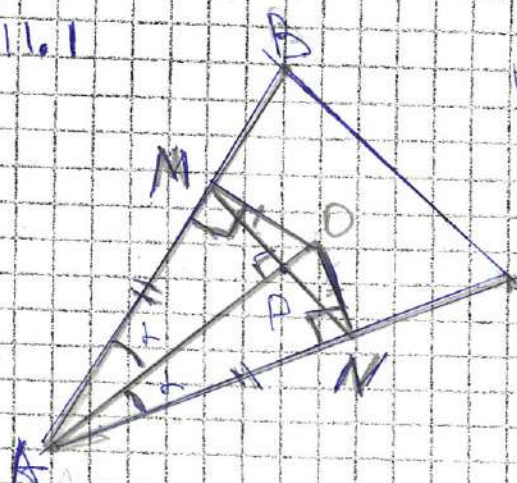
ШИФР

(заполняется организатором соревнований)

Чистовик

Фамилия, имя, отчество не писать! Лист не подклеивать! Все листы вложить в папку «Индивидуальные работы»!

№ 1.1.1



1)  $OM \perp AB, ON \perp AC$ , т.к.  $M, N$  - точки кас-я, а  $O$  - центр впис. окр-ти.  
2) т.к.  $O$  - центр впис. окр-ти  
с то  $AO$  - бис-са  $\angle BAC$ .  
Пусть  $\angle BAO = \angle CAO = \alpha = \frac{\angle BAC}{2}$

3) т.к.  $O$  лежит на бис-се  $AO$ , то  $\angle O$  равноудален от  $AB$  и  $AC$ , т.е. расстояния  $OM$  и  $ON$  равны

3)  $\triangle AMO = \triangle ANO$ :

$$\angle AMO = \angle ANO = 90^\circ$$

$AO$  - общая

$$\angle MAO = \angle NAO = \alpha$$

$\rightarrow \triangle AMO = \triangle ANO$  по гипотенузе и острому углу, тогда  
 $AM = AN$

4)  $AM = AN$ , значит  $\triangle AMN$  - равнобедр, тогда  $AP$ , ( $AO \cap MN = P$ ) не только бис-са в этом треуг-ке, но и высота и медиана, т.е.  $AP \perp MN$ ,  $MP = PN$

5) в прямоугол. треуг-ке  $AMO$   ~~$\sin \alpha = \frac{OM}{AO}$~~   $\cos \alpha = \frac{AM}{AO}$

в прямоугол. треуг-ке  $AMP$   $\sin \alpha = \frac{MP}{AM}$

$$\sin \alpha \cdot \sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{AM}{AO} \cdot \frac{MP}{AM} = \frac{2MP}{AO}$$

т.к.  $AO = 2MN$ , а  $MP = \frac{MN}{2}$ , то

$$\sin 2\alpha \leq \frac{MN \cdot 2}{2 \cdot MN \cdot 2} = \frac{1}{2} \quad \text{т.к. } \angle A \in (0^\circ, 180^\circ), \text{ то}$$

$$\cos 2\alpha = \cos \angle A > 0. \quad \cos 2\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Единственные углы от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ , которые имеют синус  $\frac{1}{2}$

а косинус  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  это  $30^\circ$ .

Ответ:  ~~$30^\circ$~~

Единственные углы от  $0^\circ$  до  $180^\circ$ , которые имеют синус  $\frac{1}{2}$  это  $30^\circ$  и  $150^\circ$

Ответ:  $30^\circ, 150^\circ$

№ 11.2

№ 11.2  $a \in [0, 1]$   $x \in [0, 24]$

$$|\sin \frac{11\pi x}{24}| = a$$

Пусть  $y = \frac{11\pi x}{24}$ ,  $y \in [0, 11\pi]$

Каждому значению  $y$  соотв. единственное значение  $x$  т.е. для каждого корня ур-я  $y = \arcsin a$  или  $y = \pi - \arcsin a$  равно количеству корней ур-я  $\sin y = a$  при условии, что  $x \in [0, 24]$ ,  $y \in [0, 11\pi]$

$$|\sin \frac{11\pi x}{24}| = a \Leftrightarrow$$

$$|\sin y| = a \Leftrightarrow \begin{cases} \sin y = a \\ \sin y = -a \end{cases}$$

$$a = 0: \sin y = 0 \Leftrightarrow y = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$0 \leq \pi n < 11\pi$$

$$0 \leq n < 11 \Rightarrow n = 0, 1, 2, \dots, 10. \text{ Итого } 11 \text{ равн-ств}$$

$$(т.к. n \in \mathbb{Z})$$



Обязательно, точно, аккуратно все писать! Листы не подгибать! Все листы вложить в папку «Информация о конкурсе»!

$$a=1 \quad \begin{cases} \sin y = 1 \\ \sin y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ y = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$0 \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k < 10\pi$$

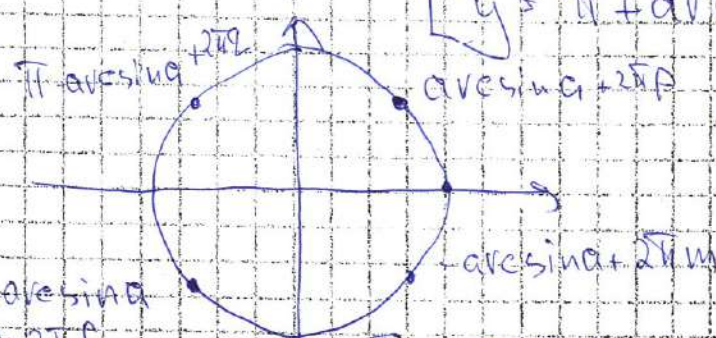
$$-\frac{1}{2} \leq k < 10,5$$



Т.к.  $k \in \mathbb{Z}$ , то  $k = 0, 1, 2, \dots, 10$ . Итого - 11

$a \in (0; 1)$ :

$$\begin{cases} \sin y = a \\ \sin y = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \arcsin a + 2\pi p, p \in \mathbb{Z} \\ y = \pi - \arcsin a + 2\pi q, q \in \mathbb{Z} \\ y = -\arcsin a + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ y = \pi + \arcsin a + 2\pi f, f \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



Т.к.  $y \in [0; 10\pi)$  то  $\arcsin a \in [0; \frac{\pi}{2})$  то

$$\begin{cases} y = \arcsin a + 2\pi p, p \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\ y = \pi - \arcsin a + 2\pi q, q \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \\ y = -\arcsin a + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}, m \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ y = \pi + \arcsin a + 2\pi f, f \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \end{cases}$$

Всего 22 решений. Это можно обнаружить тем, что  $y$  может быть в любой точке первых 5 полных



~~Ответ: При  $a=0$  и  $a=1$  11 решений  
При  $a \in (0; 1)$  22 решения.~~

Оборотов и только в верхней половине  
6 оборотов, т.е.  $6 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 22$ . 2 корня

~~Ответ: сверху мы можем пройти по  
6 раз, а два корня снизу только по  
5 раз~~

Ответ: При  $a=0$  и  $a=1$  : 11 решений  
При  $a \in (0; 1)$  22 решения.

11.3

$$\begin{aligned} \text{а) } (xy)^2 &\leq 2 - xy \\ (xy)^2 + (xy) - 2 &\leq 0 \\ (xy + 2)(xy - 1) &\leq 0 \end{aligned}$$

Пусть  $a = xy$

$$(a+2)(a-1) \leq 0$$



$$\begin{cases} a \geq -2 \\ a \leq 1 \end{cases}$$

Обратная замена:

$$\begin{cases} xy \geq -2 \\ xy \leq 1 \end{cases} \quad \text{При } x=0: \begin{cases} 0 \geq -2 \text{ вер.} \\ 0 \leq 1 \text{ выполняется} \end{cases}$$

значит все точки с  $x=0$  подходят

$$\text{При } y=0: \begin{cases} 0 \geq -2 \text{ вер.} \\ 0 \leq 1 \end{cases} \text{ выполняется}$$

Все точки с  $y=0$  - подходят

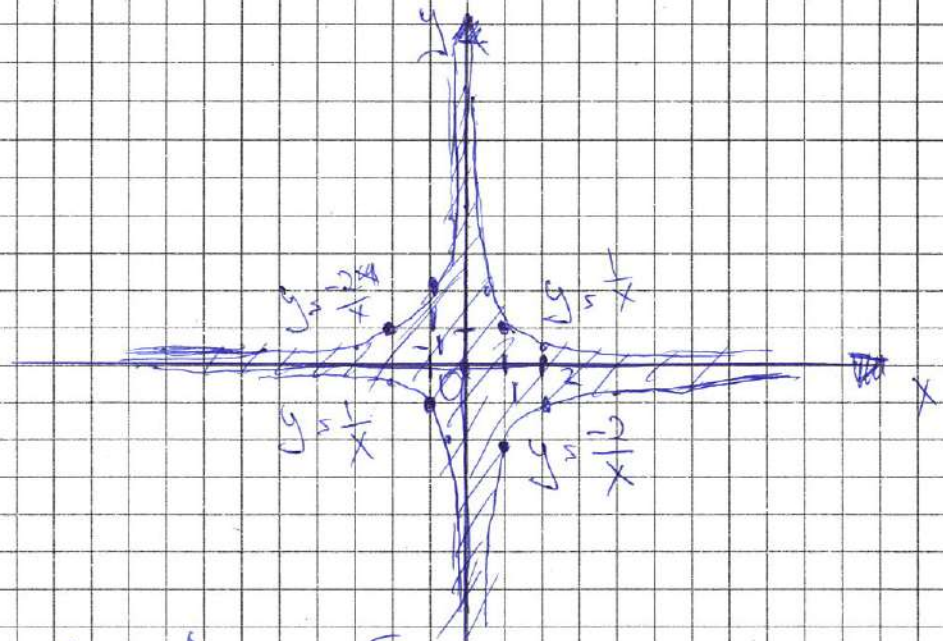


Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ x > 0 \\ y > -\frac{2}{x} \\ y < \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ y < -\frac{2}{x} \\ y > \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$y \neq 0$$



Множество  $A$  изобразено на координатной плоскости.

б) Из любой точки множества  $A$  можно провести отрезок в точку  $(0;0)$ , так как принадлежащую ему-ва  $A$ , причем этот отрезок будет внутри множества  $A$ .  
 Из точки  $(0;0)$  можно провести отрезок в любую точку множества  $A$ .  
 Получается, что между точками  $(x_1; y_1)$  и  $(x_2; y_2)$ , принадлежащими множеству  $A$ , всегда можно провести ломаную с точкой начала в т.  $(0;0)$ , если одна из этих точек не совпадает с  $(0;0)$ .  
 В противном случае ~~линия~~ эти точки можно соединить отрезком.  
 #ЧТО



№ 11.4.  $a, b, c$  - рац.

$$\sqrt{2}a + \sqrt{3}b + \sqrt{6}c - \text{рац.}$$

Тогда  $(\sqrt{2}a + \sqrt{3}b + \sqrt{6}c)^2 =$

$$= 2a^2 + 3b^2 + 6c^2 + 2(\sqrt{6}ab + \sqrt{3}ac + 3\sqrt{2}bc) - \text{рац.}$$

Тогда т.к.  $2a^2 + 3b^2 + 6c^2 - \text{рац.}$ , то

$$\sqrt{6}ab + 2\sqrt{3}ac + 3\sqrt{2}bc - \text{рац.}$$

и это гл.вл.

~~Число  $\sqrt{6}ab + 2\sqrt{3}ac + 3\sqrt{2}bc$  было рац. и, число  $\sqrt{6}ab$  было равно нулю.~~  
~~Число  $x$  разл. разнородных слагаемых~~

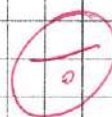
№ 11.5

Пример на 30 гипотен.

1	2	3	1	2	3	4	5
2	2	3	2	2	2	2	6
2	0	2	2	2	2	2	8
1	8	1	2	5		2	4
1	6	1	3	0		3	6
2	0	2	2	2	2	2	8
1	8	1	2	5		2	4
1	6	1	3	0		3	6

Рассмотрим

или пер +



Рассмотрим фигуру размером  $1 \times 6$  клеток

$\boxed{1 \ 2 \ 3 \ 1 \ 2 \ 3}$ . Это наименьшая по площади

фигура которую можно полностью разукрасить

всего 6-кв.  $3 \times 3$  помещается не более

$$\left\lfloor \frac{6 \cdot 3}{6} \right\rfloor = 10 \text{ таких фигур. Значит } 64 - 6 \cdot 10 = 4$$

полезу?

Клетки всегда будут пустыми

Ответ: ~~30~~ 30



Фамилию, имя, отчество не писать! Лист не подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

10.11.4 Продолжение

Число  $x$  называется рациональным, если его можно представить в виде несократимой дроби  $\frac{p}{q}$ , где  $p$  - целое,  $q$  - натуральное.

Число  $x$  не содержащее

$a, b, c$  - рац

$\sqrt{2}a + \sqrt{3}b + \sqrt{6}c = \tau$ , где  $\tau$  - рац

т.к.  $a, b, c$  - рац, то  $\tau$  может равняться только нулю, в противном случае одно из слагаемых должно принимать часть, которая уничтожится с остальными иррациональными членами, т.е. должно содержать из двух слагаемых: рационального и иррационального, что противоречит рациональности числа. Тогда  $\tau = 0$

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6} = 0$$

$$-c = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \frac{b\sqrt{3}}{\sqrt{6}} - \text{рациональное}$$

$$\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{2}} = \tau, \tau - \text{рац}$$

Положим  $\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{p}{q}$ ,  $\frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{r}{s}$ , тогда  $\frac{ps}{qs} + \frac{qr}{qs} = \tau$ ,  $\frac{ps+qr}{qs} = \tau$ ,  $ps+qr = \tau qs$ ,  $\tau qs$  - рац,  $ps+qr$  - рац,  $ps+qr = 0$



~~2~~ ~~5~~ ~~1~~ ~~1~~

~~1~~ ~~1~~