

ШИФР

254

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

## Письменная работа

### Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике в 11 классе  
(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Пonomarev Михаил Евгеньевич

Дата рождения

0	2		0	0		0	0	0	0
---	---	--	---	---	--	---	---	---	---

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
✓	+	✓	—	+
4	20	4	2	20
				50

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

1.1.2

1 стр

1) Пусть  $a=0$

$$\sin \frac{11\pi x}{24} = 0$$

$$\frac{11\pi x}{24} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{11x}{24} = k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{24}{11}k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x \in [0, 24)$$

$$k \in \{0, 1, 2, \dots, 9, 10\}$$

$$k \in \{0, 1, 2, \dots, 9, 10\}$$

$$\text{При } a=0$$

ур-е имеет 11 корней.

2) Пусть  $a=1$

$$|\sin \frac{11\pi x}{24}| = 1$$

$$\begin{cases} \sin \frac{11\pi x}{24} = 1 \\ \sin \frac{11\pi x}{24} = -1 \end{cases}$$

$$\frac{11\pi x}{24} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{11x}{24} = \frac{1}{2} + k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{11x-12}{24} = k, k \in \mathbb{Z}$$

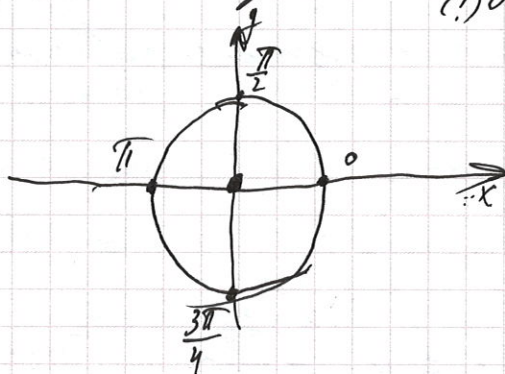
$$x = \frac{12}{11} + \frac{24}{11}k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x \in [0, 24)$$

$$k \in \{0, 1, 2, \dots, 9, 10\}$$

При  $a=1$  ур-е имеет 11 корней.

3) Рассмотрим числовую окружность



Заметим, что т.к. функция имеет 11 решений при  $a=0$  вписанная

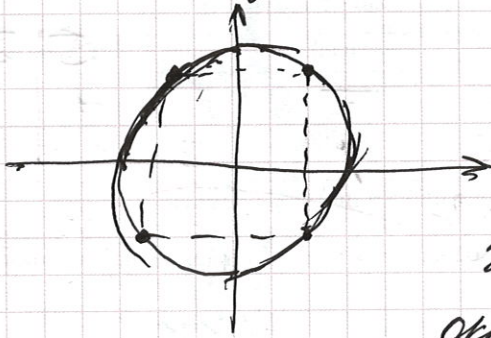
можно сделать  $\frac{11-1}{2} = 5$

Оборотов по числовой окр. (11-1) т.к. дважды посчитали лев. 2 двукратных с нулем на окружности

Также,  $x < 24$ , при  $x=24$   $\sin \frac{11\pi x}{24} = \sin 11\pi$ , а значит мы проходим вершину части окружности еще раз, без точки "π".



Что это дает? Взглянем еще раз на сф. 12 стр



Все экстремальные точки имеют

4 касания по радию: 2 в верхней половине и 2 в нижней.

Значит, раз мы прошли полностью окружность 6 раз и еще один раз -

- половину, при  $0 < a < 1$  кол-во касаний равно  $5 \cdot 4 + 2 = 22$ .

Ответ:  $a=0$  11 касаний  $0 < a < 1$  22 касания,  $a=1$

N 11.4.

а Пусть  $\sqrt{z} = x, \sqrt{3} = y$ , тогда:

$$ax + by + cxy = a_1 x^m + b_1 y^n + c_1, \text{ где } m, n - \text{четные.}$$

Заметим, что из-за произведения  $xy$  и сумм, нежелательно, чтобы разложить в вид  $(x+y)^p$ , но  $x$  и  $y$  - иррациональны, вследствие чего, такая конструкция теряет актуальность. Разность квадратов дает четные степени, но сумма + произведение не поддается данному методу.

(Если взять  $c = a + b$  то  $ax + by + cxy + bxy = ax(1+y) + by(1+x)$  и мы получаем иррациональные иррационалы)

Следовательно, единственный способ получения равенства

$$a = b = c = 0, a_1 = b_1 = c_1 = 0.$$

Ответ: да, нетно.

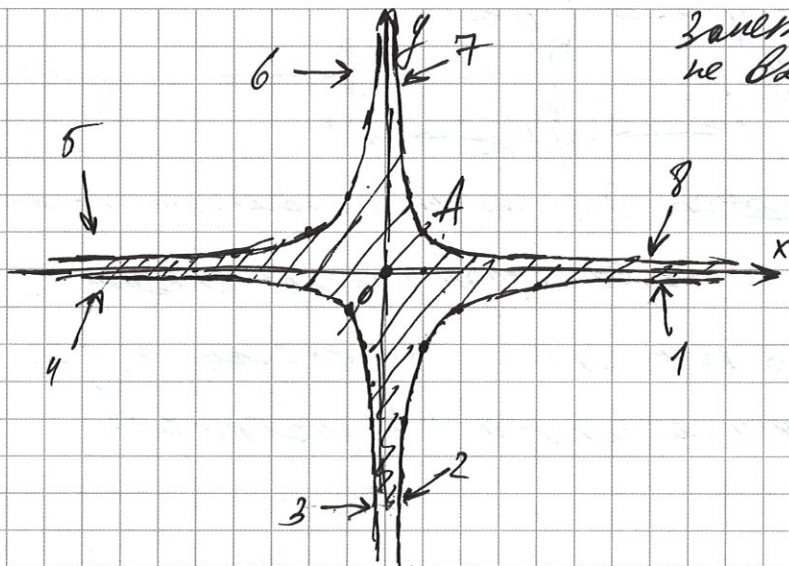
N 11.3

а) Заметим, что это две параболы:  $\frac{1}{x}$  и  $-\frac{2}{x}$  Почему?

из задания неравенствами области



Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!



Заметим, что черточки  
не входят в множество  $A$ .

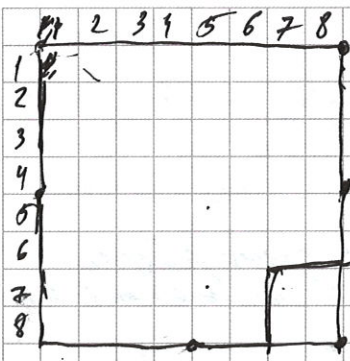
[3 стр]

б) Заметим, что <sup>если от</sup> ~~любой~~ любой точки  $g(0;0)$  можно  
провести отрезок, то любые две точки можно соединить  
(внутри  
множества  $A$ )  
отрезком из двух звеньев. Докажем, почему это так.  
Рассмотрим часть  $M$  (обозначена на рисунке), тогда  
для этой точки функция была меньше, а не больше, а значит,  
(какой-то)  
какая точка на оси ординат по "выше" предположу  
значений, следовательно, от нее можно провести отрезок  
в т.  $(0;0)$  по множеству  $A$ . Аналогично для остальных  
случаев. Значит можно от любой точки  $M$  провести  
отрезок в  $(0;0)$ , который лежит <sup>в</sup> этом множестве  $A$ .  
~~Этот~~ значит любые две точки можно соединить отрезком  
из двух звеньев, ч.т.д.

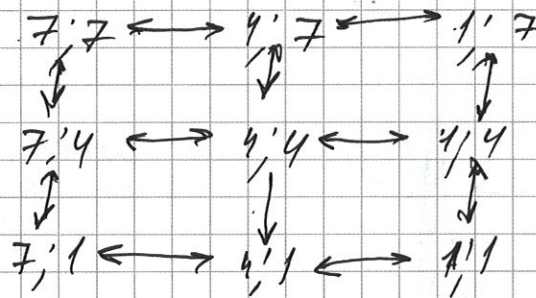
[11,5]

Заметим, что для любого заключения каждая точка обя-  
зана иметь пару. Рассмотрим  $2 \times 2$  условия квадрата

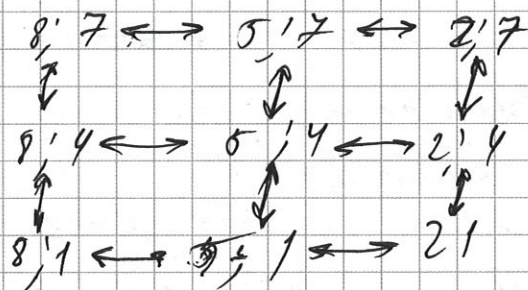
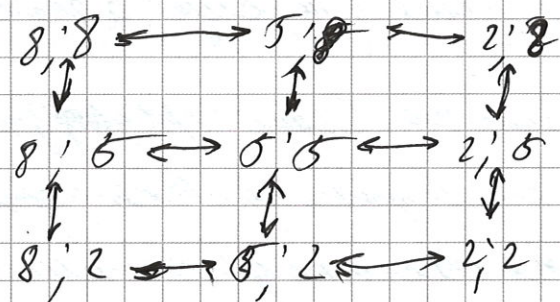
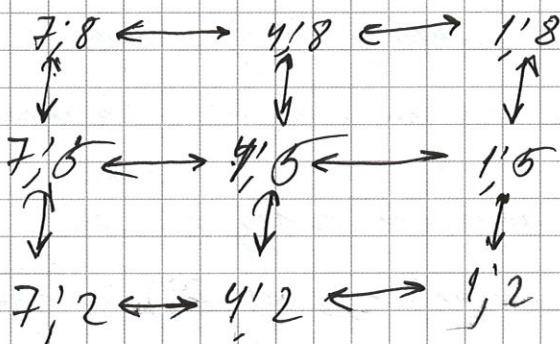




Рассмотрим т. 7,7.



Здесь всего 9 точек, это точки, с которыми могут быть связаны 7,7 и ее соседи и соседи соседей...; проговорю - это компактная связность т. 7,7. Аналогично построим компактную связность для 7,8, 8,7 и 8,8.



В каждом из них некоторая число точек, а значит мы теряем хотя бы одну из них, в сумме 4.

Остаточные компакты - четные (предварительно буду)

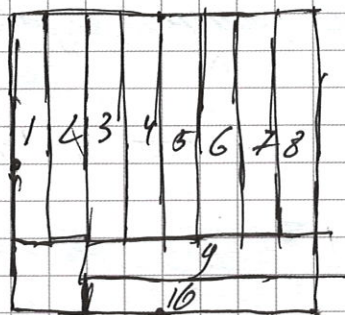
а значит потери только здесь, значит даже кол-во точек  $\frac{64-4}{2} = 30$ .

Для примера заметим, что мы можем набрать 6 в ряд. 1 2 3 1 2 3



Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

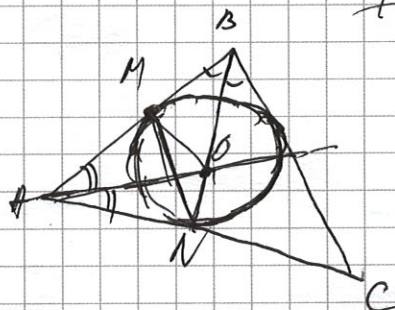
Постройте фигуру, состоящую из 8x8 прямоугольников  
1x6. суммарно 60 клеток, 30 диагоналей



5 стр

Ответ: 30 диагоналей.

[111, 1]



Решение

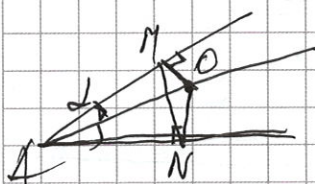
O - пересеч. бисс. - центр внут. окр.

OM и ON - радиусы

OM  $\perp$  AB  $\Leftarrow$  AB - кас.

ON  $\perp$  AC  $\Leftarrow$  AC - кас. (по слр. внут. окр.)

можно свести задачу к фигуре



$$AO = 2MN$$

AO - бис-са  
гла  
 $\angle MAN$

$\triangle AOM$  - прямоугол.

$$AM = AO \cos \frac{\angle}{2} \quad (1)$$

$AM = AN$  (по св-ву высот  
(от центра бис-са))

$\triangle AMN$ :

Теор. косинусов:

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos \angle$$

$$AO = 2\sqrt{2AM^2 - 2AM^2 \cos \angle} \quad (2)$$

$$\begin{cases} AM = AO \cos \frac{\angle}{2} \\ AO = 2\sqrt{2AM^2 - 2AM^2 \cos \angle} \end{cases}$$

$$\frac{AM}{\cos \frac{\angle}{2}} = 2\sqrt{2AM^2 - 2AM^2 \cos \angle}$$



[6 стр]

$$I = 2\pi \cos^2 \sqrt{1 - \cos^2}$$

Возв. 1 квадрат

$$I = 8(1 - \cos^2)(\cos^2 - \sin^2)$$

Получено ур-е с одной переменной, даже решение записывается  
и степеней, что я решаю не смог.

...? - Нет

