

ШИФР

Q32

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике в 11 классе
(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Турчин Владислав Ильич

ШИФР

232

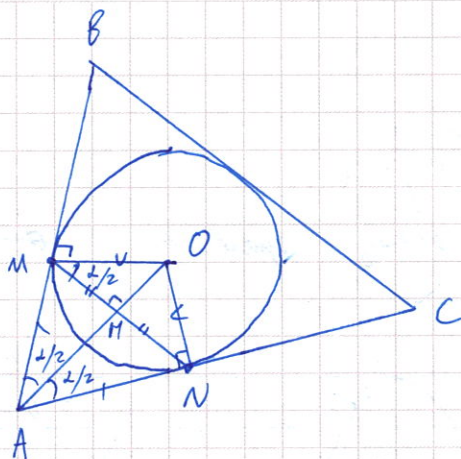
(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
\pm	+	+	-	56
12	20	20	0	2 54

Подписывается проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№1
Дано:
 $\triangle ABC$
окр. OO - впис.
 AM и AN - кас.
 $OA = 2 NM$
 $\angle A = ?$



$\Sigma = 54$

- 1) Т.к. AM и AN - касательные к окр. $OO \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle OMA = \angle ONA = 90^\circ$ (по теор. о радиусе, проведенному к точке касания)
- 2) ~~$\angle A = \alpha$~~ $\triangle AMO = \triangle ANO$ (~~$OM = ON$ (радиусы); $OA = OA$ (общ.);~~
 по двум сторонам и в прям. треугольнике) $\Rightarrow AO$ - бис. $\angle A$
 $\frac{\angle A}{2} = \alpha / 2$.
- 3) $\frac{OM}{AO} = \sin \frac{\alpha}{2}$
- 4) $\triangle AMN$ - р/д (т.к. $AM = AN$) } AO - мед, высота (по св. р/д)
 AO - бис. $\angle A$
- 5) $AO \cap MN = H$
- 6) $\angle MHO = 90^\circ - \angle OMH = \frac{\alpha}{2}$
- 7) $\frac{MH}{OM} = \cos \frac{\alpha}{2}$
- 8) Из полученных шести уравнений:
 $\frac{MH}{OM} = \cos \frac{\alpha}{2}$
 $\frac{OM}{AO} = \sin \frac{\alpha}{2}$
 $\frac{MH}{AO} = \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}$

$$\begin{cases} \frac{OM}{AO} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \frac{MH}{MO} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{cases} \rightarrow OM = AO \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{MH}{AO \sin \frac{\alpha}{2}} = \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$OA = 2 \cdot MH = 4 MH.$$

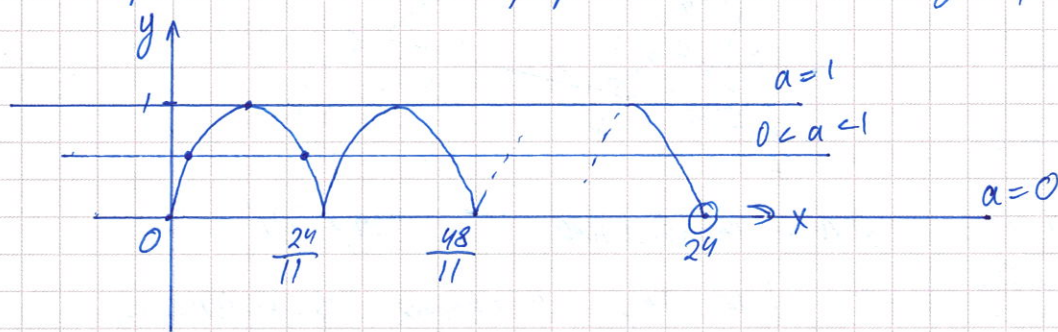
получаем: $\frac{\sin \alpha}{2} = \frac{1}{4} \rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = 30^\circ$.

Ответ: $\alpha = 30^\circ$.

Вот другое решение
($\alpha = 150^\circ$)

№2

построим эскиз графиков $y = \left| \sin \frac{11\pi}{24} x \right|$



Количество корней будет соотв. кол-ву пересечений графика с прямой, параллельной оси Ox . Для этого найдем,

как много раз этот график пересекается с осью Ox :

$$\left| \sin \frac{11\pi}{24} x \right| = 0 \rightarrow \frac{11\pi}{24} x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \rightarrow x = \frac{24k}{11}$$

$$\text{На } 0 \leq x < 24 \Rightarrow 0 \leq \frac{24k}{11} < 24$$

$$0 \leq k < 11. \text{ Т.е. данное уравнение имеет 11 корней}$$

при заданном $x \Rightarrow$ график 11 раз (и еще одна точка начала) пересекается с графиком осью Ox .

при ~~а=0~~ $a=1$ кол-во пересечений будет столько же (11 корней). При $0 < a < 1$ на каждое пересечение

с графиком с $a=1$ приходится два пересечения графика с $0 < a < 1 \Rightarrow$ при данном a будет 22 корня.

Ответ: при $a=0, a=1$ будет 11 корней; при $0 < a < 1$ будет 22 корня.

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№ 11.3.

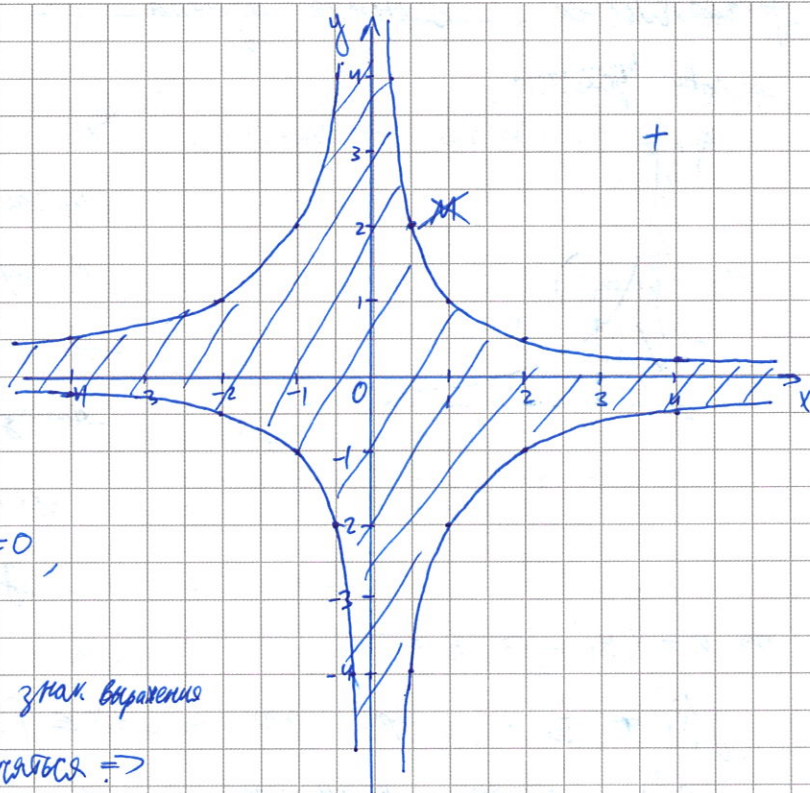
а) $xy^2 < 2 - xy$

$xy = t$

$t^2 + t - 2 < 0$

$(t+2)(t-1) < 0$

$(xy+2)(xy-1) < 0$



Построим графики $xy+2=0$,

$xy = 1$

При переходе через график знак выражения

$(xy+2)(xy-1)$ — будет меняться \Rightarrow

Определив знак хотя бы в

одной области мы можем представить знаки в других областях:

При $x=4, y=4$. $(xy+2)(xy-1) > 0 \Rightarrow$ зона, прилегающая

к графику осей будет иметь меньше 0, т.е. является

множеством А решений, удовлетворяющим начальному условию

ВВ! Сами графики $y = \frac{1}{x}$ и $y = \frac{-2}{x}$ не являются решениями уравнения неравенства, т.к. оно строгое!

б) ~~любую точку, лежащую в множестве А~~

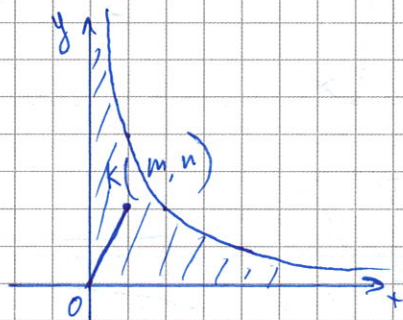
возьмем произвольную точку X , находящуюся в множестве А.

$X(m;n)$ имеет координаты m и n такие, что $(mn+2)(mn-1) < 0$ (иначе точка не принадлежит множеству А).

Эту точку можно соединить с началом координат $(0;0)$

Если мы докажем, что ~~точку X~~ отрезок KO лежит внутри А

№ 11.3 б) (продолжение). То любую внутреннюю точку можно тоже соединить с началом & координат, и ломаная, соединяющая эти две точки, будет ~~достаточным условием~~ ~~факта~~ ~~верности~~ ~~указания~~ ~~б~~ удовлетворять нашей условию.



Но докажем для начала, что когда точка лежит в первой четверти (т.е. m и $n > 0$)

~~(1) K лежит в области~~
~~через~~ Отрезок KO
лежит на прямой

$$g(x) = \frac{n}{m}x, \quad g(x) = kx$$

$$n = km \Rightarrow k = \frac{n}{m}$$

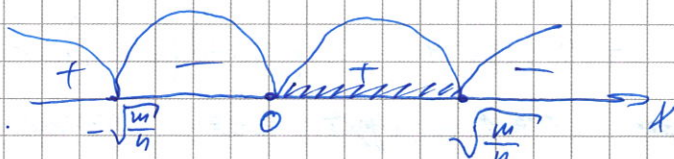
$$g(x) = \frac{n}{m}x, \quad \text{при этом } x \in [0; m]$$

чтобы отрезок полностью лежал в области A,

$$f(x) = \frac{1}{x} > g(x)$$

$$\frac{1}{x} > \frac{n}{m}x$$

$$\frac{m - nx^2}{xm} > 0$$



Т.к. $x \in [0; m] \Rightarrow$ нужно убедиться, что (\cdot) m лежит на промежутке от 0 до $\sqrt{\frac{m}{n}}$ и $\sqrt{\frac{m}{n}}$

$mn < 1$ (условие того, что в данной четверти принадлежит

$$A) \Rightarrow m < \frac{1}{n}$$

$$m^2 \vee \frac{m}{n}$$

$$m \left(m - \frac{1}{n} \right) \vee 0$$

$$\Rightarrow \vee < \Rightarrow m \in \left(0; \sqrt{\frac{m}{n}} \right) \Rightarrow$$

\Rightarrow отрезок ^{указан} лежит в данной области. Аналогично доказывается и для других областей четвертей. ^{через (0;0)}
Получаем, что ломаная, соединяющая любые две точки, лежит внутри A. ч.т.д.

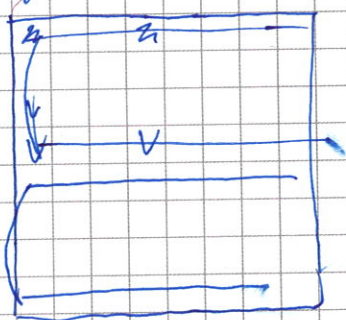
032

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№5 Очевидно, что всего есть 80 дырочек (в каждой строке есть 5 дырочек, а строк 8, ~~аналогично~~ столько же 8 и вертикальных дырочек; итого: $5 \cdot 8 \cdot 2 = 80$). Однако на каждой дырочке должен быть свой цвет \Rightarrow каждая клетка одновременно является частью лишь одного дырочка. У нас из этих соображений мы получаем, что макс. кол-во дырочек равно $\frac{8 \cdot 8}{2} = 32$, т.к. каждый цвет для может повторяться только два раза. Однако и данного числа не можно получить, т.к. при любом раскраске всегда остается не достигаю * и клеток, которые никак нельзя связать между собой. Т.е. остаток можно закрасить 30 дырочек.

* Может можно доказать из тех соображений, что для поля 4×4 это условие всегда будет выполняться, т.е. и центральные клетки никак нельзя связать.

А когда мы раскрашиваем поле 8×8 мы всегда должны начинать с краёв. Продолжая эту же



Напротив этих двух закрашенных остается еще закрашиваем 16 другим цветом. Так можно закрасить два ряда, но расстояние между соседними - нельзя. А они всегда будут. В каждом ряду

будет оставаться по две незакрашенные кисти этого
-2 деля от максимального кол-ва.

III ч.

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6} = \frac{m}{n}$$



$$\underbrace{2a^2}_{\text{чет}} + \underbrace{3b^2}_{\text{чет/неч}} + \underbrace{6c^2}_{\text{чет}} + \underbrace{2(\sqrt{6}ab + \sqrt{3}ac + \sqrt{2}bc)}_{\text{неч}} = \frac{m^2}{n^2}$$

Попробуем доказать, что если одна одна (например) $a=0$,

$$b\sqrt{3} + c\sqrt{6} = 0$$

$$3b^2 = 6c^2$$

$$6c^2 - \text{чет} \Rightarrow 3b^2 - \text{неч}$$

$b^2 = 2c^2$ - невозможно, т.к. $\sqrt{2}$ - иррациональное число

аналогично $\Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{2}}{1}$, - не существует где b и $c \neq 0$,

- не $b, c \in \mathbb{R}$, т.к. $\sqrt{2}$ нельзя представить в виде $\frac{m}{n}$ обыкновенной дроби.

Аналогично для b и a , a и $c \Rightarrow$

неч только при a, b и $c = 0$ в выражение будет рациональным.

~~Аналогично и сумма~~

Частный случай.