

ШИФР

242-1

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике в 11 классе
(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Кочанова Анна Евгеньевна

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+	+1/2	+	-	-
20	10	20	2	0
				52

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№ 11.1.

Дано:

$\triangle ABC$

O - центр вписанной окружности

M, N - точки пересечения окружности с AB и AC

$$AO = 2 \cdot MN$$

Найти:

$\angle A$ - ?

Решение:

Пусть $\angle A = \alpha$, $MN = x$, тогда $AO = 2x$ $0 < \alpha < 180$

1. AB и AC - касательные к окружности (по определению вписанной окружности)

Свойства касательных:

$$OM \perp AM, ON \perp AN, \angle MAO = \angle OAN = \frac{\alpha}{2}, AM = AN$$

2. $\triangle AMN$. Теорема косинусов.

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2 \cdot AM \cdot AN \cdot \cos \angle A$$

$$x^2 = 2 \cdot AM^2 - 2 \cdot AM^2 \cdot \cos \alpha$$

$$x^2 = 2AM^2(1 - \cos \alpha)$$

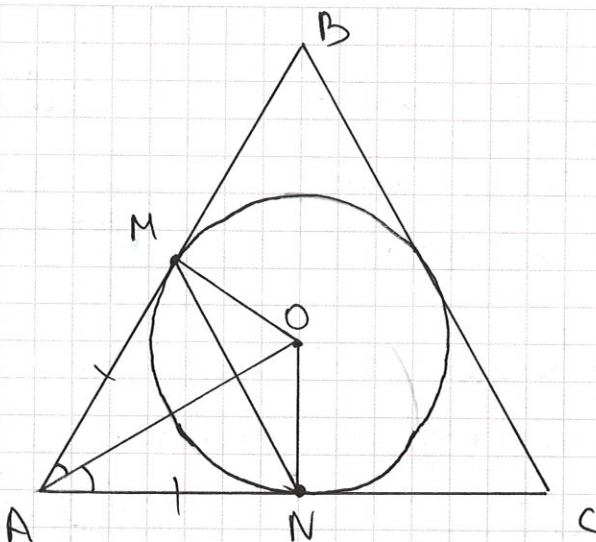
3. $\triangle AOM$ - прямоугольный

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{AM}{AO}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{AM}{2x}$$

$$AM = 2x \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

4. ~~С~~ Подставим формулу из п.3 в п.2



продолжение №11.1.

$$x^2 = 2 \cdot 4 \cdot x^2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} (1 - \cos \alpha) \quad (:8x^2)$$

$$\frac{1}{8} = \cos^2 \frac{\alpha}{2} (1 - \cos \alpha)$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \quad (\text{выбегает из формулы: } \cos 2\beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta)$$

$$\frac{1}{8} = \frac{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}{2}$$

$$\frac{1}{4} = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 < \alpha < 180 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 30^\circ \\ \alpha = 150^\circ \end{cases}$$

$$\begin{cases} \angle A = 30^\circ \\ \angle A = 150^\circ \end{cases}$$

Ответ: 30° или 150° .

№11.2.

$$a \in [0, 1]$$

$$\left| \sin\left(\frac{11\pi}{24}x\right) \right| = a$$

$$0 \leq \left| \sin\left(\frac{11\pi}{24}x\right) \right| \leq 1$$

$$-1 \leq \sin\left(\frac{11\pi}{24}x\right) \leq 1 \quad - \text{верно при } x \in \mathbb{R}$$

при $a=0$

$$\sin\left(\frac{11\pi}{24}x\right) = 0$$

$$\frac{11\pi}{24}x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{24}{11}k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{c} k=0 \\ \{ \\ 0 \end{array} \quad \xrightarrow{\quad} \quad \begin{array}{c} k=11 \\ \emptyset \\ 24 \end{array} \rightarrow x$$

то есть при $a=0$ 11 корней

при $a=1$

$$\sin\left(\frac{11\pi}{24}x\right) = \pm 1$$

$$\frac{11\pi}{24}x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{12}{11} + \frac{24}{11}k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{12}{11}(1+2k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

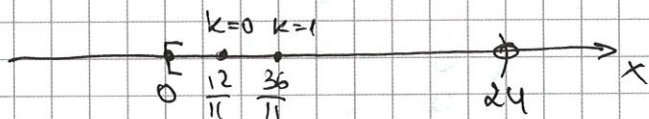
то есть при

$$\begin{cases} 0 \leq k < 11 \\ x = \frac{24}{11}k \end{cases} \quad (+)$$

$$0 \leq x < 24$$

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

продолжение 11.2



$$0 \leq \frac{12}{11}(1+2k) < 24 \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$0 \leq (1+2k) < 22 \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$-1 \leq 2k < 21 \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$-0,5 \leq k < 10,5 \quad k \in \mathbb{Z}$$

то есть $0 \leq k \leq 10$ получаем 11 ^{корней} ~~решений~~

При $0 < a < 1$

$$\sin \frac{11\pi}{24}x = \pm a$$

$$\begin{cases} \frac{11\pi}{24}x = \pm \arcsin a + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \\ \frac{11\pi}{24}x = \pi \pm \arcsin a + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$0 \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2} \text{ при } a \in [0; 1]$$

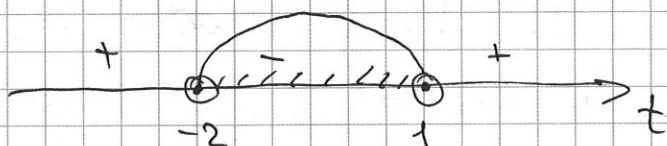
Крайние точки мы рассмотрим, и там, и там ^{корней} ~~решений~~, значит внутри промежутка $a \in (0; 1)$ ~~везде~~ тоже будет 11 ~~решений~~ ^{корней}.

Ответ: 11 корней

11.3.

$$\begin{aligned} x^2 y^2 &< 2 - xy \\ t^2 + t - 2 &< 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xy &= t \\ (t+2)(t-1) &< 0 \end{aligned}$$



$$-2 < t < 1$$

$$-2 < xy < 1$$

продолжение № 11.3.

при $x=0$ неравенство выполняется

при $x \neq 0$:

1. $x > 0$

/// - на графике

$$-\frac{2}{x} < y < \frac{1}{x}$$

$$\begin{cases} y < \frac{1}{x} \\ y > -\frac{2}{x} \\ x > 0 \end{cases}$$

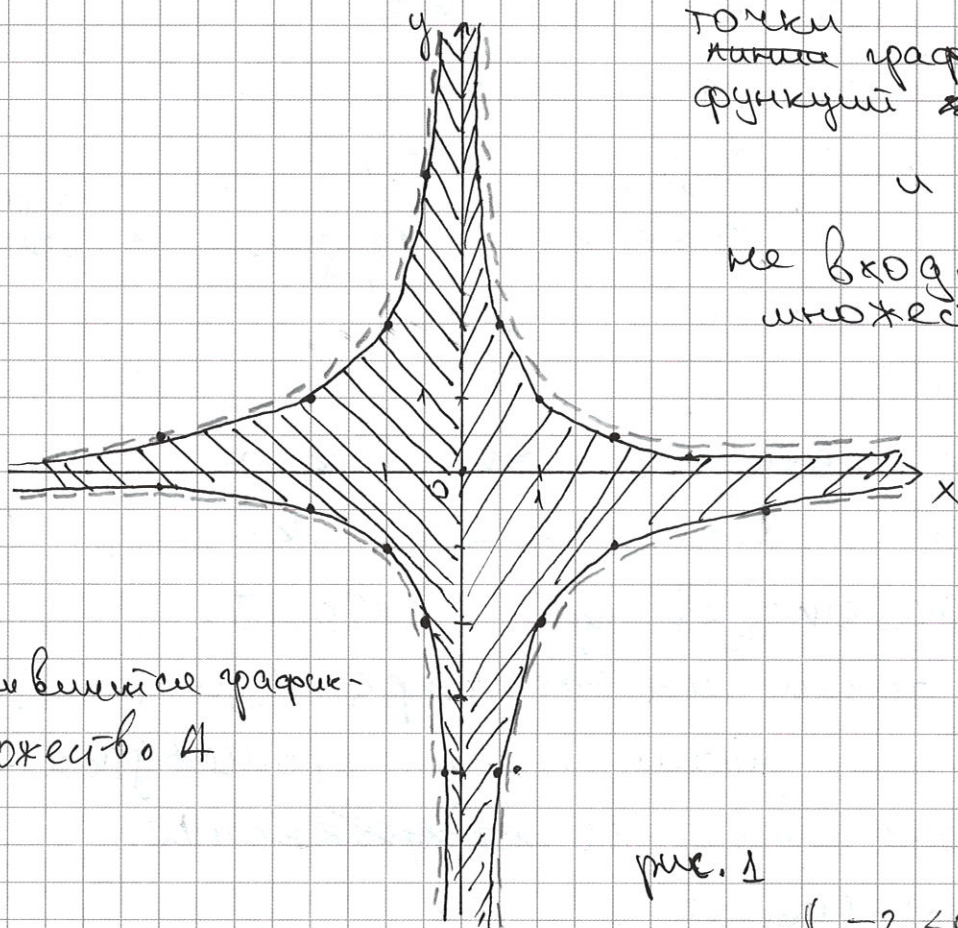
2. $x < 0$

/// на графике

$$\frac{1}{x} < y < -\frac{2}{x}$$

$$\begin{cases} y < -\frac{2}{x} \\ y > \frac{1}{x} \\ x < 0 \end{cases}$$

(a)



точки
линии графиков
функций $y = \frac{1}{x}$

и $y = -\frac{2}{x}$

не входят в
множество A!!

получившиеся график-
множество A

рис. 1

$$(-2 \leq 0 < 1)$$

(б) Точка $B(0,0)$ принадлежит множеству A
Из любой точки множества A можно
«прийти» в точку B по прямой (то есть
существуют отрезки от B до любой точки
множества A). Значит любые две точки мно-
жества A можно соединить либо отрезком, либо

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№ продолжение №11.3.
ломаной из двух звеньев (от точки до В,
и от В до другой точки).

Ответ: а) рисунок 1; б) что и требовалось доказать

№11.4.

$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6}$ — рациональное число k

~~где a, b, c — рациональные числа~~ $c = c_1 + c_2$

~~тогда~~ $a\sqrt{2} + c_1\sqrt{6} + b\sqrt{3} + c_2\sqrt{6} = k$

$$\sqrt{2}(a + \sqrt{3}c_1) + \sqrt{3}(b + c_2\sqrt{2}) = k$$

рациональное

рациональное

Пусть m, n — рациональные числа ~~и:~~

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} m + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} n = k$$

$$\sqrt{2}m = a + \sqrt{3}c_1 \quad \sqrt{3}n = b + c_2\sqrt{2}$$

$$m = \frac{a + \sqrt{3}c_1}{\sqrt{2}}$$

$$n = \frac{b + \sqrt{2}c_2}{\sqrt{3}}$$

m, n — рациональные, a, b, c_2 — рациональные

$$m = \frac{a\sqrt{2} + \sqrt{6}c_1}{\sqrt{2}}$$

$$n = \frac{\sqrt{3}b + \sqrt{6}c_2}{\sqrt{3}}$$

$$2m = a\sqrt{2} + \sqrt{6}c_1$$

$$3n = \sqrt{3}b + \sqrt{6}c_2$$

m, n могут быть рациональными только если

$$a = b = c_1 = c_2 = 0, \text{ то есть } a = b = c = 0$$

Ответ: можно.

№11.5.

В одной строке максимальное количество
дуг — 3

продолжение 11.5.

3	А	Б	В	А	Б	В		
3	Г	Д	Е	Г	Д	Е		
3	Ж	З	И	Ж	З	И		
							М	
							Н	КП
		О			О		М	
		Ф			Ф		Н	КП

2 2

3	А	Б	В	А	Б	В		
							М	
	О	И	Ф				Н	
							К	П
	Л	Г	З	С				
	О		Ф		У		Н	У
		Ц			Ц		К	П
	Л	Г	З	С				

А	Б	В	А	Б	В		
				М			М
О	И	Ф				Н	У
Л	Г	З	С				
О	И	Ф				Н	У
Ц	К	П	Ц	К	П		

1 случай.
* Разные цвета -
- буквы русского
алфавита*

/// - не закрашенная
клетка

$$9 + 4 + 2 = 15$$

2 случай.

А, Б, В, М, О, П, К, Л, Г, З, С,
И, Ф, Ц, У, Н

16 дуплетов

ошибка. 15

3 случай
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13
А Б В М О И Ф Н У Л Г З С

14 15 16
Ц К П

16

Ответ: 16

Л Г З С