

ШИФР

027

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике в 11 классе
(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Рябов Иван Андреевич

1	0	0	0	0	0	0	0	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---

ШИФР

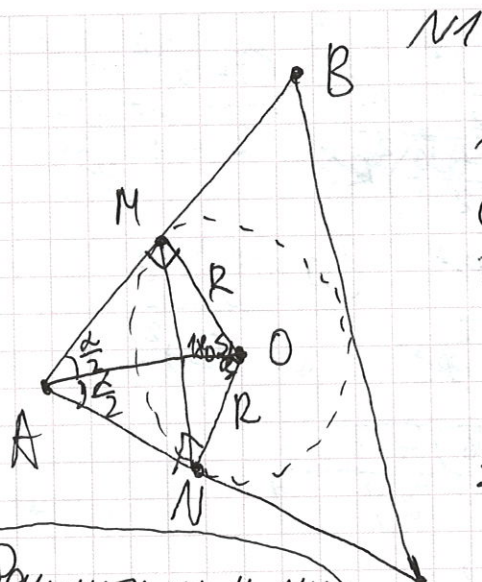
227

(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+	+	1/2	-	-
20	20	10	2	52

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!



Рассмотрим ч-ник $AMON$. Проведем радиусы OM и ON , получаем, что $OM \perp AB$, $ON \perp AC$ (радиус \perp касательной)
 $\angle AMO = \angle ONA = 90^\circ$
 $\angle AMO + \angle ONA = 180^\circ$
 ч-ник $AMON$ - вписанный.
 $\angle MON = 180 - \angle A = 180 - \alpha$

$$\begin{aligned} 5) \quad & \begin{cases} y^2 - R^2 = \sqrt{2} R y \\ y^2 - R^2 = -\sqrt{2} R y \end{cases} \\ & \begin{cases} y^2 - \sqrt{2} R y - R^2 = 0 \\ y^2 + \sqrt{2} R y - R^2 = 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} y = \frac{\sqrt{2} R \pm \sqrt{2 R^2 + 4 R^2}}{2} \\ y = \frac{-\sqrt{2} R \pm \sqrt{2 R^2 + 4 R^2}}{2} \end{cases} \\ & \begin{cases} 2y = \sqrt{2} R \pm \sqrt{6} R \\ 2y = -\sqrt{2} R \pm \sqrt{6} R \end{cases} \end{aligned}$$

Решение.

1) Обозначим $\angle A = \alpha$, радиус вписанной окружности равен R , $MN = y$, $AO = 2y$

2) Т.к. O - центр впис. окр по условию задачи, то AO - бис-са $\triangle ABC \Rightarrow \angle MAO = \angle OAN = \frac{\alpha}{2}$ (по св-ву бис-сы)

3) Т.к. косинус $\triangle MON$:

$$\begin{aligned} MO^2 + ON^2 - 2 \cdot MO \cdot ON \cdot \cos \angle MON &= MN^2 \\ R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cdot \cos(180 - \alpha) &= y^2 \\ 2R^2 + 2R^2 \cos \alpha &= y^2 \quad (1) \end{aligned}$$

4) Из $\triangle AMO$ - прямоугольного ($AM \perp MO$):

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} &= \frac{MO}{AO} = \frac{R}{2y} \\ \cos \alpha &= 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - 2 \cdot \frac{R^2}{4y^2} = \\ &= 1 - \frac{R^2}{2y^2} \quad (2) \end{aligned}$$

Подставим (2) в (1):

$$\begin{aligned} 2R^2 + 2R^2 \left(1 - \frac{R^2}{2y^2}\right) &= y^2 \\ 2R^2 + \frac{2R^2(2y^2 - R^2)}{2y^2} &= y^2 \\ 2R^2 y^2 + 2R^2 y^2 - R^4 &= y^4 \\ y^4 - 4R^2 y^2 + R^4 &= 0 \\ (y^2 - R^2)^2 &= 2R^2 y^2 \end{aligned}$$

Итак. 1.

$$6) \begin{cases} AO = (\sqrt{2} + \sqrt{6})R \\ AO = (\sqrt{2} - \sqrt{6})R < 0 - \text{не имеет смысла} \\ AO = (\sqrt{6} - \sqrt{2})R \\ AO = (-\sqrt{2} - \sqrt{6})R < 0 - \text{не имеет смысла.} \end{cases}$$

1) $y = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6})R}{2}$

$$\cos \angle = \frac{2y^2 - R^2}{2y^2} = \frac{2 \cdot \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 R^2}{4} - R^2}{2 \cdot \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 R^2}{4}} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 - 2}{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2}$$

2) $y = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})R}{2}$

$$\cos \angle = \frac{2 \cdot \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 R^2}{4} - R^2}{2 \cdot \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 R^2}{4}} = \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 - 2}{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}$$

проверяем:

$$\angle A = \arccos \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 - 2}{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2}$$

$$\angle A = \arccos \frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 - 2}{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}$$

(1) $\frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2 - 2}{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2} = \frac{6 + 4\sqrt{3}}{8 + 4\sqrt{3}} \leftarrow \text{покажем, что это действительно равно } \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{6 + 4\sqrt{3}}{8 + 4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$12 + 8\sqrt{3} = 8\sqrt{3} + 12$$

$$0 = 0$$

Тогда в 1 случае $\angle A = 30^\circ$

(2) $\frac{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 - 2}{(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2} = \frac{6 - 4\sqrt{3}}{8 - 4\sqrt{3}} \leftarrow \text{покажем, что это действительно равно } -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{6 - 4\sqrt{3}}{8 - 4\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$12 - 8\sqrt{3} = -8\sqrt{3} + 12$$

$$0 = 0$$

Тогда во 2 случае $\angle A = 150^\circ$

Ответ: $\angle A = 30^\circ$; $\angle A = 150^\circ$

Мат. 2.

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

N2

$$|\sin \frac{11\pi}{24}x| = a$$

Построим график функции $|\sin \frac{11\pi}{24}x|$ в системе координат xOa на промежутке $[0; 24]$

График будет выглядеть примерно так

Посмотрим в каких точках наша функция принимает значения 0.

$$\sin \frac{11\pi}{24}x = 0$$

$$\frac{11\pi x}{24} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{24k}{11}, k \in \mathbb{Z}$$

Посмотрим при каких k x принимает значения от 0 включительно до 24 включительно

$$\begin{cases} \frac{24k}{11} \geq 0 \\ \frac{24k}{11} < 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \geq 0 \\ k < 11 \end{cases}$$

Тогда $k \geq 0$
 $k < 11$

Рассмотрим все значения параметра a в $[0; 1]$.

$a=0$: 11 решений, эти решения будут располагаться на оси абсцисс. Т.к. мы имеем $0 \leq k < 11$ 11 штук, то решений всего 11.

$a=1$: 11 решений, ~~каждое~~ каждое из них расположится в диапазоне $[k; k+1]$ в диапазоне $[k; k+1]$. Т.к. мы имеем k 11 штук, то и таких решений 11.

$0 < a < 1$: $11 \cdot 2 = 22$ решения, т.к. на каждом промежутке от $[k; k+1]$ будет 2 решения.

Ответ: если $a=0$, то 11 решений
если $a=1$
если $0 < a < 1$, то 22 решения

Лит. 4

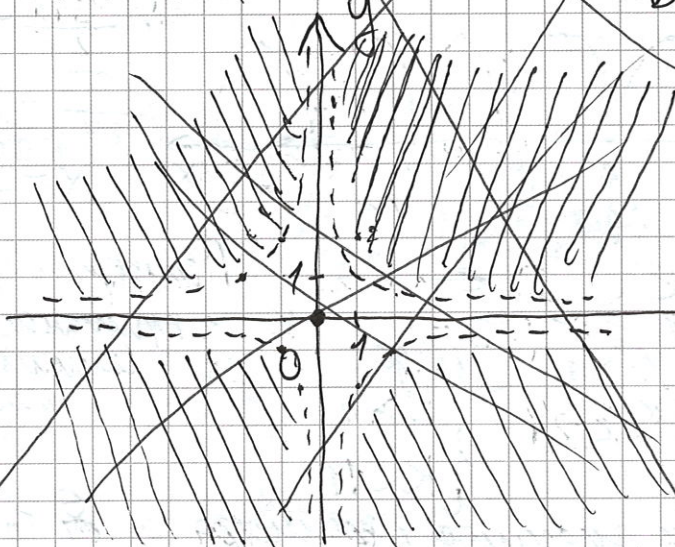
N3

a) $x^2 y^2 < 2 - xy$
 $x^2 y^2 + xy - 2 < 0$
 $(xy - 1)(xy + 2) < 0$

$\begin{cases} xy > 1 \\ xy < -2 \end{cases}$
 $\begin{cases} xy < 1 \\ xy > -2 \end{cases}$

$\begin{cases} y > \frac{1}{x} \\ y < -\frac{2}{x} \end{cases} (1)$
 $\begin{cases} y < \frac{1}{x} \\ y > -\frac{2}{x} \end{cases} (2)$

изобразим данную систему на графике



В Точке (0;0) тоже выполняется неравенство:

$0 < 2 - 0 \leftarrow$ верно.

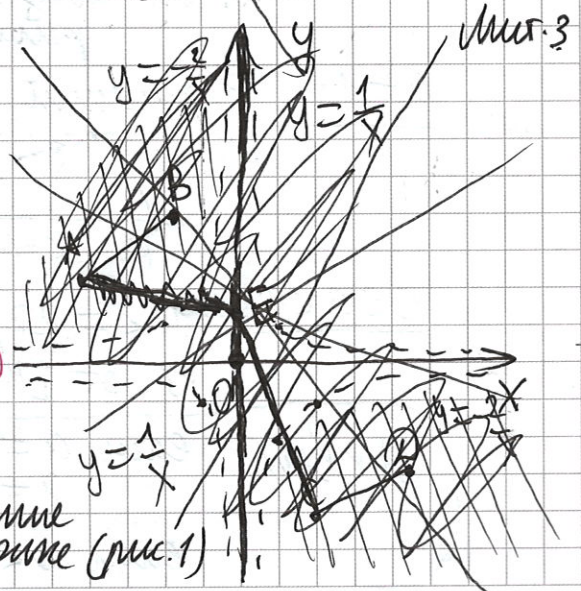
Поэтому эта точка тоже принадлежит множеству.

N3

a) $x^2 y^2 < 2 - xy$
 $x^2 y^2 + xy - 2 < 0$
 $(xy - 1)(xy + 2) < 0$

$\begin{cases} xy > 1 \\ xy < -2 \end{cases}$
 $\begin{cases} xy < 1 \\ xy > -2 \end{cases}$
 $\begin{cases} y > \frac{1}{x} \\ y < -\frac{2}{x} \end{cases}$
 $\begin{cases} y < \frac{1}{x} \\ y > -\frac{2}{x} \end{cases}$

Изобразим решение м.б. 6. → на графике (рис. 1)



Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

30

Продолжение №3

б) Валентин, что точки $(0, 0)$ тоже принадлежат прямой, тогда или принадлежат вся ось ординат.

Любые две точки мы можем соединить отрезком.

множества (отрезок AB)

Еще, например, они соответствуют точкам A и B или C и D .

Если мы прямо соединим точки A и C , то мы соединим точку A с любой точкой на оси ординат ^{как?} и затем соединим с точкой C . Получим как раз ломаную из двух звеньев.

А если другие рассуждения

№4

$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6}$ — рациональное? при $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$

Заметим, что при $a=0, b=0, c=0$ число действительно равно 0 и является рациональным. Если мы докажем, что число $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6}$ будет рациональным только, если $a=b=c=0$, то можно утверждать, что $a=b=c=0$.

Предположим, $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6} = k$, где k — рациональное число.

Пусть $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6} \neq k$, где k — рациональное число. Тогда $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = k - c\sqrt{6}$. Возведем обе части в квадрат.

$$2a^2 + 3b^2 + 2ab\sqrt{6} = k^2 + 6c^2 - 2kc\sqrt{6}$$

$$2a^2 + 3b^2 - 6c^2 + k^2 = 2(ab - kc)\sqrt{6}$$

Слева у нас рациональное число, а справа число будет рациональным только если $(ab - kc) = 0$, тогда $k = \frac{ab}{c}$.

$$2a^2 + 3b^2 - 6c^2 - \frac{a^2b^2}{c^2} = 0$$

$$2a^2 + 3b^2 - 6c^2 = k^2$$

$$2ac^2 + 3bc^2 - 6c^3 - a^2b^2 = 0$$

Лит. 5

Продолжите №4

Т.к. числа a, b, c - рациональные, то их можно представить в виде несократимых дробей.

$$a = \frac{m_1}{n_1}, b = \frac{m_2}{n_2}, c = \frac{m_3}{n_3}; \text{ где } \begin{matrix} m_1, n_1 \\ m_2, n_2 \\ m_3, n_3 \end{matrix} \in \mathbb{Z}.$$

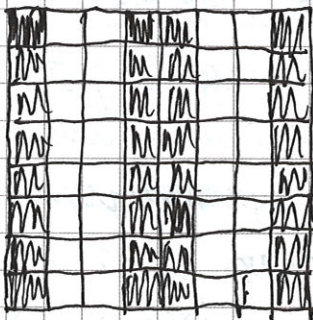
Тогда:
$$\frac{m_1}{n_1} \sqrt{2} + \frac{m_2}{n_2} \sqrt{3} + \frac{m_3}{n_3} \sqrt{6} = \frac{m_1 n_2 n_3 \sqrt{2} + m_2 n_1 n_3 \sqrt{3} + m_3 n_1 n_2 \sqrt{6}}{n_1 n_2 n_3}$$

Числа $m_1 n_2 n_3$; $m_2 n_1 n_3$ - целые, следовательно число $m_3 n_1 n_2$; $n_1 n_2 n_3$

$\frac{m_1 n_2 n_3 \sqrt{2} + m_2 n_1 n_3 \sqrt{3} + m_3 n_1 n_2 \sqrt{6}}{n_1 n_2 n_3}$ никак не может быть рациональным, зная $a=b=c=0$ обязательно.

Ответ: можно

№5



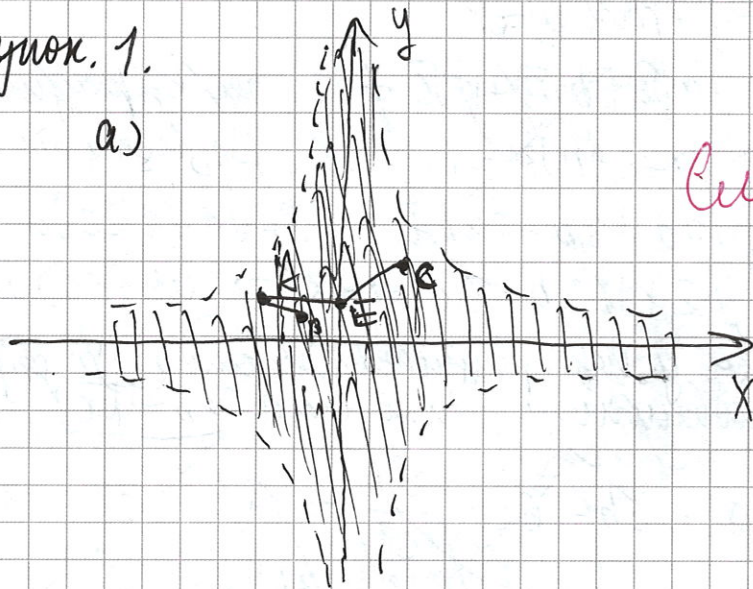
Оценка: заметим, что в каждой строке может быть ≤ 2 дырок. Тогда \forall строке $\leq 2 \cdot 8 = 16$ дырок.

Пример на 16 дырок.

Ответ: 16 дырок.

№3 рисунок 1. продолжите.

а)



Вид 1

Мир. 6.