



ШИФР

а.Сим. 20

(заполняется представителем Оргкомитета)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике Дата проведения 21.01.24
(наименование общеобразовательного предмета)Фамилия И.О. участника Ушакова Полина Андреевна

Серия и номер паспорта _____

Дата рождения _____ Класс 11Школа № Лицей-предуниверситет СВГУ район Гагаринский город Севастополь

Особые отметки (Заполняется представителем оргкомитета)
о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады обязан:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады запрещается:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполняющуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий.

Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись (другие записи на папке делать запрещено).

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы.

Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен _____

_____ (подпись участника олимпиады)

Jul. 1

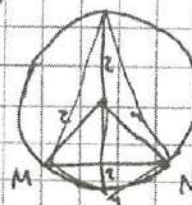
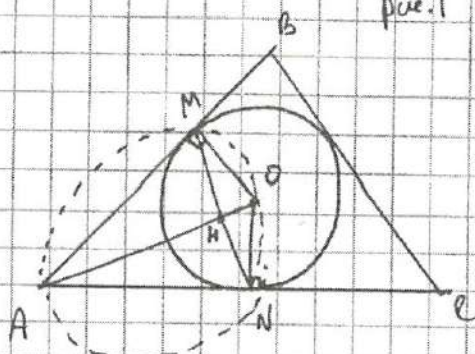
рис. 1

① GMD:

$$AD = 2 \text{ MN}$$

Найти: $\angle A$

рис. 2



- ($HN = \frac{MN}{2}$, т.к. АО-диаметр дуги
лежаю верду попарно)

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

$$OM^2 - 4 \cdot OM + x^2 = 0$$

$$OM = x(2 \pm \sqrt{3})$$

5. В $\triangle AON$, $AO = 4x$, $ON = x$, $OM = x(2 \pm \sqrt{3})$, тогда

$$ON = x \sqrt{1 + (2 \pm \sqrt{3})^2} = x \sqrt{8 \pm 4\sqrt{3}} = 2x \sqrt{2 \pm \sqrt{3}}$$

$$\sin \frac{A}{2} = \frac{ON}{AO} = \frac{\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1 = 1 - \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2} = \frac{2 - 2 \pm \sqrt{3}}{2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A = 30^\circ \text{ или } 150^\circ$$

Оба случая возможны

III.3

$$x^2 y^2 \leq 2 - xy$$

$$x^2 y^2 + xy + \frac{1}{4} \leq \frac{9}{4}$$

$$(xy + \frac{1}{2}) \leq \frac{3}{2}$$

$$-\frac{3}{2} \leq xy + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}$$

$$-2 \leq xy \leq 1$$

1. $xy < 1$

при $x=0$ все хорошо

при $x > 0$ $y < \frac{1}{x}$

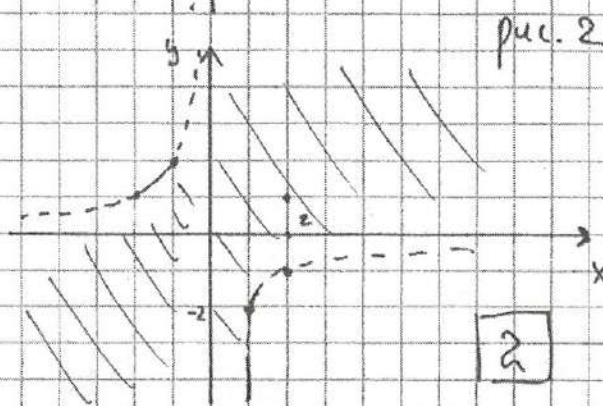
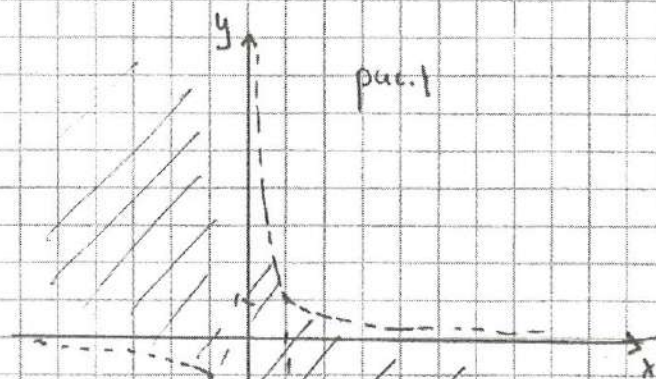
при $x < 0$ $y > \frac{1}{x}$ (рис. 1)

2. $xy > -2$

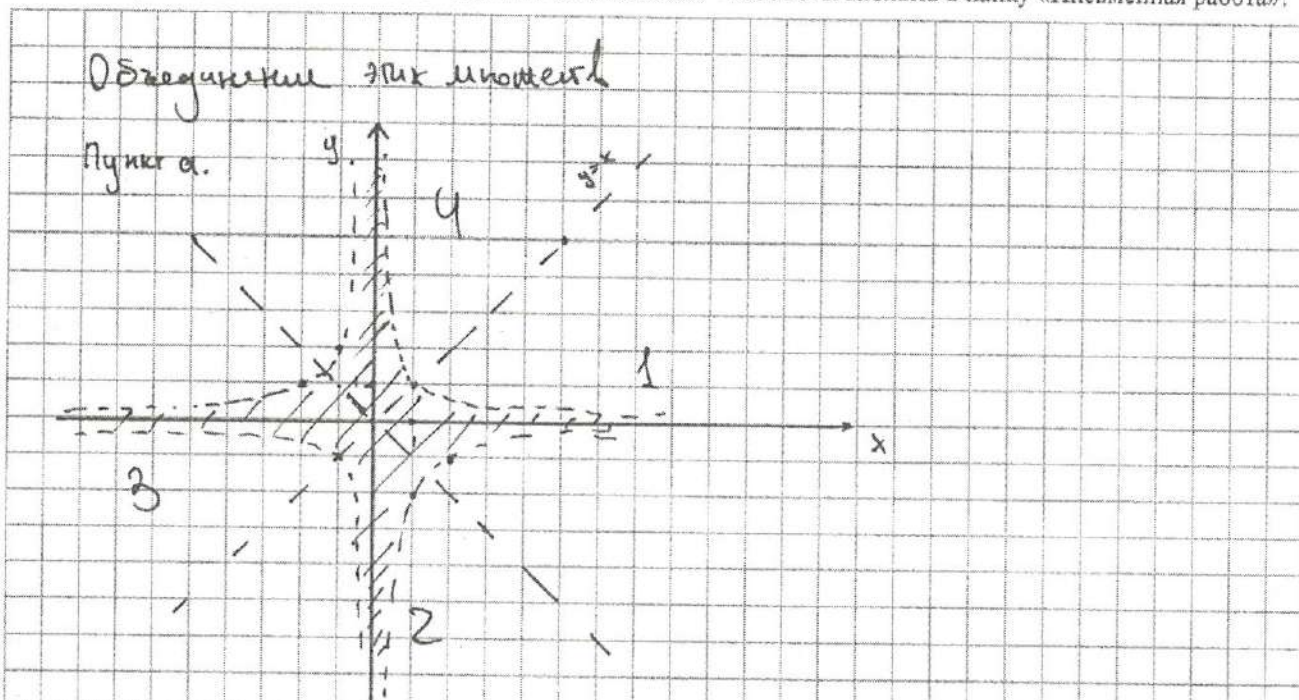
при $x=0$ - все хорошо

при $x > 0$ $y > -\frac{2}{x}$

при $x < 0$ $y < -\frac{2}{x}$
(рис. 2)



Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!



б) График симметричен относительно осей $y=x$ и $y=-x$. Если две точки лежат в одной части множества (всего этих частей 4), то их всегда можно соединить ломаной, узлом которой лежит на оси x или оси y . Если две точки лежат в соседних частях множества, то их можно соединить ломаной, узлом которой это точка $(0;0)$. Если же две точки лежат в противоположных частях графика, то любые две точки можно соединить ломаной, проходящей через точку $(0;0)$, потому что функции $\frac{1}{x}$ и $-\frac{2}{x}$ равны на бесконечности.

или ч.

Пусть $a = \frac{p_1}{q_1}$, $b = \frac{p_2}{q_2}$, $c = \frac{p_3}{q_3}$, $p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{Z}$

$$\sqrt{2} \frac{p_1}{q_1} + \sqrt{3} \frac{p_2}{q_2} + \sqrt{6} \frac{p_3}{q_3} = \frac{p_1 q_2 q_3 \sqrt{2} + p_2 q_1 q_3 \sqrt{3} + p_3 q_1 q_2 \sqrt{6}}{q_1 q_2 q_3}$$

3

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

Чтобы эта дробь была рациональной, надо чтобы её $\frac{p}{q}$ числитель был рациональным. Но, $p, q, q_2 \in \mathbb{Z}$, $p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ и $p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$, то $\frac{p}{q}$ иррациональны $\frac{p_2}{q_1}$ и $\frac{p_2}{q_2}$ делятся на целые коэффициенты и сокращаются. То есть, значит $p, q, q_2, \frac{p_2}{q_1}$ и $\frac{p_2}{q_2}$ - иррациональные числа. А сумма трёх иррациональных чисел никогда не даёт рационального, кроме случая $a=b=c=0$

№11.2

$$\left| \sin \frac{11\pi}{24} x \right| = a$$

Пусть $t = \frac{11\pi}{24} x$, тогда, если $x \in [0; 24)$, то $t \in [0; 11\pi)$

$$|\sin t| = a$$

$$1. \sin t \geq 0 \quad t \in [2\pi n; \pi + 2\pi n]$$

$$2. \sin t < 0 \quad t \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$$

$$\sin t = a$$

$$t = \arcsin a + 2\pi n$$

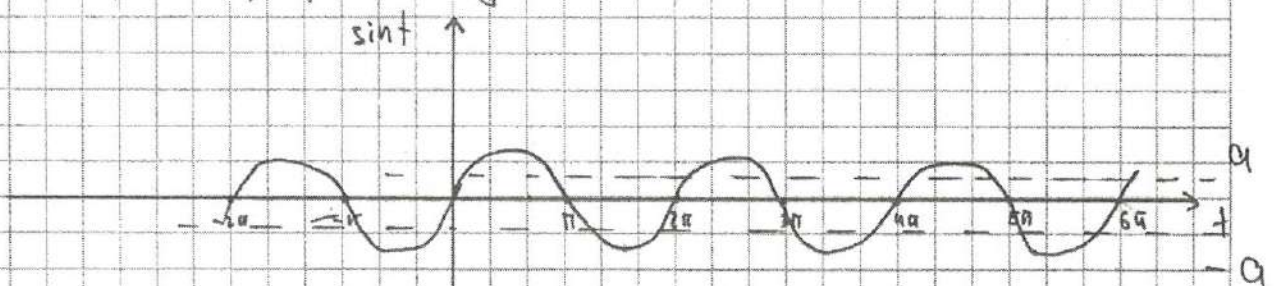
$$t = \pi - \arcsin a + 2\pi n$$

$$\sin t = -a$$

$$t = -\arcsin a + 2\pi n$$

$$t = \pi + \arcsin a + 2\pi n$$

Нарисуем график синуса:



1) из графика видно, что при $a \in (0; 1)$ $\sin t = a$

в двух точках в каждом интервале $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$ и $[4\pi n; 5\pi + 2\pi n]$

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

$\sin t = -a$ в двух точках в каждом интервале $(\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$.

Получается, на промежутке от 0 до π $11 \cdot 2 = 22$ решения.

2) при $a=1$ всего 11 решений на интервале (6 решений из $\sin t = 1$ и 5 из $\sin t = -1$)

3) при $a=0$ всего 11 решений (т.к. π не включили, это $0, \pi, 2\pi, \dots, 10\pi$).

Ответ: при $a=0$ и $a=1$: 11 корней
при $a \in (0; 1)$: 22 корня



№ 11.5

15	27	28	25	27	28	.	.
26	23	30	26	29	30	.	.
21	21	18	15	12	9	6	3
23	20	17	14	11	8	5	2
27	19	16	13	10	7	4	1
24	21	18	15	12	9	6	3
23	20	17	14	11	8	5	2
22	19	16	13	10	7	4	1

	15		16		9
7		6		5	
	14				10
8				4	
	13		12		11
1	2	3	4	5	6

Попробуем расставить максимальное кол-во дуплей на доске, дуплей, это пример, в котором свободными остаются только 4 клетки уже есть.

Выберем на доске любую клетку/где ей есть дупль (если такой нет, то можно получить пример на 30 дуплей)

Обозначим её 1. Вторые клетки этого дупля может располагаться в двух разных клетках, но эти дупли симметричны,

поэтому рассмотрим тот, где первый дупль занимает

клетки 1 и 2. Тогда клетка номер 3 может соотв. только

клетки номер 4, клетки номер 5 - клетки номер 6 и т.д.

Сделаем всё то же самое для клетки, противоположной клетке

5

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

Ш11.5

○	□	△	●	■	▲	○	□
□	△	●	■	▲	○	□	△
△	●	■	▲	○	□	△	●
●	■	▲	○	□	△	●	■
■	▲	○	□	△	●	■	▲
▲	○	□	△	●	■	▲	○
○	□	△	●	■	▲	○	□
□	△	●	■	▲	○	□	△

Раскрасим дожку так, чтобы
 один дуполь вклягал в оба 2
 клетки с одной и той же фигурой, но
 одна из них закрашена, а вторая
 нет. Рассмотрим клетки с кружочками.

Незакрашенных $\rightarrow 11$, закрашенных $\rightarrow 10$. Т.к. любая
 клетка из незакрашенных кружочков имеет лишь
 пару только из закрашенных, то одну клетку
 мы теряем и получаем 10 дуполей.

Квадраты:

закрашенные - 10 \Rightarrow 2 клетки теряем, получаем
 незакрашенные - 12 10 дуполей.

Треугольники:

закрашенные - 10 \Rightarrow 1 клетку теряем, получаем
 незакрашенные - 10 10 дуполей.

Итого: максимум 30 дуполей.

Пример:

.	.	50	29	26	50	29	26
.	.	27	26	25	27	26	25
3	6	9	12	15	18	21	24
2	5	8	11	14	17	20	23
1	4	7	10	13	16	19	22
3	6	9	12	15	18	21	24
2	5	8	11	14	17	20	23
1	4	7	10	13	16	19	22

- одинаковыми цифрами обозначены
 две пары одного дуполя

Ответ: 30

6