



ШИФР

aT-40

(заполняется представителем Оргкомитета)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по МАТЕМАТИКЕ

(наименование общеобразовательного предмета)

Дата проведения 21.01.2024ФИО участника (полностью) БУАЫЛИНА ВИКТОРИЯ АЛЕКСЕЕВНА

Дата рождения _____

СНИЛС _____

Класс 11Школа № МБОУ «КП» район _____ город КЕМЕРОВО

Особые отметки (Заполняется представителем оргкомитета)
о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы.

Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен _____

(Подпись участника олимпиады)

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады обязан:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады запрещается:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполняющуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий.

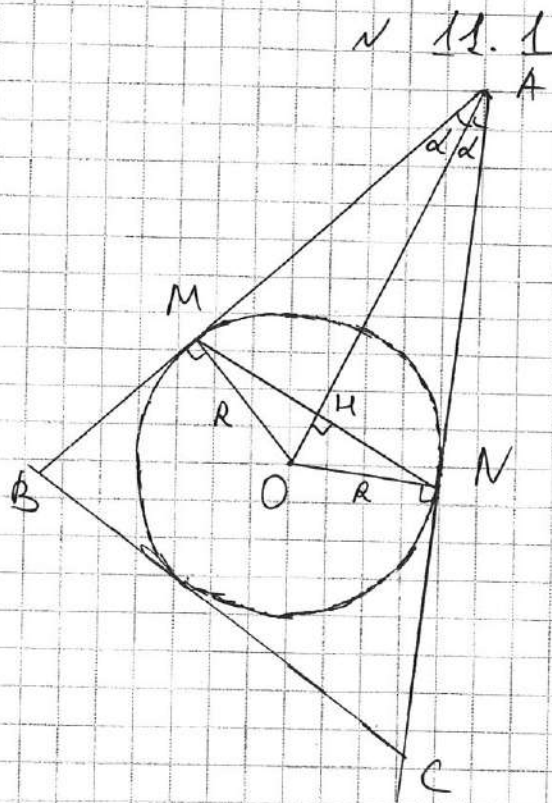
1	2	3	4	5	Σ
±11	+	+	-	-	=
14	16	16	4	0	50

Чистовик

ШИФР 87-40

(заполняется сотрудником секретариата)

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать!



Дано: $\triangle ABC$; впис. окр-ть $(O; R)$; M, N — точки касания, $M \in AB$; $N \in AC$; $AO = 2MN$

Найти: $\angle A$

Решение.

Пусть $AO \cap MN = H$
 $AM = AN$ (отрезки касат.)
 AO — общ.
 $MO = ON = R$

$\Rightarrow \triangle OAM = \triangle OAN$ (по двум сторонам)

Тогда пусть $\angle MAO = \alpha$, т.е. $\angle A = 2\alpha$, AH — выс-а

Проведем

Т.к. $AM = AN$, то $\triangle AMN$ — р/б, т.е. AH — выс-а и медиана. Т.е. MH и NH — высоты в прямоугол. (т.к. M и N — точки касан.) $\triangle OMA$ и $\triangle ONA$

Рассмотрим $\triangle MNA$: т.к. MN — высота $\triangle OMA$, то $\angle MNA = \angle MNA = 90^\circ$ $MN = \sqrt{OH \cdot HA}$

т.е. $\sin \alpha = \frac{MN}{AM}$

$\triangle OMA$: $S = \frac{1}{2} OA \cdot MH = \frac{1}{2} OM \cdot MA$
 $OA \cdot MH = OM \cdot MA$

$OM \perp MA$

В $\triangle OMA$: т.к. MH — высота, то $MN^2 = OH \cdot HA$

$AH + OH = OA$

Т.к. $\triangle AMN$ — р/б, то AH — медиана, т.е. $MN = 2AH$
 $OA = 2 \cdot 2MN = 4MN$

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать!

Ответы при $a=0$ - 11 корней
при $0 < a < 1$ - 22 корня
при $a=1$ - 11 корней

№ 11.3.

а) $x^2 y^2 < 2 - xy$
 $x^2 y^2 + xy - 2 < 0$
 $x^2 y^2 + 2xy - xy - 2 < 0$
 $xy(xy+2) - (xy+2) < 0$
 $(xy-1)(xy+2) < 0$

① $xy+2=0$
 $y = -\frac{2}{x}$ $x \neq 0$

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$y = -\frac{2}{x}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$

② $xy-1=0$

$y = \frac{1}{x}$

x	-2	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{2}$	-2	-1	2	1	$\frac{1}{2}$

$(0;0):$ $(-1) \cdot 2 < 0$
 $-2 < 0$

$(-2;-2):$ $(4+2)(4-1) < 0$
 $6 \cdot 3 < 0$ - неверно

$(2;2):$ $(4+2)(4-1) < 0$
 $6 \cdot 3 < 0$ - неверно

$(2;-2):$ $(2-4)(-4-1) < 0$
 $10 < 0$ - неверно

$(-2;2):$ $(-4+2)(-4-1) < 0$
 $10 < 0$ - неверно

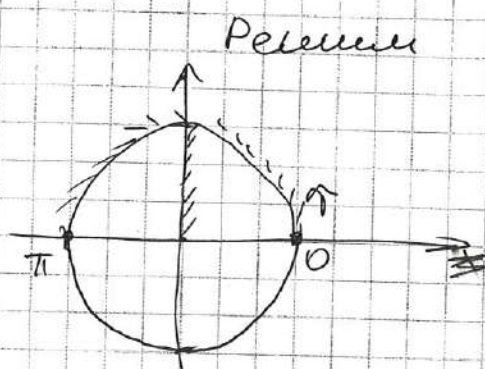
Фамилию, имя, отчество не писать! Лист не подписывать!

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{11\pi x}{24} \geq 0 \\ \sin \frac{11\pi x}{24} = a \\ \sin \frac{11\pi x}{24} < 0 \\ \sin \frac{11\pi x}{24} = -a \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{11\pi x}{24} = a \\ \sin \frac{11\pi x}{24} < 0 \\ \sin \frac{11\pi x}{24} = -a \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{11\pi x}{24} < 0 \\ \sin \frac{11\pi x}{24} = -a \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{11\pi x}{24} = -a \end{array} \right.$$



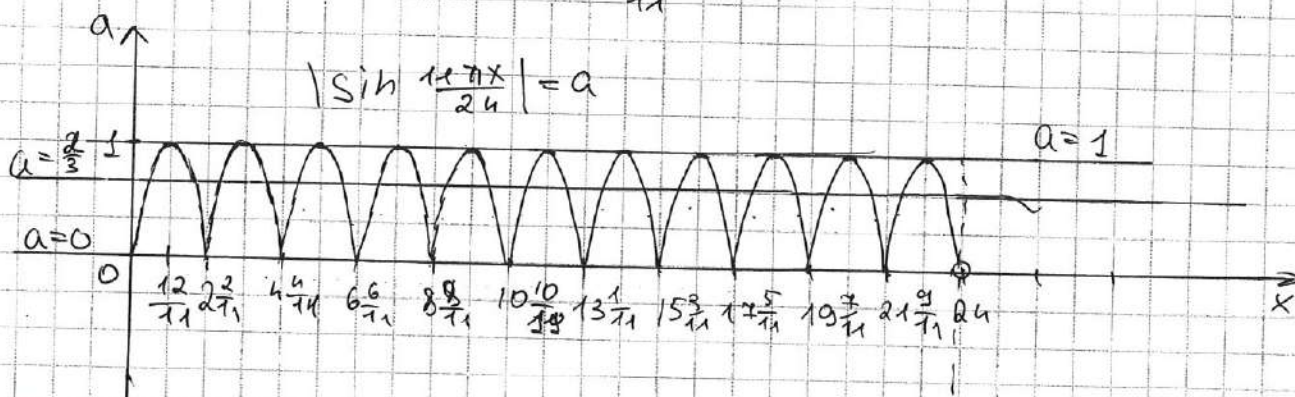
Решим нерав-во $\sin \frac{11\pi x}{24} \geq 0$

$$2\pi k \leq \frac{11\pi x}{24} \leq 2\pi k + \pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$48k \leq 11x \leq 24 + 48k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{48k}{11} \leq x \leq \frac{24}{11} + \frac{48k}{11}, k \in \mathbb{Z}$$

при $k=0$: $0 \leq x \leq 2\frac{2}{11}$



$$\begin{aligned} a &= \frac{12}{11} : \sin \frac{11\pi \cdot 12}{24} = a \\ x &= \sin \frac{\pi}{2} = a \\ a &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{36}{11} : \sin \frac{11\pi \cdot 36}{24} = -a \\ x &= \sin \frac{3\pi}{2} = -a \\ a &= 1 \end{aligned}$$

Число корней - это кол-во точек пересечения графика $|\sin \frac{11\pi x}{24}| = a$, изображенного на рисунке, и прямой $a = h$, где h - действ. число.

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать!

Т.о.
$$\begin{cases} AH + OH = 4MN \\ MN^2 = OH \cdot AH \end{cases}$$

Пусть $AH = x$, тогда

$$\begin{cases} x + OH = 4MN \\ MN^2 = OH \cdot x \end{cases} \Rightarrow OH = 4MN - x$$

$$MN^2 = (4MN - x) \cdot x$$

$$MN^2 = 4MN \cdot x - x^2$$

$$x^2 - 4MN \cdot x + MN^2 = 0$$

$$D_1 = 4MN^2 - MN^2 = 3MN^2$$

$$x = 2MN \pm MN\sqrt{3}$$

Т.е. $AH = 2MN \pm MN\sqrt{3} = MN(2 \pm \sqrt{3})$

по т. Пифагора в $\triangle MHA$: $AM^2 = MN^2 + AH^2$

$$AM = \sqrt{MN^2 + MN^2(4 \pm 4\sqrt{3} + 3)} = MN\sqrt{8 \pm 4\sqrt{3}}$$

в $\triangle MHA$: $\sin \alpha = \frac{MN}{AM} = \frac{MN}{MN\sqrt{8 \pm 4\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{8 \pm 4\sqrt{3}}}$

$$\cos \alpha = \frac{AH}{AM} = \frac{MN(2 \pm \sqrt{3})}{MN\sqrt{8 \pm 4\sqrt{3}}} = \frac{(2 \pm \sqrt{3})}{\sqrt{8 \pm 4\sqrt{3}}}$$

$\angle A = 2\alpha$, т.е. $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha =$

$$= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{8 \pm 4\sqrt{3}}} \cdot \frac{2 \pm \sqrt{3}}{\sqrt{8 \pm 4\sqrt{3}}} = \frac{2(2 \pm \sqrt{3})}{4(2 \pm \sqrt{3})} = \frac{1}{2}$$

$\angle A = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ$

Ответ: 30° или \checkmark

или 21.2

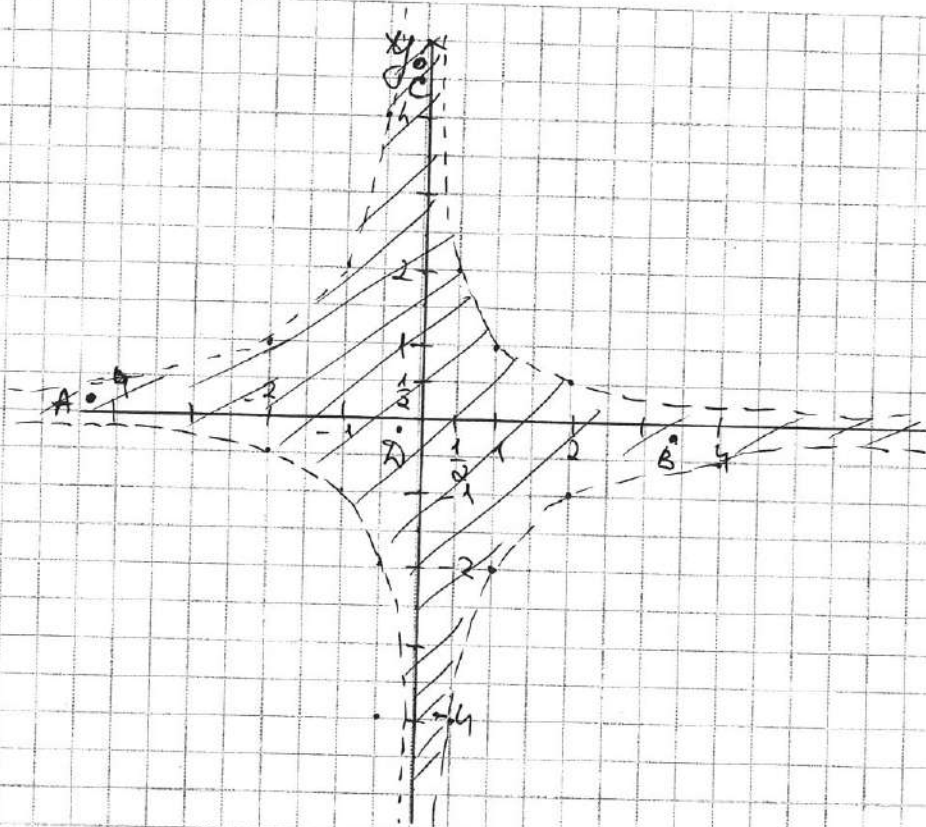
$$\left| \sin \frac{180x}{24} \right| = a$$

$$a \in [0; 1]$$

$$x \in [0; 24)$$

угол A определяется
не однозначно!

Фамилию, имя, отчество не писать! Лист не подписывать!



б) рассмотрим точки A, B, C, D.

Точки A и D, A и B, B и C, C и D можно соединить отрезками.

Точки же C и A можно соединить ломаной, проходящей из точки (0; 0). Т.е. любые две точки, не лежащие на одной прямой, можно соединить ломаной, проходящей через начало координат. Это верно, если k — рациональное число.

$$k = a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6}$$

$$k^2 = 2a^2 + 3b^2 + 6c^2 + 2ab\sqrt{6} + 2ac\sqrt{3} + 6bc\sqrt{2}$$

Если $a \neq b \neq c \neq 0$, то у нас возникает противоречие, т.к. слева — рациональное число, а справа — нет.

Если это не принять, то $a = b = c = 0$, то

$$k^2 = 0, \text{ т.е. рациональному числу.}$$

Фамилию, имя, отчество не писать! Лист не подписывать!

№ 11.5

Рассмотрим какой-нибудь столбец
наш 8×8 прономеруем каждую его клетку

1) $\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$

Обведем в кружок
те клетки, которые
можно закрасить.
Всего 3 варианта

Рассмотрим какую-нибудь строку этого
наш. Пронумеруем каждую клетку

1) $\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$

Обведем в кружок
те клетки, которые
можно закрасить. Всего 3 варианта.

2) $\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$

Рассмотрим комбинации
мы получим 3 закрашенных клетки.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1 2 3

1	2	3
4	5	6
7	8	9

1 2 3

1	2	3
4	5	6
7	8	9

2 3 4

→

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать!

и	и	и
и	и	и
и	и	и

2 и 2

во всех случаях
дипломы. наименьшее
единачное кол-во
их 12

Ответ: 12.

