



ШИФР

аТ-44

(заполняется представителем Оргкомитета)

## Письменная работа

### Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике

(наименование общеобразовательного предмета)

Дата проведения 21.01.2024ФИО участника (полностью) Денисенко Илья Вадимович

Дата рождения \_\_\_\_\_

СНИЛС \_\_\_\_\_

Класс 11Школа № ОГБОУ ГФГЛ

район \_\_\_\_\_

город Томск

**Особые отметки** (Заполняется представителем оргкомитета)  
о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

*Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.*

#### Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы.

Нельзя делать исправления карандашом.

**Внимание!** Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

#### Правила поведения

Участник очного тура олимпиады обязан:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

**Внимание.** Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады запрещается:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

**Внимание.** За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполняющуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий.

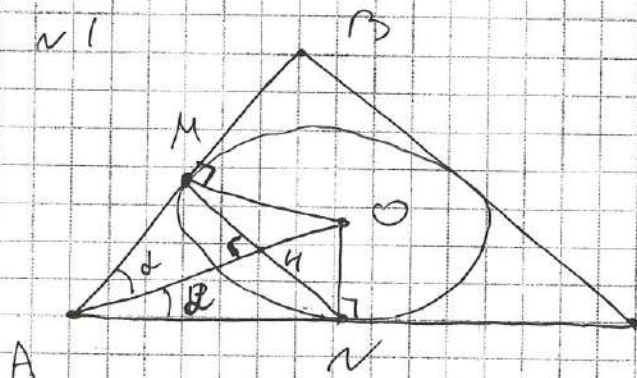
С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады)



|      |      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|------|
| 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | Σ    |
| 10   | 11   | 12   | 13   | 14   | 15   |
| 16   | 17   | 18   | 19   | 20   | 21   |
| 22   | 23   | 24   | 25   | 26   | 27   |
| 28   | 29   | 30   | 31   | 32   | 33   |
| 34   | 35   | 36   | 37   | 38   | 39   |
| 40   | 41   | 42   | 43   | 44   | 45   |
| 46   | 47   | 48   | 49   | 50   | 51   |
| 52   | 53   | 54   | 55   | 56   | 57   |
| 58   | 59   | 60   | 61   | 62   | 63   |
| 64   | 65   | 66   | 67   | 68   | 69   |
| 70   | 71   | 72   | 73   | 74   | 75   |
| 76   | 77   | 78   | 79   | 80   | 81   |
| 82   | 83   | 84   | 85   | 86   | 87   |
| 88   | 89   | 90   | 91   | 92   | 93   |
| 94   | 95   | 96   | 97   | 98   | 99   |
| 100  | 101  | 102  | 103  | 104  | 105  |
| 106  | 107  | 108  | 109  | 110  | 111  |
| 112  | 113  | 114  | 115  | 116  | 117  |
| 118  | 119  | 120  | 121  | 122  | 123  |
| 124  | 125  | 126  | 127  | 128  | 129  |
| 130  | 131  | 132  | 133  | 134  | 135  |
| 136  | 137  | 138  | 139  | 140  | 141  |
| 142  | 143  | 144  | 145  | 146  | 147  |
| 148  | 149  | 150  | 151  | 152  | 153  |
| 154  | 155  | 156  | 157  | 158  | 159  |
| 160  | 161  | 162  | 163  | 164  | 165  |
| 166  | 167  | 168  | 169  | 170  | 171  |
| 172  | 173  | 174  | 175  | 176  | 177  |
| 178  | 179  | 180  | 181  | 182  | 183  |
| 184  | 185  | 186  | 187  | 188  | 189  |
| 190  | 191  | 192  | 193  | 194  | 195  |
| 196  | 197  | 198  | 199  | 200  | 201  |
| 202  | 203  | 204  | 205  | 206  | 207  |
| 208  | 209  | 210  | 211  | 212  | 213  |
| 214  | 215  | 216  | 217  | 218  | 219  |
| 220  | 221  | 222  | 223  | 224  | 225  |
| 226  | 227  | 228  | 229  | 230  | 231  |
| 232  | 233  | 234  | 235  | 236  | 237  |
| 238  | 239  | 240  | 241  | 242  | 243  |
| 244  | 245  | 246  | 247  | 248  | 249  |
| 250  | 251  | 252  | 253  | 254  | 255  |
| 256  | 257  | 258  | 259  | 260  | 261  |
| 262  | 263  | 264  | 265  | 266  | 267  |
| 268  | 269  | 270  | 271  | 272  | 273  |
| 274  | 275  | 276  | 277  | 278  | 279  |
| 280  | 281  | 282  | 283  | 284  | 285  |
| 286  | 287  | 288  | 289  | 290  | 291  |
| 292  | 293  | 294  | 295  | 296  | 297  |
| 298  | 299  | 300  | 301  | 302  | 303  |
| 304  | 305  | 306  | 307  | 308  | 309  |
| 310  | 311  | 312  | 313  | 314  | 315  |
| 316  | 317  | 318  | 319  | 320  | 321  |
| 322  | 323  | 324  | 325  | 326  | 327  |
| 328  | 329  | 330  | 331  | 332  | 333  |
| 334  | 335  | 336  | 337  | 338  | 339  |
| 340  | 341  | 342  | 343  | 344  | 345  |
| 346  | 347  | 348  | 349  | 350  | 351  |
| 352  | 353  | 354  | 355  | 356  | 357  |
| 358  | 359  | 360  | 361  | 362  | 363  |
| 364  | 365  | 366  | 367  | 368  | 369  |
| 370  | 371  | 372  | 373  | 374  | 375  |
| 376  | 377  | 378  | 379  | 380  | 381  |
| 382  | 383  | 384  | 385  | 386  | 387  |
| 388  | 389  | 390  | 391  | 392  | 393  |
| 394  | 395  | 396  | 397  | 398  | 399  |
| 400  | 401  | 402  | 403  | 404  | 405  |
| 406  | 407  | 408  | 409  | 410  | 411  |
| 412  | 413  | 414  | 415  | 416  | 417  |
| 418  | 419  | 420  | 421  | 422  | 423  |
| 424  | 425  | 426  | 427  | 428  | 429  |
| 430  | 431  | 432  | 433  | 434  | 435  |
| 436  | 437  | 438  | 439  | 440  | 441  |
| 442  | 443  | 444  | 445  | 446  | 447  |
| 448  | 449  | 450  | 451  | 452  | 453  |
| 454  | 455  | 456  | 457  | 458  | 459  |
| 460  | 461  | 462  | 463  | 464  | 465  |
| 466  | 467  | 468  | 469  | 470  | 471  |
| 472  | 473  | 474  | 475  | 476  | 477  |
| 478  | 479  | 480  | 481  | 482  | 483  |
| 484  | 485  | 486  | 487  | 488  | 489  |
| 490  | 491  | 492  | 493  | 494  | 495  |
| 496  | 497  | 498  | 499  | 500  | 501  |
| 502  | 503  | 504  | 505  | 506  | 507  |
| 508  | 509  | 510  | 511  | 512  | 513  |
| 514  | 515  | 516  | 517  | 518  | 519  |
| 520  | 521  | 522  | 523  | 524  | 525  |
| 526  | 527  | 528  | 529  | 530  | 531  |
| 532  | 533  | 534  | 535  | 536  | 537  |
| 538  | 539  | 540  | 541  | 542  | 543  |
| 544  | 545  | 546  | 547  | 548  | 549  |
| 550  | 551  | 552  | 553  | 554  | 555  |
| 556  | 557  | 558  | 559  | 560  | 561  |
| 562  | 563  | 564  | 565  | 566  | 567  |
| 568  | 569  | 570  | 571  | 572  | 573  |
| 574  | 575  | 576  | 577  | 578  | 579  |
| 580  | 581  | 582  | 583  | 584  | 585  |
| 586  | 587  | 588  | 589  | 590  | 591  |
| 592  | 593  | 594  | 595  | 596  | 597  |
| 598  | 599  | 600  | 601  | 602  | 603  |
| 604  | 605  | 606  | 607  | 608  | 609  |
| 610  | 611  | 612  | 613  | 614  | 615  |
| 616  | 617  | 618  | 619  | 620  | 621  |
| 622  | 623  | 624  | 625  | 626  | 627  |
| 628  | 629  | 630  | 631  | 632  | 633  |
| 634  | 635  | 636  | 637  | 638  | 639  |
| 640  | 641  | 642  | 643  | 644  | 645  |
| 646  | 647  | 648  | 649  | 650  | 651  |
| 652  | 653  | 654  | 655  | 656  | 657  |
| 658  | 659  | 660  | 661  | 662  | 663  |
| 664  | 665  | 666  | 667  | 668  | 669  |
| 670  | 671  | 672  | 673  | 674  | 675  |
| 676  | 677  | 678  | 679  | 680  | 681  |
| 682  | 683  | 684  | 685  | 686  | 687  |
| 688  | 689  | 690  | 691  | 692  | 693  |
| 694  | 695  | 696  | 697  | 698  | 699  |
| 700  | 701  | 702  | 703  | 704  | 705  |
| 706  | 707  | 708  | 709  | 710  | 711  |
| 712  | 713  | 714  | 715  | 716  | 717  |
| 718  | 719  | 720  | 721  | 722  | 723  |
| 724  | 725  | 726  | 727  | 728  | 729  |
| 730  | 731  | 732  | 733  | 734  | 735  |
| 736  | 737  | 738  | 739  | 740  | 741  |
| 742  | 743  | 744  | 745  | 746  | 747  |
| 748  | 749  | 750  | 751  | 752  | 753  |
| 754  | 755  | 756  | 757  | 758  | 759  |
| 760  | 761  | 762  | 763  | 764  | 765  |
| 766  | 767  | 768  | 769  | 770  | 771  |
| 772  | 773  | 774  | 775  | 776  | 777  |
| 778  | 779  | 780  | 781  | 782  | 783  |
| 784  | 785  | 786  | 787  | 788  | 789  |
| 790  | 791  | 792  | 793  | 794  | 795  |
| 796  | 797  | 798  | 799  | 800  | 801  |
| 802  | 803  | 804  | 805  | 806  | 807  |
| 808  | 809  | 810  | 811  | 812  | 813  |
| 814  | 815  | 816  | 817  | 818  | 819  |
| 820  | 821  | 822  | 823  | 824  | 825  |
| 826  | 827  | 828  | 829  | 830  | 831  |
| 832  | 833  | 834  | 835  | 836  | 837  |
| 838  | 839  | 840  | 841  | 842  | 843  |
| 844  | 845  | 846  | 847  | 848  | 849  |
| 850  | 851  | 852  | 853  | 854  | 855  |
| 856  | 857  | 858  | 859  | 860  | 861  |
| 862  | 863  | 864  | 865  | 866  | 867  |
| 868  | 869  | 870  | 871  | 872  | 873  |
| 874  | 875  | 876  | 877  | 878  | 879  |
| 880  | 881  | 882  | 883  | 884  | 885  |
| 886  | 887  | 888  | 889  | 890  | 891  |
| 892  | 893  | 894  | 895  | 896  | 897  |
| 898  | 899  | 900  | 901  | 902  | 903  |
| 904  | 905  | 906  | 907  | 908  | 909  |
| 910  | 911  | 912  | 913  | 914  | 915  |
| 916  | 917  | 918  | 919  | 920  | 921  |
| 922  | 923  | 924  | 925  | 926  | 927  |
| 928  | 929  | 930  | 931  | 932  | 933  |
| 934  | 935  | 936  | 937  | 938  | 939  |
| 940  | 941  | 942  | 943  | 944  | 945  |
| 946  | 947  | 948  | 949  | 950  | 951  |
| 952  | 953  | 954  | 955  | 956  | 957  |
| 958  | 959  | 960  | 961  | 962  | 963  |
| 964  | 965  | 966  | 967  | 968  | 969  |
| 970  | 971  | 972  | 973  | 974  | 975  |
| 976  | 977  | 978  | 979  | 980  | 981  |
| 982  | 983  | 984  | 985  | 986  | 987  |
| 988  | 989  | 990  | 991  | 992  | 993  |
| 994  | 995  | 996  | 997  | 998  | 999  |
| 1000 | 1001 | 1002 | 1003 | 1004 | 1005 |

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!



$$AO = 2MN$$

$$\angle A = ?$$

$$\text{Ответ: } 2\arcsin(2-\sqrt{3}) \text{ или } 2\arcsin(2+\sqrt{3}).$$

Решение:

$$1) R\text{-м } \triangle AMO \text{ и } \triangle ANO$$

$$\angle M = \angle N = 90^\circ (R \text{ к кас})$$

$$OM = ON = R$$

$$AO - \text{общ.}; \triangle AMO = \triangle ANO (\text{по кат и гип})$$

$$\Rightarrow \angle MAO = \angle OAN = \alpha \text{ (центр впис. кр. пересек. дуг.)}$$

$$2) \triangle MAN: AM = AN (\text{кас. уг. к } A) \Rightarrow \triangle MAN - \text{р.б. (опр.)} \Rightarrow$$

$$AO \perp MN \text{ (AO - дуг.) (св.-во)}$$

$$AO - \text{медiana} \Rightarrow MH = HN = \frac{AO}{4}$$

$$3) \triangle AMO: MH^2 = AH \cdot HO \text{ (метр. согн.) } (\angle AMO = 90^\circ, \text{ гип.})$$

$$\frac{AO^2}{16} = AH \cdot (AO - AH) \Rightarrow AO^2 = 16 \cdot AH \cdot AO - 16 AH^2$$

$$16AH^2 - 16AH \cdot AO + AO^2 = 0, k = -8$$

$$D = (64 - 16)AO^2 = 48AO^2$$

$$AH_1 = \frac{8AO + 4\sqrt{3} \cdot AO}{16}$$

$$AH_2 = \frac{8AO - 4\sqrt{3} \cdot AO}{16}$$

$$\angle MAO = \arcsin \frac{MH}{AH}$$

$$1) \angle MAO = \arcsin \frac{8AO + 4\sqrt{3} \cdot AO}{16 \cdot (8AO + 4\sqrt{3} \cdot AO)} = \frac{AO}{4 \cdot (8AO + 4\sqrt{3} \cdot AO)} = \frac{1}{4 \cdot (8 + 4\sqrt{3})} = \frac{1}{4 \cdot (2 + \sqrt{3})} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$$

$$2) \angle MAO = \arcsin \frac{AO}{4 \cdot AO \cdot (8 - 4\sqrt{3})} = 2 + \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\angle A = 2\arcsin(2 + \sqrt{3})$$

$$\arcsin \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow \angle A = 2\arcsin(2 - \sqrt{3}).$$



Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

$$\sim 2 \quad \left| \sin \frac{11\pi}{24} x \right| = a \quad x \in [0; 24).$$

Методом перебора я проверил возможные количества корней при различных  $a$ . И получил, что эти количества отличаются только лишь при  $a=1$  и  $a=0 \Rightarrow$

1)  $a=0$  :  $\frac{11\pi}{24} x = \pi n \Rightarrow x = \frac{24n}{11} \Rightarrow 0 \leq \frac{24n}{11} < 24$   
 $0 \leq 24n < 264$   
 $0 \leq n < 11$   
 $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = 0, 1, 2, 3, \dots, 10$

2)  $a=1 \Rightarrow \frac{11\pi}{24} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$  — 11 корней.

$$\frac{11\pi}{24} x = \frac{5\pi}{2} + 2\pi n$$

$$x = \frac{12}{11} + \frac{24n}{11}$$

$$\frac{11\pi}{24} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$0 \leq \frac{12+24n}{11} < 24$$

$$-12 \leq 24n < 252$$

$$n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, 10$$

3)  $a \in (0; 1)$  Пусть  $a = \frac{1}{2}$ .

$$\frac{11\pi}{24} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$$

$$x = \frac{4+48n}{11}$$

$$0 \leq \frac{4+48n}{11} < 24$$

$$0 \leq 4+48n < 264$$

$$4 \leq 48n < 260$$

$$n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$\frac{11\pi}{24} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$$

$$x = \frac{-4+48n}{11}$$

$$0 \leq \frac{-4+48n}{11} < 24$$

$$4 \leq 48n < 268$$

$$n = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$\frac{11\pi}{24} x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

$$x = \frac{20+48n}{11}$$

$$0 \leq \frac{20+48n}{11} < 24$$

$$20 \leq 48n < 244$$

$$n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$\frac{11\pi}{24} x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$$

$$x = \frac{-20+48n}{11}$$

$$20 \leq 48n < 284$$

$$n = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$6 + 5 + 6 + 5 = 22 \text{ корня}$$

Ответ: при  $a = \{0; 1\}$  — 11 корней; при  $a \in (0; 1)$  — 22 корня.



Фамилию, имя, отчество не писать! Лист не подписывать!

№4

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + c\sqrt{6} \in R, a \in R, b \in R, c \in R$$

т.е.  $c \in R$ ; то его можно представить в виде суммы

$$c = e + d, \text{ где } e, d \in R$$

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} + e\sqrt{6} + d\sqrt{6} = \sqrt{2}(a + e\sqrt{3}) + \sqrt{3}(b + d\sqrt{2})$$

из суммы  $2x + y$  можно получить  $R$  число только, если они оба  $-R$  или противоположны друг другу.

1)  $\sqrt{2}(a + e\sqrt{3}) \in R$

$a + e\sqrt{3}$  принимает вид

$$\frac{k}{\sqrt{2}}, \text{ где } k \in R.$$

для удобства возьмем  $k=1 \Rightarrow$

$$a + e\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} - e\sqrt{3}.$$

при  $a, e \in R$  такое невозможно.

2)  $\sqrt{2}(a + e\sqrt{3}) = \sqrt{3}(b + d\sqrt{2})$   
(знак  $\in$  уберем, просто вид будет суммой  $3x$ ).

$$\frac{a + e\sqrt{3}}{b + d\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

Пусть дробь несократимая:

$$a + e\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$a = \sqrt{3}(1 - e)$$

возможно только при  $e=1 \Rightarrow$

$$a, b, c = 0.$$

$\Rightarrow$  да, можем

№5

мы легко можем заштриховать часть поля  $(b+c) - 2k$  дилоня.

Таким образом можем заметить, что в одной полосе может максимумо находиться

3 дилоня (билетов). как бы мы не заштриховывали оставшуюся часть поля, максимумо всего 6 дилоней  $\Rightarrow$

Ответ: 30 дилоней.

|    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1  | 4  | 7  | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 |
| 2  | 5  | 8  | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 |
| 3  | 6  | 9  | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 |
| 1  | 4  | 7  | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 |
| 2  | 5  | 8  | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 |
| 3  | 6  | 9  | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |    |    |
| 28 | 29 | 30 | 28 | 29 | 30 |    |    |



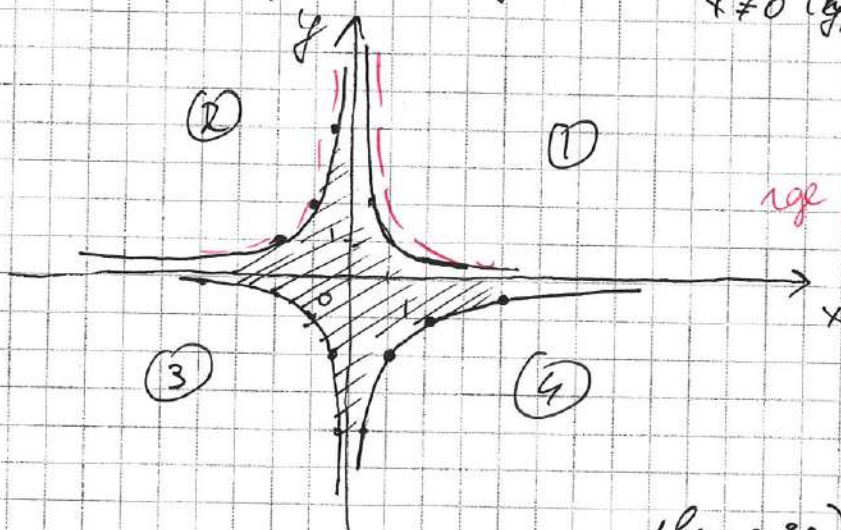
Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать!

а)  $x^2 y^2 \leq 2 - xy$   
 $xy^2 + xy - 2 \leq 0$   
 $(xy - 1)(xy + 2) \leq 0$

Построим графики:  $(xy - 1)(xy + 2) = 0$

$y = \frac{1}{x}$     $y = -\frac{2}{x}$

$x \neq 0$  (гра не реш)



*где дои то, что  
они удовлетворяют?*

Заметим, что в первой четверти (выше гр)  $xy > -2 \Rightarrow (xy - 1)(xy + 2) > 0$  не уг.

~~Во второй четверти (выше гр)  $xy > -2 \Rightarrow (xy - 1)(xy + 2) > 0$~~

В третьей (выше гр)

$xy > 1 \Rightarrow (xy - 1)(xy + 2) > 0$

В 4-ой (выше гр)

$xy < -2 \Rightarrow (xy - 1)(xy + 2) > 0$

~~$-2 < xy < 1$~~

$\Rightarrow (xy - 1)(xy + 2) < 0$  будет находится между этими графиками (на рис. заштриховано).

б) По рис видно, что любую точку в граф можно соединить с Т. (0;0)  $\Rightarrow$  мы можем соединить любые 2 точки с помощью помощи ? т.д.

*Нужно точки у области!*