



ШИФР

2574/М-11/40

(заполняется представителем Оргкомитета)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по МАТЕМАТИКЕ

(наименование общеобразовательного предмета)

Дата проведения 19.01.2025

ФИО участника (полностью)

Тимофеев Устин Витальевич

Дата рождения

Класс 11Школа № 102район Московскийгород Казань

Особые отметки (Заполняется представителем оргкомитета)
о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады обязан:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады запрещается:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполняющуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий.

Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы.

Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады)

олимпиада школьников
УДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-
УДУЩЕЕ НАУКИ

Чистовик

ШИФР КТ74/М. 11/40
(заполняется сотрудником секретариата)

| Задание 1 | Задание 2 | Задание 3 | Задание 4 | Сумма баллов |
|-----------|-----------|-----------|-----------|--------------|
| + | - | + | + | + |
| 20 | 4 | 20 | 12 | 16 |

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество не писать! Лист не подписывать!

$\Sigma = 72$

1 1. 1.

$$2 \cos^4 x - \sin^3 x = 1$$

$$\cos^4 x = (1 - \sin^2 x)^2$$

$$\cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x$$

$$2(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) - \sin^3 x = 1$$

$$2 - 4\sin^2 x + 2\sin^4 x - \sin^3 x - 1 = 0$$

$$2\sin^4 x - \sin^3 x - 4\sin^2 x + 1 = 0$$

$$\sin^3 x (2\sin x - 1) - (4\sin^2 x - 1) = 0$$

$$\sin^3 x (2\sin x - 1) - (2\sin x - 1)(2\sin x + 1) = 0$$

$$(2\sin x - 1)(\sin^3 x - 2\sin x - 1) = 0$$

$$2\sin x - 1 = 0$$

$$\sin^3 x - 2\sin x - 1 = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = t$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$t^3 - 2t - 1 = 0$$

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$t = -1$$

$$(t+1)(t^2-t-1)=0$$

$$t+1=0$$

$$t=-1$$

$$t^2-t-1=0$$

$$D=1-4 \cdot (-1)$$

$$D=5$$

$$t_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1, \text{ не подходит}$$

$$t_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\sin x = -1$$

$$x_3 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi f, f \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$x_4 = \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi r, r \in \mathbb{Z}$$

$$x_5 = \pi - \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi d, d \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$; $x_3 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi f$; $x_4 = \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi r$;
 $x_5 = \pi - \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi d$.

11.4.

$$g \cdot x^{6x} = 1$$

a). $x^{6x} = \frac{1}{g}$

Возьмем от обеих сторон натуральный логарифм

$$\ln(x)^{6x} = \ln(g)^{-1}$$

$$6x \cdot \ln(x) = -1/\ln(g)$$

$$6x \ln(x) + \ln(g) = 0$$

Рассмотрим функцию $f(x) = 6x \ln x + \ln(g)$

$$f'(x) = (6x \ln x + \ln(g))'$$

$$f'(x) = 6 \ln x + 6$$

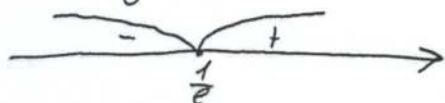
$$f'(x) = 0$$

$$6 \ln x + 6 = 0 \quad | :6$$

$$\ln(x) + 1 = 0$$

$$\ln(x) = -1$$

$$x = \frac{1}{e}$$



$x = \frac{1}{e}$ - точка минимума. Тогда уравнение может иметь максимум два решения. Одно из которых находится левее $x = \frac{1}{e}$, а другое правее $x \in (\frac{1}{e}; +\infty)$. Методом подбора найдем один корень $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{e}$ и $\frac{1}{3} < \frac{1}{e}$, то есть $x = \frac{1}{3}$ - корень находящийся левее x_{\min} , значит на промежутке $x \in (\frac{1}{e}; +\infty)$. Всего получаем

Не доказано существование
второго корня

б) Если уравнение имеет отрицательные корни, то

$6x$ - должно быть целым и четным, т.к. отрицательное число нельзя возводить в дробную степень. Тогда: $6x = -2n$,

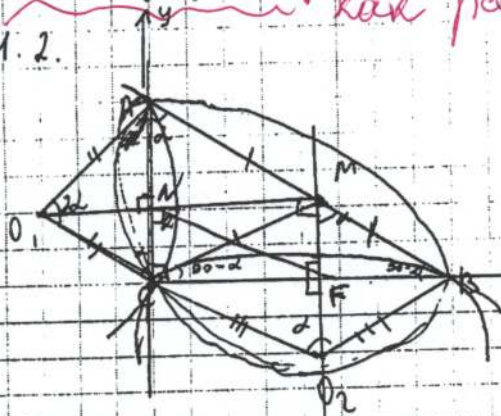
где $n \in \mathbb{N}$. Имеем: $(-\frac{1}{3} \cdot n)^{-2n} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow +9^n \cdot (n)^{-2n} = \frac{1}{9}$ Разделив

преобразуем получим $\frac{3n^{2n+1}}{n^{2n}} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{3n^{2n+1}}{n^{2n}} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \Rightarrow \left(\frac{3n}{n^{2n}}\right) \left(\frac{3n^{2n}}{n^{2n}}\right) = \frac{1}{9} \Rightarrow \left(\frac{3}{n}\right)^{2n} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = \left(\frac{3}{n}\right)^{2n} \cdot \frac{1}{3^{2n}} = \left(\frac{3}{n}\right)^{2n} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = 1$

нет б) Не имеет решений $\frac{3}{n} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{3}{n} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{3^{2n}}{n^{2n}} = 1$

Легко увидеть, что уравнение корней нет. б) Не имеет решений

11.2.



Дано:

$\angle O_1AB = \alpha$

M - середина AB

Найти:
 $S_{ABC} = ?$
 S_{AOM}

Решение:

1. $M \in ON$, т.к. M середина AB , O_1N - высота в равнобед $\triangle O_1AC$ ($O_1A = O_1B$),

$O_1C = O_1B \Rightarrow$ медиана, то есть координата по y у точки $N = \frac{1}{2}AC$.

у точки $M = \frac{1}{2}AC$, т.к. середина AB .

2. $M \in O_2F$, т.к. M - середина AB , O_2F - высота в равнобед $\triangle O_2CB$ ($O_2C = O_2B$).

Тогда $\angle O_1MO_2 = 90^\circ$.

Рассмотрим $\triangle CNMF$. $\angle O_1NC = \angle CNM = 90^\circ$ по св-ву смежных уг.

$\angle MFC = \angle O_2FC = 90^\circ$ по св-ву верт. уг. $\Rightarrow AC \parallel MF$

Рассмотрим AC и MF . При секущей AB - $\angle NAM = \angle FMB$ - как соответственные. \square

3. Рассмотрим $\triangle MB O_2$: CB и MO_2 - диагонали, из 1 и 2 получаем, что диагонали перпендикулярны $\Rightarrow \triangle MB O_2$ - ромб.

если $\triangle MB O_2$ - параллелограмм, а это не так

и $\angle FMB = \angle FO_2C = \alpha$. NF - средняя линия.

Тогда: $\angle FO_2C = \alpha = \angle CAB$
 $\angle O_1MO_2 = \angle ACB$ } $\Rightarrow \triangle O_1MO_2 \sim \triangle ACB$

который имеет
 подобия не имеет

Значит $\frac{S_{ACB}}{S_{O_1MO_2}}$ отнесется как квадрат подобия

$$\frac{AB^2}{O_1O_2^2} = \sin^2(\angle A_1O_1O_2)$$

почему $\angle A_1O_1O_2 = 2\alpha$?

почему $\frac{AB}{O_1O_2} = \sin 2\alpha$?

не доказано

$$= \sin^2 2\alpha$$

Ответ: $\frac{S_{ABC}}{S_{O_1MO_2}} = \sin^2 2\alpha$.

№3

$$ax^4 + bx = c$$



$$ax^4 + bx - c = 0$$

Рассмотрим $f(x) : ax^4 + bx - c$

Монотония

Крит. точка - $x = \sqrt[3]{\frac{-b}{4a}}$, $b > 0, a > 0 \Rightarrow x_{\text{крит}} < 0$

до $x = \sqrt[3]{\frac{-b}{4a}}$ f убывает, после f возрастает $\Rightarrow x_{\text{крит}}$ - точка min.

$$f(0) = -c, c > 0 \Rightarrow f(0) < 0$$

$f(+\infty) > 0$, т.к. x -положительный и степень четная

$f(-\infty) > 0$, т.к. $x < 0$, но степень четная.

Тогда на промежутке от $(-\infty; +\infty)$ есть хотя бы один корень, и он будет положительный, т.к. $a, c \leq a+b$, потому что a, b, c -

-стороны треугольника и после $x=0$ f будет принимать только значения, на этом промежутке в силу своей монотонности она монотонно возрастает \Rightarrow корень всего один и т.к. $x > 0$ он положительный. Аналогично и для $x \in (-\infty; 0)$. Есть хотя бы один корень, т.к. f монотонно убывает корень всего один, а т.к. $x < 0$ - он отрицательный.

Предположим, что: $|x_1| > |x_2|$, $x_1 \geq -x_2$. Тогда: $a(-x_1)^4 + b(x_2) + c > c - 6x_1 + 6x_2$, но $c > 0 \Rightarrow$ Противоречие

Предположим, что $|x_1| = |x_2|$, то есть $x_1 = -x_2$.

Тогда: $ax_1^4 + bx_1 = c$ и $ax_2^4 - bx_2 = c$, но $x_1 > 0 \Rightarrow$ противоречие.

Значит $|x_1| < |x_2|$.

Ч.Д.Д.

№6

$$\text{Если } (A_1M_1^2 + A_2M_2^2 + \dots + A_nM_n^2) = A_1A_2^2 + A_2A_1^2 + A_nA_1^2, \text{ то}$$

$$(A_1M_1^2 + A_2M_2^2 + \dots + A_nM_n^2) = A_1M_1^2 + A_2M_2^2 + \dots + A_nM_n^2$$

$$(A_1M_1^2 + A_1M_1^2) = A_1A_1^2 + A_1M_1^2$$

№5



Сумма отрезков по $A_i M_i^2 \approx$ суммы отрезков по $A_{i+1} M_i^2$
из теоремы Карно.

Тогда 4 суммы квадратов - это 2-суммы по $(A_i M_i^2 + M_i A_{i+1}^2) =$ суммы по $(A_i A_{i+1}^2)$.

Возьмем части отрезков как a и b ,

$$\text{получим } 2(a^2 + b^2) = (a+b)^2 \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow$$

$a = b$; т.е. $M M_i$ - срединное перпендикуляр к сторонам, M - центр окружности многоугольника. ЭПД.

Это не совсем части!

(!) M_i может лежать вне $A_i A_{i+1}$.