



ШИФР

КТЗУ/М - 11/29

(заполняется представителем Оргкомитета)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике

(наименование общеобразовательного предмета)

Дата проведения 19.01.2025ФИО участника (полностью) Марков Руслан Александрович

Дата рождения _____

Класс 11Школа № Лицей №3район Чувашиягород Чебоксары

Особые отметки (Заполняется представителем оргкомитета) о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работ

Участник аккуратно заполняет титульный лист «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рванные (надорванные) листы.

Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

_____ (подпись участника олимпиады)

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады обязан:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады запрещается:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполняющуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий.

ШИФР КГ74/М - 11/29
(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
20	16	12	8 0	56

16 Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать!

№11.1

$$2 \cos^4 x - \sin^3 x = 1$$

$$2 (\cos^2 x)^2 - \sin^3 x = 1$$

$$2 (1 - \sin^2 x)^2 - \sin^3 x - 1 = 0$$

$$2 (\sin^4 x - 2 \sin^2 x + 1) - \sin^3 x - 1 = 0$$

$$2 \sin^4 x - \sin^3 x - 4 \sin^2 x + 1 = 0$$

замена
 $\sin x = t$; $|t| \leq 1$

$$2t^4 - t^3 - 4t^2 + 1 = 0$$

$$(t+1)(2t^3 - 3t^2 - t + 1) = 0$$

$$(t+1)(t - \frac{1}{2})(2t^2 - 2t - 2) = 0$$

$$(t+1)(t - \frac{1}{2})(t^2 - t - 1) = 0$$

$$\begin{cases} t^2 - t - 1 = 0 \\ t = -1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} t = \frac{+1 \pm \sqrt{5}}{2} \\ t = -1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

т.к. $|t| \leq 1$, то удов.

след. корни:

$$t = -1; \frac{1}{2}; \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi - \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

ответ.

1	2	3	4	5
+	+	+	-	0
20	16	20	5	0

$$\boxed{\Sigma = 61}$$

№ 4

а) $x > 0$:

$$x^{6x} = \frac{1}{9} = 3^{-2}$$

логарифмируем обе части по основанию 3:

$$(\log_3 x) \cdot 6x = -2$$

т.к. $x > 0$, то $\log_3 x < 0 \Leftrightarrow x < 1$

тогда $x \in (0; 1)$. Заметим, что $x = \frac{1}{3}$ - корень.

$y = x^{6x}$ - имеет точку минимума *откуда появилась т. мин без* *и я иррациональн* *Почему?* *исс-л* *ф-ии*

$x \in (0; 1)$:

$$y\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}; y\left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{6}{5}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{5}}; y\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

$$y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}; y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}; y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \frac{1}{27\sqrt[3]{3}}$$

имеем на $x \in (\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$ очевидно, что это точка

$x = \frac{1}{3}$. Это есть, 1 положительный корень.

б) Допустим, что есть. Тогда $x^{6x} = \frac{1}{9} > 0$,

значит, $6x$ - четная степень. При этом все,

что $x > -1$, т.к. если взять, допустим, -2, то

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-12} = \frac{1}{2^{12}} \neq \frac{1}{9} \quad y \neq \frac{1}{9} \quad y = x^{6x} \text{ - добавает при } x < -1$$

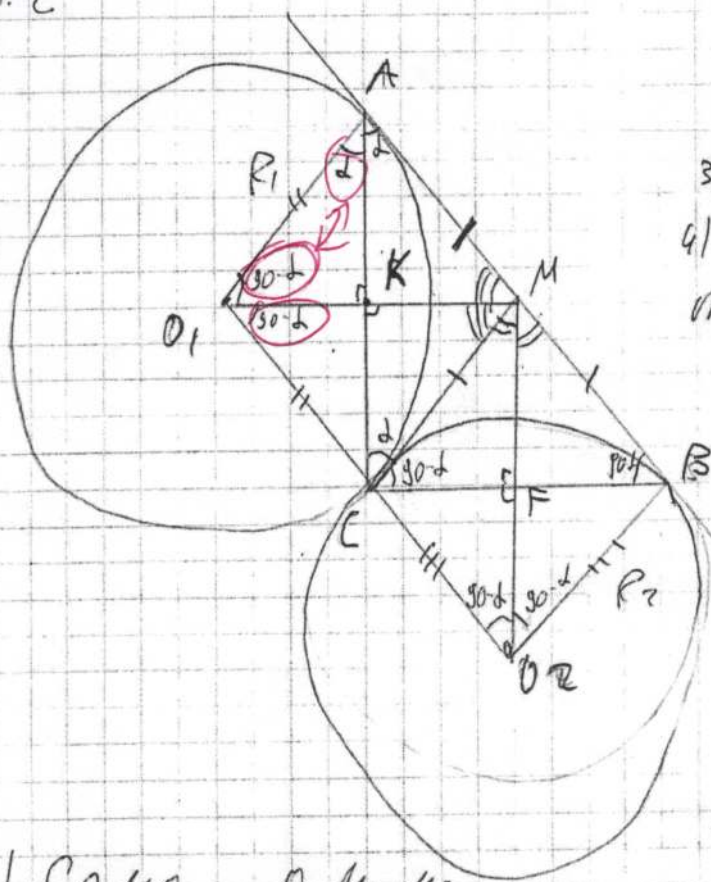
$$\left(-2\right)^{-12} < \frac{1}{9} \Rightarrow \text{нельзя быть четная степень} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 = 2 \cdot 3 \cdot 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}; -1. \text{ Среди этих чисел}$$

нет решений \Rightarrow нет. *Почему?*

Ответ: а) 1; б) нет.

11.2


$$2) \Delta AMC - p|\delta| = \sum AC(M) = X$$

3) $\angle ABC = 90^\circ - d = \angle MCB$

4) т.к. $MC = MB = MA \Rightarrow$ максимальное количество $\Rightarrow CO_2$

$$MO_1 - \text{Suc. cas} (\Rightarrow)$$
$$\angle D_1MO_2 = 90^\circ$$

- мамма Δ O_2CB_4

 $\Delta O_1AC - \mu \text{ (D)}$

П.К. их изобразит.

розданы окр.

• MO_2 и O_1M - $\text{Sun-}\angle A \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle O_1KA = \angle CFO_2 = 90^\circ$
 (в обоих \triangle).

5/ $SO_4O_2 \cdot O_4M \cdot MO_2$

откуда концы?

$$K_M = R_1 \sin \theta \quad \text{Eqd}$$
$$61 \text{ f } 61 \text{ Hz } F = R_2 \sin \alpha$$
$$MF = R_2 \cos L \sin \delta$$
$$7/ \text{So, Mo}_2 \frac{1}{2} (R_1 R_2 \cos^2 \sin^2 + R_1 R_2 \frac{\sin^3}{\cos^2} + R_1 R_2 \frac{\cos^2}{\sin^2})$$
$$= \frac{1}{2} R_1 R_2 (\sin^4 \alpha + 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \cos^4 \alpha) = R_1 R_2 \frac{2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha \sin \alpha}$$

8/ $\int_{ABC} = \frac{AC \cdot CB}{\cos \theta \sin \theta}$; $AC = r_1 \sin \theta$; $BC = r_2 \cos \theta$

$$b) \frac{S_{ABC}}{S_{0,402}} = \frac{4 R_1 R_2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{R_1 R_2} = 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \sin^2 2\alpha$$

Comp: $\sin^2 2\alpha$

XII. 3

$$ax^4 + bx - c = 0$$

$$a, b, c > 0$$

$$x^4 + \frac{b}{a}x - \frac{c}{a} = 0$$

Заменим м.ч. Виета переименуем:

$$x^4 - x^3(a+b+c+d) + x^2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) - x(abc+bcd+acd+abd) + abcd = 0$$

Здесь a, b, c, d — нули уравнения с коэффициентами из гипотезы. Пусть $abcd$ из м.ч. Виета $= x_1 x_2 x_3 x_4$.

Получим:

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = -(x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_4 + x_2 x_3 x_4) \\ -\frac{c}{a} = abcd = x_1 x_2 x_3 x_4 \end{cases} \Rightarrow \text{произведение корней отрицательно, т.к. } c, a > 0.$$

$$x(a+b+c+d) = ab+ac+ad+bc+bd+cd$$

$$x(x_1+x_2+x_3+x_4) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4$$

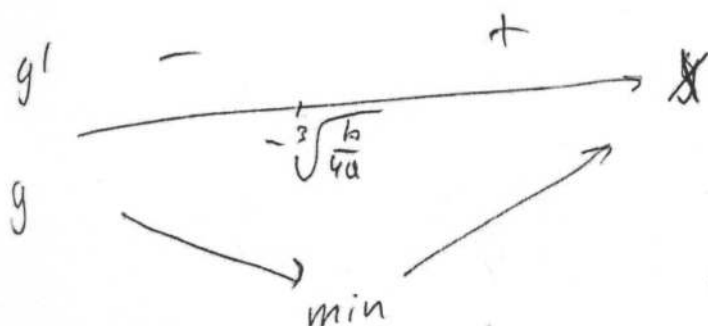
Один корень $x = \frac{x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}$

~~на концах не анализируются~~

XII. 3.

имеем ф-лу $F(x) = ax^4 + bx - c$

$$F'(x) = 4ax^3 + b = 0; \quad x = -\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$$



Это есть, ф-ла имеет минимум в точке $-\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$

$$F(-1) = a - (b + c)$$

Кли этому $b + c > a$ пош. в ф. А

$$\Rightarrow F(-1) < 0; \quad F(100) > 0 \Rightarrow \text{ф-ла имеет 2 корня.}$$

$$\begin{cases} F(-100) > 0 \\ F(-1) < 0 \\ F(0) < 0 \\ F(100) > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{на промежутке } (-100; 0) \text{ есть корень и на промежутке } (0; 100) \text{ есть корень} \Rightarrow \text{два корня}$$

15.04/14-11/29

№11 3 продолжение

$$\left. \begin{array}{l} f(-100) > 0 \\ f(-1) < 0 \\ f(0) < 0 \\ f(100) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{от } (-100; 0) \text{ есть корень } < 0 \\ \text{от } (0; 100) \text{ есть корень } > 0 \end{array}$$

• ~~найти~~ $f(-2) = 18 \neq 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) < 0 \\ f(1) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{положим корень по среднему} \\ \text{меньше отрицательного,} \\ \text{так как левый корень } < 1, \\ \text{а отриц. по среднему } > 1, \text{ т.к.} \\ \text{на промежутке } (0; 1) \text{ есть } + \\ \text{корень, а на промежутке } (-1; 0) \text{ нет} \\ \text{корня, он меньше } 1, \text{ но по сред.} \\ \text{функции является положительным.} \end{array}$$