



ШИФР

ak-5

(заполняется представителем Оргкомитета)

## Письменная работа

### Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике

(наименование общеобразовательного предмета)

Дата проведения 19.01.2025

ФИО участника (полностью)

Исхаимов Андрей Владимирович

Дата рождения

Класс 11Школа № 10

район

город Красноярск

**Особые отметки** (Заполняется представителем оргкомитета)  
о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

дон. чистовик

предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

#### Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы.

Нельзя делать исправления карандашом.

**Внимание!** Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады)

#### Правила поведения

Участник очного тура олимпиады **обязан**:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

**Внимание.** Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады **запрещается**:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

**Внимание.** За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполнявшуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий.

Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по



Фамилию, имя, отчество не писать! Лист не подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№11.1

Лист 1

$$2\cos^4 x - \sin^3 x = 1,$$

$$2\cos^4 x - 2 = \sin^3 x - 1,$$

$$\cos^4 x - 1 = \frac{\sin^3 x - 1}{2},$$

$$(\cos^2 x - 1)(\cos^2 x + 1) = \frac{\sin^3 x - 1}{2},$$

$$-\sin^2 x (2 - \sin^2 x) = \frac{\sin^3 x - 1}{2},$$

Пусть  $\sin x = t$ , тогда

$$-t^2(2 - t^2) = \frac{t^3 - 1}{2},$$

$$-4t^2 + 2t^4 = t^3 - 1,$$

$$2t^4 - t^3 - 4t^2 + 1 = 0,$$

$$(t+1)(2t^3 - 3t^2 - t + 1) = 0, \Leftrightarrow$$

$$t = -1, \Rightarrow \sin x = -1, \Rightarrow x = 2\pi k - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$2t^3 - 3t^2 - t + 1 = 0$$

совокупность

Рассмотрим  $f(t) = 2t^3 - 3t^2 - t + 1$  на  $[-1; 1]$ , т.к.

$$t = \sin x \in [-1; 1].$$

$$f'(t) = 6t^2 - 6t - 1, \quad f'(t) = 0, \Rightarrow 6t^2 - 6t - 1 = 0,$$

$$t_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{6} > \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{9}}{6} = 1$$

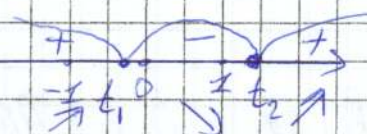
$$t_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{6} < \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{9}}{6} = 0$$

$$t_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{6} > \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{16}}{6} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{6} > -1, \Rightarrow$$

$$D = 36 + 24 = 60 > 0, \Rightarrow$$

$$t_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{60}}{12} = \frac{1 \pm \sqrt{15}}{2}$$

(+)

5(4)   $\Rightarrow$  максимум на промежутке =  
максимум из  $f(-1), f(1), f(t_1)$   
 $f(-1) = -2 - 3 + 1 + 1 = -3, f(1) = 2 - 3 - 1 + 1 = -1,$

$\Sigma = 60$

1	2	3	4	5
7	4	4	4	0
8	20	20	12	0

лучше



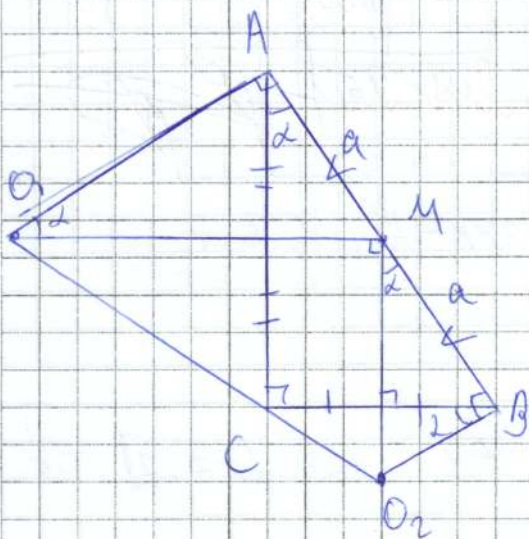
$$\begin{aligned}
 f(t_1) &= f\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{6}\right) = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{6}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{6}\right) + 1 \\
 &= 2\left(\frac{1}{8} - \frac{3\sqrt{15}}{24} + \frac{3 \cdot 15}{2 \cdot 36} - \frac{15\sqrt{15}}{216}\right) - 3\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{15}}{6} + \frac{15}{36}\right) + \\
 &\quad \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{6} = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{15}{12} - \frac{5\sqrt{15}}{36} - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{15}}{2} - \frac{15}{12} + \frac{1}{2} \\
 &\quad + \frac{\sqrt{15}}{6} = \sqrt{15}\left(-\frac{1}{4} - \frac{5}{36} + \frac{1}{6}\right) = \sqrt{15}\left(\frac{-9-5+6}{36}\right) = \\
 &= \frac{-8\sqrt{15}}{36} = -\frac{4\sqrt{15}}{36} < 0, \Rightarrow \neq 0, \Rightarrow \text{не максимум}
 \end{aligned}$$

$f(t)$  на  $[-1; 1] < 0, \Rightarrow$  корней на  $[-1; 1]$  нет,

Ответ:  $x = 2\pi k - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

Найден только  
целый корень  $\theta = -1$   
и состав  
серии  
корней

11.2



Дано:  $\triangle ABC, \angle C = 90^\circ$ ,

окр. проходящая через  
A, C с центром  $O_1$ ,

окр. проходящая через  
B, C с центром  $O_2$ ,  
M - сср AB.

Найти:  $\frac{S_{\triangle O_1 M O_2}}{S_{\triangle ABC}}$ .

1. Т.к. окр. проходит через A и C,  $\Rightarrow O_1 \in$  середину к  
AC,  $\Rightarrow O_1$  лежит на ср. линии парал. BC. Аналогично  
 $O_2$  лежит на ср. линии парал. AC,  $\Rightarrow$  т.к. M лежит  
на обеих ср. линиях, то  $\angle O_1 M O_2 = \angle ACB = 90^\circ, \Rightarrow$

$$S_{\triangle O_1 M O_2} = \frac{1}{2} O_1 M \cdot O_2 M.$$

2. Т.к. окр. касаются AB, то  $O_1 A \perp AB$  и  $O_2 B \perp AB$ ,

$\Rightarrow \angle O_1 A C = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle O_1 M = \alpha$ . Т.к.  $AC \parallel M O_2$ , то  $\angle O_2 M B = \alpha$ ,



Фамилию, имя, отчество не писать! Лист не подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{AM}{OM} \\ \cos \alpha = \frac{MB}{MO_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MO_1 = \frac{AM}{\sin \alpha} \\ MO_2 = \frac{BM}{\cos \alpha} \end{cases}$$

Лист 3

3. Пусть  $AM = MB = a$ , тогда  $MO_1 = \frac{a}{\sin \alpha}$ ,  $MO_2 = \frac{a}{\cos \alpha}$ ,  
 $\sin \alpha = \frac{BC}{AB}$ ,  $BC = AB \sin \alpha = 2a \sin \alpha$ ,  $\cos \alpha = \frac{AC}{AB}$ ,  $\Rightarrow$

$$AC = AB \cos \alpha = 2a \cos \alpha$$

$$S'_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC = 2a^2 \sin \alpha \cos \alpha = a^2 \sin 2\alpha$$

$$S'_{DO_1MO_2} = \frac{1}{2} OM \cdot MO_2 = \frac{1}{2} \frac{a^2}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{a^2}{\sin 2\alpha}, \Rightarrow$$

$$\frac{S'_{DO_1MO_2}}{S'_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{a^2}{\sin 2\alpha}}{a^2 \sin 2\alpha} = \frac{1}{\sin^2 2\alpha}$$

Ответ:  $\frac{1}{\sin^2 2\alpha}$

+

~ II.3

1) Рассмотрим ф.  $f(x) = ax^4 + bx - c$ .

$f'(x) = 4ax^3 + b$  - т.к.  $a, b > 0$ , то  $f'(x) \uparrow$  на  $\mathbb{R}$ ,  $\Rightarrow$  существует  $x_0$ , такой что  $f'(x_0) = 0$ ,  $\Rightarrow$  т.к.

$f(x) \uparrow$  при стремлении к  $+\infty$ , то  $x_0$  - точка минимума. Заметим, что  $f(1) = a + b$ ,  $f(0) = -c < 0$ ,  $\Rightarrow f(x_0) < f(0) < 0$ ,  $\Rightarrow$  на  $[-\infty; x_0]$   $f \downarrow$  и

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ,  $\Rightarrow$  существует  $a \in (-\infty; x_0]$ , такая, что  $f(a) = 0$  (по непрерывности  $f(x)$ ). Аналогично,  $f \uparrow$  на  $[x_0; +\infty)$ ,  $\Rightarrow$  существует  $b_0: f(b_0) = 0, b_0 \in [x_0; +\infty)$  и они единственные корни т.к.  $f$  монотонна на



рассматриваемых промежутках.

Лист 4

2) Заметим, что при  $x > 0$ ,  $f'(x) = 4ax^3 + b > 0$ ,  
 $\Rightarrow$  т.к.  $f(0) < 0$ , то  $b_0 > 0$ , а т.к.  $b_0$  единственный  
на  $[x_0; +\infty)$ , то  $a_0 < 0$ .

т.к.  $f(x)$  на  $[0; +\infty)$ , то для  $\forall x \in (0; 1)$   
верно, что  $f(x) < f(1)$

3)  $f(0) = -c < 0$ ,  $f(1) = a + b - c > 0$  (неравенство),  
 $\Rightarrow b_0 < 1$ .

$f(-1) = a - b - c < 0$ , т.к. (пер. Д),  $\Rightarrow$  т.к.  $f \downarrow$   
на  $[-\infty; x_0]$ , то  $a_0 < -1$ ,  $\Rightarrow |a_0| > |b_0|$ , ч.г.д.  
Уточнение:

Если  $x_0 < -1$ , то  $a_0 < -1$ , т.к.  $f \downarrow$ ,  $\Rightarrow$   
т.к.  $f(a_0) > f(x_0)$ ,  $a_0 < x_0 < -1$ .

Если  $x_0 > -1$ , то  $f(a_0) > f(-1)$ ,  $\Rightarrow a_0 < -1$ .  
Добавим, что  $f(x_0) < f(0)$ ,  $\Rightarrow x_0 < 0$ .

✓ 11.4

$9x^{6x} = 1$ , Пусть  $t = x^x$ , тогда  $9t^6 = 1$ ,  $t^6 = \frac{1}{9}$ .

Пусть  $t = c$ , тогда  $t^6 = c^6$ ,  $t^6 - c^6 = 0$ ,

$$\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \quad (t^3 - c^3)(t^3 + c^3) = 0,$$

$$(t - c)(t + c)(t^2 - tc + c^2)(t^2 + tc + c^2) = 0$$

$$t^2 \pm tc + c^2 = \left(t \pm \frac{c}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}c^2 > 0 \text{ на } \Rightarrow \text{ур. } \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} t - c = 0, & t = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \\ t + c = 0 & t = -\sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \end{cases} \begin{cases} x^x = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \\ x^x = -\sqrt[3]{\frac{1}{3}}. \end{cases}$$

а) Рассмотрим  $f(x) = x^x$  на  $[0; +\infty]$ ,

$$f'(x) = x^x \ln x. \text{ Для } x \in (0; 1) \ln x < 0,$$

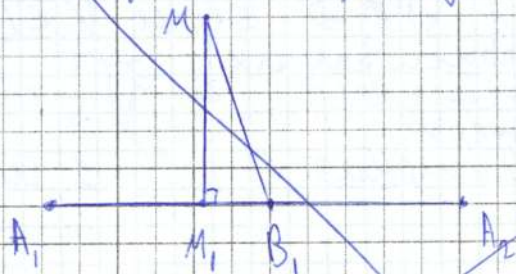
При  $x \in (0; 1) \ln x < 0, \Rightarrow f'(x) < 0, \Rightarrow f(x) \downarrow$  на  $[0; 1]$



№11.5

Лист 5

Рассмотрим 3 посыл. стороны  
Рассмотрим сторону:



Пусть  $B_1$  - середина  $A_1A_2$ ,  
тогда

$$\begin{cases} A_1M^2 - A_2M^2 = MM_1^2 \\ A_2M^2 - MB_1^2 = B_1M_1^2 = MM_1^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A_1M^2 - A_2M^2 = MB_1^2 - B_1M_1^2 = MB_1^2 - (A_1B_1 - A_1M_1)^2 =$$

$$= MB_1^2 - \frac{A_1A_2^2}{4} + A_1M_1A_1A_2 - A_1M_1^2, \Rightarrow A_1M^2 = MB_1^2 - \frac{A_1A_2^2}{4} + A_1M_1A_1A_2 - 4A_1M_1^2$$

$$4(A_1M_1^2 + \dots + A_nM_n^2) = A_1A_2^2 + \dots + A_nA_1^2,$$

$$\sum_{i=1}^n A_iM_i^2 + \sum_{i=1}^n MM_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{A_iA_{i+1}}{2}\right)^2 + \sum_{i=1}^n MM_i^2,$$

$$\sum_{i=1}^n A_iM_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{A_iA_{i+1}}{2}\right)^2 + \sum_{i=1}^n MM_i^2,$$

по формуле длины медианы  $m^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - a^2$ ,  
где  $b, c$  - стороны,  $a$  - половина противоположной,  
 $\Rightarrow \sum_{i=1}^n A_iM_i^2 - \sum_{i=1}^n \left(\frac{A_iA_{i+1}}{2}\right)^2 = \sum_{i=1}^n MB_i^2$ , где  $B_i$  - середины

и  $A_i$  соотв. стороны.



Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

При  $x > 1$ ,  $f'(x) > 0$ ,  $\Rightarrow f(x) \nearrow \Rightarrow$  Если  $K \in (0; 1)$   
то  $f(x) = K$  имеет <sup>положительных</sup> 2 решения, а  $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} \in (0; 1)$ ,  
 $\Rightarrow f(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$  имеет <sup>полож.</sup> 2 решения,  $\Rightarrow 2x^{6x} = 1$  имеет  
2 полож. решения

б) ~~в)  $x$~~  Если  $x < 0$ , то, насколько я понимаю,  
 $(6x) \in \mathbb{Z}$ , а раз отриц. число в какой-то  
степени  ~~$6x$~~   $> 0$ , то степень чётная,  $\Rightarrow x$  не  
положительное число,  $\Rightarrow (3x) \in \mathbb{Z}$ ,  $\Rightarrow$  пусть  $x = -t$ , где  $t > 0$ ,  
тогда  $2x^{6x} = 1$  как мы выяснили  $x^{6x} > 0$ ,  $\Rightarrow$   
 ~~$x^{6x}$~~  тогда  $\begin{cases} (-t)^{(-t)} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \\ (-t)^{-t} = -\sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{(-t)^t} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \\ \frac{1}{(-t)^t} = -\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \end{cases}$

т.к.  ~~$x$~~  учитывая знаки:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{t^t}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad t - \text{чётное}$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{t^t}} = -\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad t - \text{нечётное}$$

$$t^t \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = 1, \quad t^t = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}} > 1 \text{ на } (0; +\infty) \text{ а такое}$$

уравнение имеет ед. решение,  $\Rightarrow$  есть единствен-  
ное отрицательное решение.

нужно с  
этим числ

$\Rightarrow$  нужно решить

нужно