



ШИФР

а К - 2

(заполняется представителем Оргкомитета)

## Письменная работа

### Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике

(наименование общеобразовательного предмета)

Дата проведения 19.01.2025

ФИО участника (полностью)

Бекк Андрей Александрович

Дата рождения

Класс

11

Школа №

152

район

советский

город

Красноярск

**Особые отметки** (Заполняется представителем оргкомитета)  
о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

дон. листов, + 1, + 1

предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

#### Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы.

Нельзя делать исправления карандашом.

**Внимание!** Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады)

#### Правила поведения

Участник очного тура олимпиады обязан:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

**Внимание.** Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады запрещается:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

**Внимание.** За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполняющуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий.



Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№ 11.1

1	2	3	4	5
+	+	+	-	0
18	20	20	4	0

$$2\cos^4 x - \sin^3 x = 1;$$

$$2\cos^4 x - \sin^3 x = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$2\cos^4 x - \cos^2 x - \sin^3 x - \sin^2 x = 0;$$

$$\cos^2 x (2\cos^2 x - 1) - \sin^2 x (\sin x + 1) = 0$$

$$(1 - \sin^2 x) \cdot (1 - 2\sin^2 x) - \sin^2 x (\sin x + 1) = 0$$

Замечаем:  $\sin x = t$ ;  $t \in [-1; 1]$

$$(1 - t^2)(1 - 2t^2) - t^2(t + 1) = 0;$$

$$(1 - t)(t + 1)(1 - 2t^2) - t^2(t + 1) = 0;$$

$$(t + 1)((1 - t)(1 - 2t^2) - t^2) = 0;$$

$$\begin{cases} t + 1 = 0; & t = -1, \text{ не подходит.} \\ (1 - t)(1 - 2t^2) - t^2 = 0 & \text{(II)} \end{cases}$$

$$\text{(II): } 1 - 2t^2 - t + 2t^3 - t^2 = 0;$$

$$2t^3 - 3t^2 - t + 1 = 0; \text{ (Замечаем, что } t = \frac{1}{2} \text{ - решение.)}$$

$$(t - \frac{1}{2})(2t^2 - 2t - 2) = 0;$$

$$\begin{cases} t - \frac{1}{2} = 0; & t = \frac{1}{2} \text{ - подходит, (1)} \\ 2t^2 - 2t - 2 = 0; & t^2 - t - 1 = 0; \end{cases}$$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; \text{ (2)}$$

Замечаем (2): 1.  $t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$  - не подходит!

2.  $t = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} \approx -0.618$  - подходит.  $t \in [-1; 1]$  - подходит.



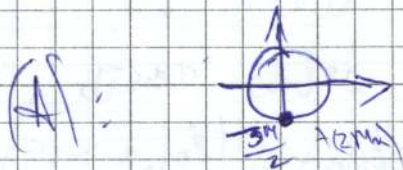
Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

→

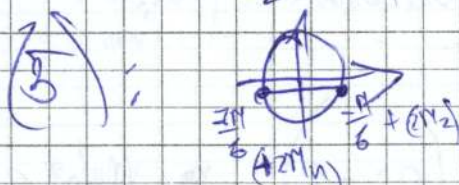
(действительно,  $t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  — отриц., веро  $\frac{\sqrt{5}}{2} \in (1, 1.5)$   
 $\Rightarrow t \in [-1, 1]$   $t \in (-\frac{1}{2}, 1)$

Тогда используя I и II случаи.

$t = -1$	обратный	$\sin x = -1$ (A)
$t = \frac{1}{2}$	замана;	$\sin x = \frac{1}{2}$ (B)
$t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$		$\sin x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (B)



$$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi z, z \in \mathbb{Z}$$

(B):  $x = \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$

Ответ;  $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi z, z \in \mathbb{Z}$$

$$x = \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

Пропущена серия

π-серия ( )



III.4

$$3 \cdot x^{6x} = 1;$$

~~Заметим, что при  $x \leq 0$  нет решений,~~

~~ведь отрицательное число в отрицательной степени всегда отрицательно,~~

~~т.е.  $\frac{1}{n} (n \leq 0, n \neq 0) \Rightarrow \frac{1}{n} = \frac{1}{m}$~~

а) При  $x > 0$ :

$$x^{6x} = \frac{1}{3}; \quad 6x = \log_x 3^{-2}; \quad -3x = \log_x 3$$

т.к.  $x \neq 1$ ;  
не корень.

При  $x > 1$  решение нет, т.к. левая часть отрицательна, а правая положительна ( $\log_x 3 > 0$  при  $x > 1$ )

Рассмотрим  $x \in (0; 1)$ ;

Если  $x \in (0; \frac{1}{3})$ , то л.ч.  $\in (0; -1)$ , а правая  $\in (-1; 0)$  т.к. при  $x$  близком к 0 значение

$\log_x 3$  стремится к  $-\infty$ ; при увеличении  $x$  до  $\frac{1}{3}$  приближается к  $-1$ . Это видно, например, из графика. Если же  $x \in (\frac{1}{3}; 1)$ , то л.ч.  $\in (-3; -1)$ , а п.ч. будет  $\in (-1; 0)$ ;

$\rightarrow$  приближая  $x$  к 1, значение л.ч. увеличивается, стремится к  $-\infty$ . Теперь заметим, что граничная точка

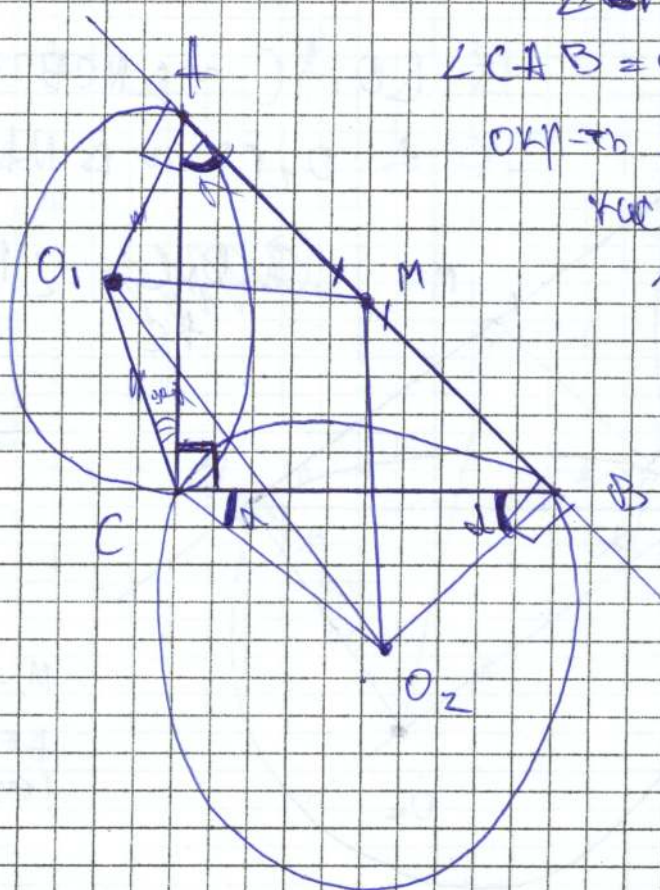
одна точка:  $x = \frac{1}{3}$ , в ней л.ч. = п.ч. =  $-1$   
единственная возможная



Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

Поставим образцы, при  $x > 0$  — 1 решение,  
( $x = \frac{1}{3}$ ) проверка;  $9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{6 \cdot \frac{1}{3}} = 1$ ; Искрива! 2 корня  
 $9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$ ;  $\frac{9}{9} = 1$  — подходит,  $\Rightarrow$  1  
(продолжение пункта на стр. 10)

№ 11.2



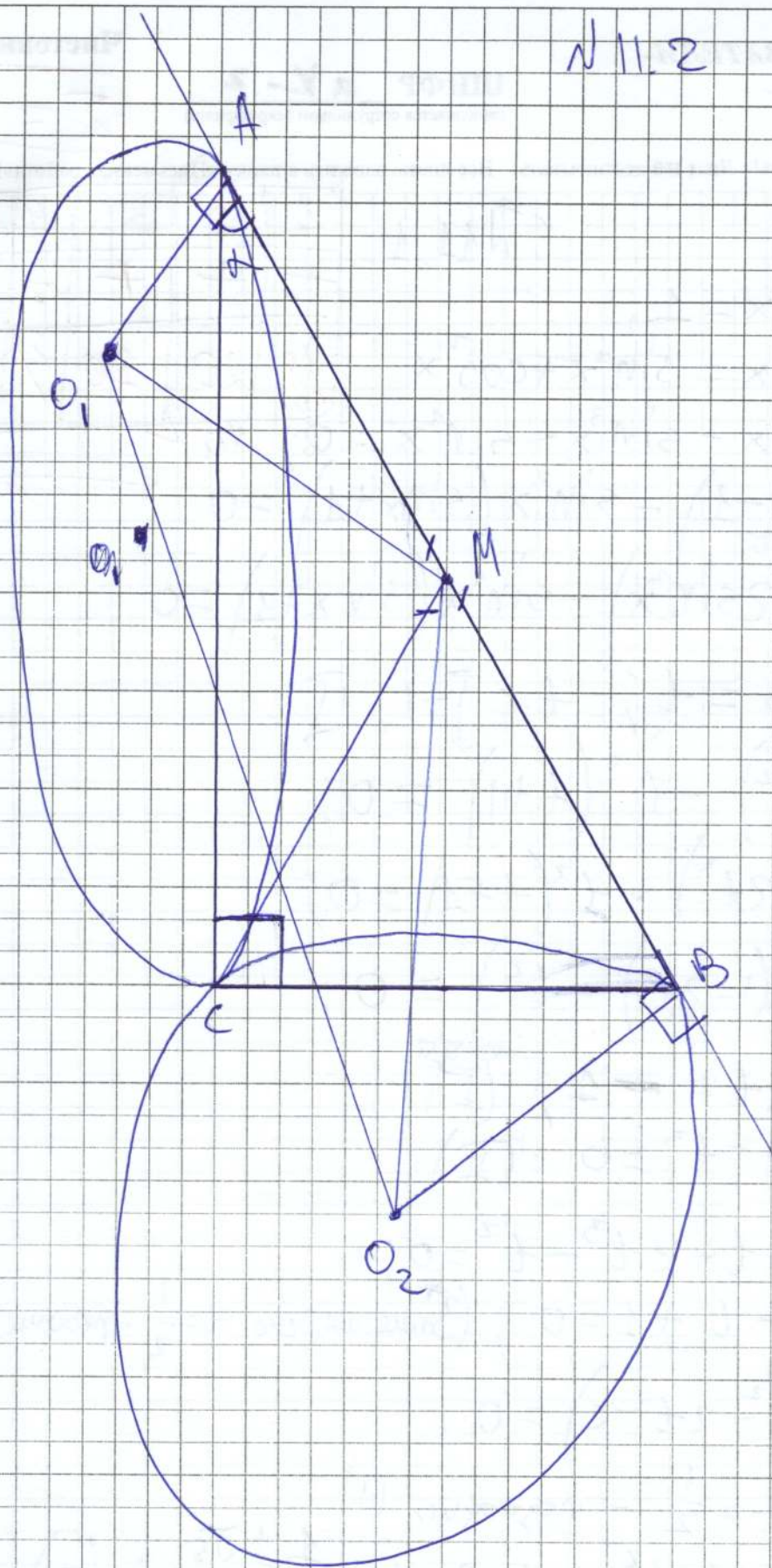
~~Окружность~~  
 $\angle CAB = \alpha$ ;  $\angle ABC = 90^\circ - \alpha$   
Окружность с центром  $O_1$   
касается  $AB$  и проходит  
через  $A \Rightarrow$   
 $O_1A$  — радиус  
он  $\perp$  кас

$\Rightarrow O_1A \perp AB \Rightarrow \angle O_1AB = 90^\circ \Rightarrow \angle O_1AC = 90^\circ - \alpha$ ;

Аналогично ~~с окружностью~~ с центром  $O_2$  —  $O_2B$  — радиус  
 $\Rightarrow O_2B \perp AB \Rightarrow \angle CBO_2 = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$   
( $\angle ABO_2 = \angle ABC$ )



N 11.2





$\triangle CO_1A$  - равноб. т.к. стороны - радиусы  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle O_1AC = \angle O_1CA = 90^\circ - \alpha$

Аналогично в  $\triangle O_2CB$ :  $\angle O_2BC = \angle O_2CB = \alpha$

Посмотрим на  $\angle O_2CO_1$ ; он равен:

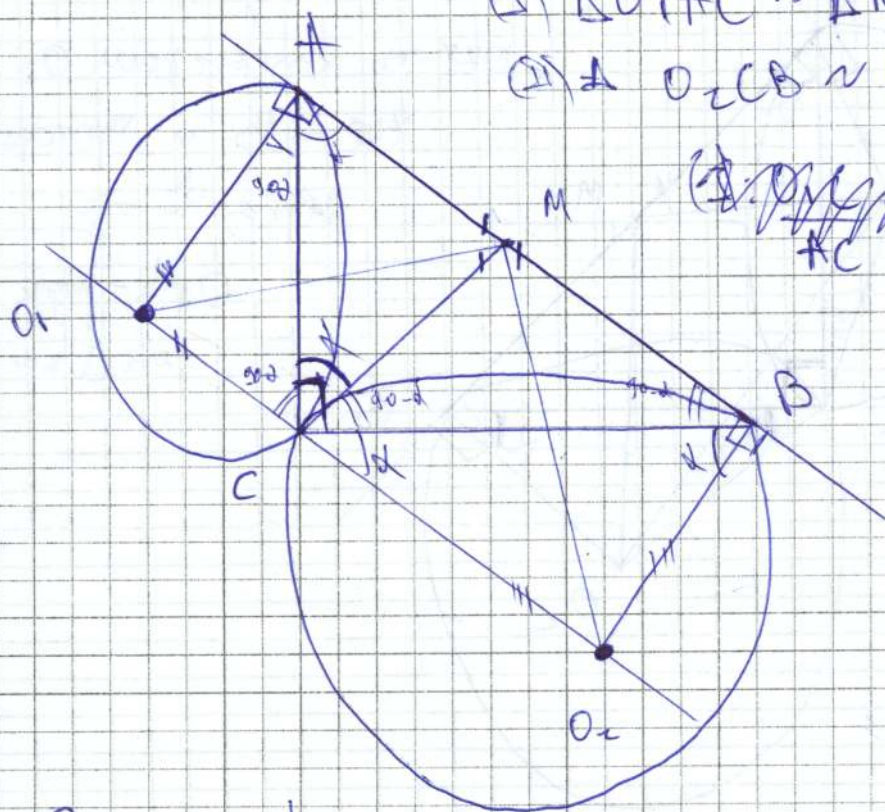
$$\angle O_2CB + \angle ACB + \angle O_1CA = 90^\circ - \alpha + 90^\circ + \alpha = 180^\circ$$

Он развернутый  $\Rightarrow O_1CO_2$  - прямая

C - одна точка окруж-тей  $\Rightarrow$  касательная.

(I)  $\triangle O_1AC \sim \triangle MCB$  по двум углам

(II)  $\triangle O_2CB \sim \triangle MAC$  по двум углам



~~(I)  $\triangle O_1AC \sim \triangle MCB$~~   $\angle MCO_2 =$   
 $= 90^\circ - \alpha + \alpha = 90^\circ$   
 $\Rightarrow MC \perp O_1O_2$

т.е. MC - бисс.

в  $\triangle O_1MO_2$

M - сеп AB  $\Rightarrow$

$$AM = MB = MC$$

(радиусы ок. окруж-тей) ?  $\angle C$  - угол наклона

$O_1O_2$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC, \quad S_{\triangle O_1MO_2} = MC (O_1C + O_2C) \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{2} AB \cdot (O_1C + O_2C) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} O_1C \cdot AB + \frac{1}{4} O_2C \cdot AB$$

$$(II) \Rightarrow \frac{O_2C}{BC} = \frac{MC}{AC} \quad O_2C \cdot AC = \frac{1}{2} AB \cdot BC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow O_2C = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot BC}{AC}$$



Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

$$\begin{aligned} (I) \Rightarrow \frac{O_1C}{AC} &= \frac{MC}{BC} \quad \xrightarrow{\cdot \frac{1}{2}AB} \quad O_1C \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot AC; \\ O_1C &= \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AC}{BC}; \quad \text{Перенесём в площадь:} \\ S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}AC \cdot BC; \quad S_{\triangle O_1MO_2} = MC \cdot O_1O_2 \cdot \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{2}AB \cdot \frac{1}{2} \cdot (O_1C + O_2C) = \frac{AB}{4} \left( \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AC}{BC} + \frac{\frac{1}{2}AB \cdot BC}{AC} \right) = \\ &= \frac{AB}{4} \left( \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AC^2}{AC \cdot BC} + \frac{\frac{1}{2}AB \cdot BC^2}{AC \cdot BC} \right) = \frac{AB^2}{4} \frac{(AC^2 + BC^2)}{AC \cdot BC} \quad \text{по теореме Пифагора } AC^2 + BC^2 = AB^2 \end{aligned}$$

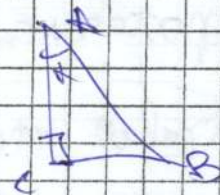
$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} : S_{\triangle O_1MO_2} &= \left( \frac{\frac{1}{2}AB \cdot BC}{2} \right) \cdot \frac{AC \cdot BC}{AB^2 \cdot \frac{1}{4}} = \\ &= \frac{4AC^2 \cdot BC^2}{AB^4} = \left( \frac{2AC \cdot BC}{AB^2} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в } \triangle ABC: \quad AC &= AB \cdot \cos \alpha; \\ BC &= AB \cdot \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow S_{\triangle ABC} : S_{\triangle O_1MO_2} &= \left( \frac{2 \cdot AB \cdot \cos \alpha \cdot AB \cdot \sin \alpha}{AB^2} \right)^2 = \\ &= \left( \frac{\sin 2\alpha \cdot AB^2}{AB^2} \right)^2 = \sin^2 2\alpha \end{aligned}$$

Ответ:  $\sin^2 2\alpha$

+





11.3

$$ax^3 + bx = c, \quad a, b, c - \text{сторонам треугольника}$$

$$a, b, c > 0$$



Выразим стороны 2/3 отпр. кас. к числ. окр-ти;

$$\begin{cases} a = x + y \\ b = x + z \\ c = y + z \end{cases}$$

Получим;

$$(y+z)x^3 + (x+z)x = x+y$$

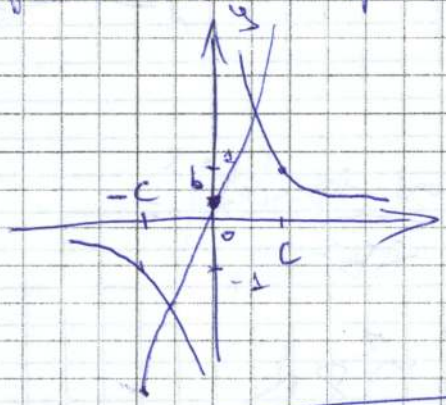
Из н-ва треугольника;

$$\begin{cases} a+b > c \\ a+c > b \\ b+c > a \end{cases}$$

$$x(ax^3 + b) = c, \quad ax^3 + b = \frac{c}{x} \quad - \quad x=0 \text{ - не корень (} c=0 \text{ ?! )}$$

Левая часть - ~~линейная~~ кубическая функция (многочлен 3-й степ.)  
проходит через точку  $(0; b)$

Правая часть - гр. гипербола проходит через точку  $(c; 1)$   
и  $(-c; -1)$



$$\text{при } x > 0: \quad f(x) \uparrow \quad g(x) \downarrow \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  если  $b \leq 1$  решений

$$\text{при } x > 0: \quad f(x) \uparrow \quad g(x) \downarrow \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  если  $b > 1$  решений

В более того, решения (пересечения)  
только один,  $f(x)$  возрастает, а  $g(x)$  убывает,  $x$  уходит  
от значения стремившегося к нулю, учитывая, что  $a < b+c$

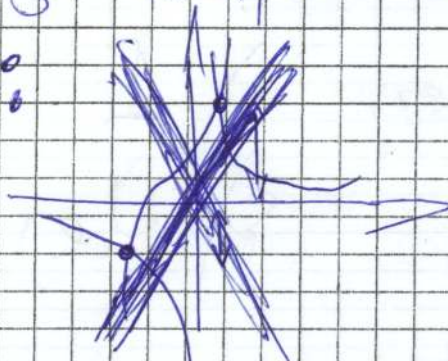


Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

где  $a$  — коэффициент перед  $x^3$ , отвечающий за то, насколько близко к ОУ находится график  $f(x)$ , а  $b$  — то время как  $c$  отвечает за «расширять» интервал, скажем, поэтому пересечение будет. Аналогично при  $x < 0$ ,  $\Leftrightarrow$  имеют 2 корня разных знаков.

Почему  $|f(x)| > |f(y)|$ ?  
Теперь замечаем, что  $b > 0$  — сторона вверх, то  $b > 0$ , а график  $f(x)$  как бы поднят по ОУ на  $b$  вверх;  $g(x)$  симметричен относительно  $(0,0)$ , поэтому сдвинув  $f(x)$  вверх по ОУ, пересечение при  $c$  при  $x > 0$  произойдет быстрее чем

$c$  при  $x < 0$ , т.е.:



Корни  $b/|y_1|$  и  $b/|y_2|$

где  $b > 0$ ; поэтому  $|y_1| > |y_2|$

и, з.к.  $f(x)$  монотонно  $\nearrow$  то и

$$|x_1| > |x_2| ; a|x_1|^3 + b > a|x_2|^3 + b$$

$$\Rightarrow |x_1| > |x_2|, \text{ з.т.д.}$$



III.4  
про гомоморфизм; пункт 5  
 $a \cdot x^{6x} = 1$  при  $x < 0$ ;  $x^{6x} = \frac{1}{a}$

(Знаю, что так.  $a > 0$ ,  $x^{6x} > 0$  где  $x < 0$ )  
поэтому  $6x$  — четно ~~это верно~~

Пусть  $y = -x$ ,  $y > 0 \Rightarrow$

~~Или~~  $y^{6y} = \frac{1}{a}$ ,  $6y = \log_y \frac{1}{a}$  — применим все в п. а) были бы  
расчетами из пункта (а) и получим, что нет  $x$

$y = \frac{1}{3}$  — ед. р-е, тогда  $x = -\frac{1}{3}$  ед. возможное  
решение. Проверим:  $\left(-\frac{1}{3}\right)^{6 \cdot \frac{1}{3}} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = (-3)^2 = 9$ ,  
 $\neq \frac{1}{9} \Rightarrow$  не подходит. Остат. решений нет.

Ответ: а) 1  
б) Нет