

ШИФР

Q 55

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИПО математике В 11 классе
(наименование общеобразовательного предмета)Фамилия И.О. участника Кочергин Владимир Алексеевич

Дата рождения

Школа № СУНЦ МГУ район ЗАО город Москва**Особые отметки** (Заполняется представителем оргкомитета) о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.+1 чистовикДата проведения 19.01.2025**Правила поведения**Участник очного тура олимпиады **обязан**:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады **запрещается**:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполняющуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному

заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы. Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады)

ШИФР 055
(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+	+	+	+	15
20	20	20	18	0

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

N11.1.

$\Sigma = 78$

$$2\cos^4 x - \sin^3 x = 1$$

$$\frac{(1+\cos 2x)^2}{2} - \sin^3 x = 1$$

$$\frac{1+2\cos 2x+\cos^2 2x}{2} - \sin^3 x = 1$$

$$\frac{1+2-4\sin^2 x+1-4\sin^2 x+4\sin^4 x}{2} - \sin^3 x = 1$$

$$2-4\sin^2 x+2\sin^4 x-\sin^3 x=1$$

$$2\sin^4 x - \sin^3 x - 4\sin^2 x + 1 = 0$$

$$2t^4 - t^3 - 4t^2 + 1 = 0$$

$$t = \frac{1}{2} - \text{корень}$$

$$2t^4 - t^3 - 4t^2 + 1 = (t-1)(t^3 - 2t - 1) = 0$$

$$t^3 - 2t - 1 = 0$$

$$t = -1 - \text{корень}$$

$$t^3 - 2t - 1 = (t+1)(t^2 - t - 1) = 0$$

$$t^2 - t - 1 = 0$$

$$D=5$$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{ т.к. } |t| \leq 1 \Rightarrow$$

$$t = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \text{не подходит}$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin x = t$$

$$t \in [-1; 1]$$

$$\begin{array}{r|l} 2t^4 - t^3 - 4t^2 + 1 & 2t - 1 \\ \hline (2t^4 - t^3) & t^3 - 2t - 1 \\ \hline -4t^2 + 1 & \\ \hline -4t^2 + 2t & \\ \hline -2t + 1 & \\ \hline (-2t + 1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} t^3 - 2t - 1 & t + 1 \\ \hline -(t^3 + t^2) & t^2 - t - 1 \\ \hline -t^2 - 2t - 1 & \\ \hline -(t^2 + t) & \\ \hline -t - 1 & \\ \hline (-t - 1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

N11.1 (прод.)

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = -1 \\ t = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin X = \frac{1}{2} \\ \sin X = -1 \\ \sin X = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$



Объем: $X = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; X = \frac{3\pi}{2} + \pi l, l \in \mathbb{Z};$
 $X = (-1)^k \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

N11.2.

$\angle CAB = 2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle O_1AC = \frac{\pi}{2} - 2$
 $\angle O_1CA$

$\angle MCA = 2$
 \parallel
 $\angle CAB$, м.к.

$CM = AM = MB$

Значит $\angle O_1CM = \frac{\pi}{2}$
 $\angle MCB = \angle MBC = \frac{\pi}{2} - 2$

$\angle O_2BC = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - 2\right) = 2$

Значит $\angle MCO_2 = \frac{\pi}{2}$

$\angle O_2CB$

$\triangle O_1AM = \triangle O_1CM$

м.к. $O_1A = O_1C, AM = MC,$

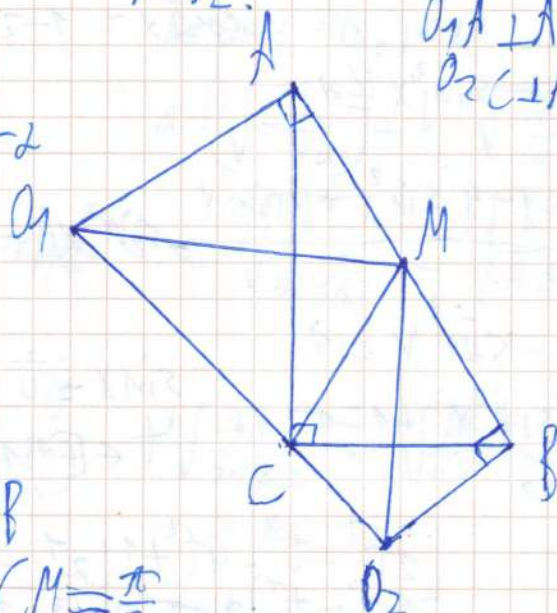
$\angle O_1AM = \angle O_1CM$

Значит $\angle AOM = \angle COM \Rightarrow O_1M$ — биссектриса

$AO_1C \Rightarrow O_1M \perp AC \Rightarrow \angle O_1M = \frac{\pi}{2} - \angle O_1CA = 2$

$O_1A \perp AB$
 $O_2C \perp AB$

м.к.
 радиус в
 точку
 касания
 перпендикулярен
 касательной



$\angle O_1CO_2 = \angle O_1CM + \angle MCO_2 = \pi$
 $\Rightarrow C \in O_1O_2$ ✓

НП.2 (чуг.)
~~Аналогично $\angle O_2 M = \frac{\pi}{2} - 2$~~

~~$\triangle O_2 O_1 M \sim \triangle BAC$ м.к.~~

$$\angle O_1 M O_2 = \angle O_1 M C + \angle C M O_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\angle A M O_1 = \frac{\pi}{2} - \angle C A M = \frac{\pi}{2} - 2 = \angle C M O_1$$

аналогично $\angle C M O_2 = 2 \Rightarrow \angle O_1 M O_2 \sim \triangle A C B$ м.к.

$$\angle O_1 M O_2 = \angle A C B \text{ и } \angle O_2 O_1 M = \angle B A C$$

Значит $\frac{S_{ABC}}{S_{O_1 M O_2}} = \left(\frac{AB}{O_1 O_2} \right)^2$ ✓

$$\triangle O_2 B C \sim \triangle M A C \text{ по двум } \Rightarrow \frac{O_2 C}{M C} = \frac{B C}{A C} = \operatorname{tg} 2$$

$$\triangle O_1 A C \sim \triangle M B C \text{ по двум } \Rightarrow \frac{O_1 C}{M C} = \frac{A C}{B C} = \operatorname{ctg} 2$$

$$O_1 O_2 = O_2 C + O_1 C$$

$$M C = \frac{AB}{2} \quad \checkmark$$

$$\frac{AB}{O_1 O_2} = \frac{AB}{\frac{AB}{2} (\operatorname{tg} 2 + \operatorname{ctg} 2)} = \frac{2}{\operatorname{tg} 2 + \operatorname{ctg} 2}$$

Значит

$$\frac{S_{ABC}}{S_{O_1 M O_2}} = \frac{4}{\operatorname{tg}^2 2 + 2 \operatorname{tg} 2 \operatorname{ctg} 2 + \operatorname{ctg}^2 2} = \frac{4}{\operatorname{tg}^2 2 + \operatorname{ctg}^2 2 + 2}$$

Ответ: $\frac{4}{\operatorname{tg}^2 2 + \operatorname{ctg}^2 2 + 2}$

11.3.

Заметим, что $x < 1$, т.к. $a+b > c$ (т.к. $a > 0$)

т.к. если $x > 1$, то $ax^4 + bx > a+b > c$.

$$f(x) = ax^4 + bx - c \quad a, b, c > 0$$

$$f'(x) = 4ax^3 + b$$

— монотонная
значит у $f(x)$ ед. экстремум в точке $x_0 = \sqrt[3]{-\frac{b}{4a}}$.

т.к. $a > 0$, то график напоминает параболу, "верши" вверх)

т.к. т.к. $f(x_0) < 0$, то у $f(x)$ 2 корня.

Докажем, что

они не могут
быть 1 знака!

пусть x_1, x_2 — корни

$$x_1 > x_2 > 0:$$

$$ax_1^4 + bx_1 = c \quad (1)$$

$$ax_2^4 + bx_2 = c \quad (2)$$

$$(1) - (2):$$

$$a(x_1^4 - x_2^4) + b(x_1 - x_2) = 0$$

т.к. x^4 — мон. возрастает

$$\text{от } [0; +\infty) \Rightarrow a(x_1^4 - x_2^4) > 0, b(x_1 - x_2) > 0 \Rightarrow a(x_1^4 - x_2^4) + b(x_1 - x_2) > 0$$

Поэтому сразу есть полож. корни.

$f(x)$ — возрастает, непрерывна на $[0; +\infty)$, причём

$$f(0) < 0, f(1) > 0 \Rightarrow \text{кайдётся точка в которой}$$

$$f(x) = 0.$$

Значит есть 2 корня и они разных знаков.

$$\text{Почему } f(x_0) < 0:$$

$$a\left(\sqrt[3]{-\frac{b}{4a}}\right)^4 + b\sqrt[3]{-\frac{b}{4a}} - c =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{b^4}{256a}} - \sqrt[3]{\frac{b^4}{4a}} - c < 0$$

$$\sqrt[3]{\frac{b^4}{256a}} < \sqrt[3]{\frac{b^4}{4a}}$$

т.к.

$$\frac{b^4}{256a} < \frac{b^4}{4a}$$

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

нп.3 (прод.)

пусть отриц. корень это x_3
предположим, что $x_3 \in (-1, 0)$.

тогда

$$ax_3^4 + bx_3 = c$$

$$-\frac{c}{x_3} > c \text{ т.к.}$$

$$ax_3^4 = c - bx_3 \quad | \cdot \left(-\frac{1}{x_3}\right)$$

$$x_3 \in (-1, 0)$$

$$-ax_3^3 = b - \frac{c}{x_3}$$

$$-ax_3^3 < a, \text{ т.к. } -x_3^3 < 1$$

$$\text{Значит } b - \frac{c}{x_3} > b + c > a > -ax_3^3.$$

Значит $x_3 < -1$ и $|x_3| > 1$ модуль x_3 больше модуля
полож. корня, т.к. полож. корни меньше 1.

нп.4.
а) $y = x^{6x}$
 $x^{6x} = \frac{1}{y}$

$$(uV)' = u'V + V'u'$$

$$f(x) = x^{6x} - \frac{1}{y}$$

$$f'(x) = (x^{6x})' = (e^{\ln x^{6x}})' = (e^{6x \ln x})' = e^{6x \ln x} \cdot (6x \ln x)' =$$

$$= e^{6x \ln x} \cdot 6 \left(\ln x + x - \frac{1}{x} \right) = e^{6x \ln x} \cdot 6 (\ln x + 1) =$$

$$= e^{\ln x^{6x}} \cdot 6 (\ln x + 1) = 6x^{6x} (\ln x + 1).$$

$$f'(x) = 0: 6x^{6x} (\ln x + 1) = 0$$

$$\text{Значит } \ln x + 1 = 0$$

$$x = \frac{1}{e}. \quad \checkmark$$

$$x^{6x} > 0, \text{ т.к. } e^{\ln x^{6x}} > 0$$

Значит $f(\frac{1}{e})$ — экстремум, причем $f(x)$ — возр
 $f(\frac{1}{e})$ — минимум, т.к. $f(1) > f(\frac{1}{e})$ и $f(\frac{1}{e})$ — ед.
 Экстремум.

✓ Заметим корень $x = \frac{1}{3} \in (0; \frac{1}{e})$ т.к. функция непрерывна
 и корень не является точкой экстремума, а также
 т.к. экстремум единственен \rightarrow найдется еще
 один корень на промежутке $[\frac{1}{e}; +\infty)$, причем т.к.
 что $f(x)$ монотонно стремится к $+\infty$. это следует из того,

$f(x)$ возрастает на этом промежутке, то это
 ед. корень на нем, аналогично, $x = \frac{1}{3}$ — ед. корень
 на промежутке $(0; \frac{1}{e}]$, т.к. $f(x)$ убывает на нем.

Ответ 7 ответ: d) 2

б) отрицательные числа нельзя возводить в нечетную
 степень $\Rightarrow 6x \in \mathbb{Z}$, причем если $6x \neq 2$, то $x^{6x} < 0$,
 то есть такие x не подходят, значит $6x \equiv 2$ и ✓
 $\exists x \in \mathbb{Z}$. Заметим, что $\frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$, т.к. $\forall x \in \mathbb{Z}$, то
 $x = -3^n$, где $n \in \mathbb{Z}$, причем т.к. $\forall x < 0 \Rightarrow n \in \mathbb{N}$.
 Тогда $(-3^n)^{6(-3^n)} = \frac{1}{9}$

$$\left(-3^n\right)^{6 \cdot (-3^n)} = \frac{1}{9}$$

$$\left(\frac{1}{9^n}\right)^{3 \cdot 3^n} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{(9^n)^{3 \cdot 3^n}} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{9^{3n \cdot 3^n}} = \frac{1}{9} \Rightarrow 3n \cdot 3^n = 1, \text{ т.к. } n \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$3n \cdot 3^n \equiv 3$, но $1 \neq 3$, противоречие ✓

Ответ: б) нет.