

ШИФР

912
(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по МАТЕМАТИКЕ в 11 классе
(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника ХУРСЕВИЧ КРИСТИНА АЛЕКСЕЕВНА

Дата рождения

Школа № 38 район СОВЕТСКИЙ город НИЖНИЙ НОВГОРОД

Особые отметки (Заполняется представителем оргкомитета)
о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

+1 чистовик

+1 чистовик
+1 чистовик

Дата проведения 19.01.2025

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады **обязан**:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады **запрещается**:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполняющуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному

заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы. Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады)

ШИФР

912

(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+	+	+1/2	0	—
20	20	10	0	0

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

N 11.1

$$2 \cos^4 x - \sin^3 x = 1$$

$$2 \cdot \cos^2 x \cdot \cos^2 x - \sin^3 x = 1$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \text{ (сн. тригонометрическое тождество)}$$

$$2(1 - \sin^2 x)^2 - \sin^3 x - 1 = 0$$

$$2(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) - \sin^3 x - 1 = 0$$

$$2\sin^4 x - 4\sin^2 x - \sin^3 x + 1 = 0$$

$$\text{Пусть } t = \sin x, -1 \leq t \leq 1$$

$$\begin{cases} 2t^4 - t^3 - 4t^2 + 1 = 0 \quad (1) \\ -1 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$(1) \quad t = \frac{1}{2} - \text{корень ур-я}$$

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = 0$$

$$\frac{1}{8} - \frac{1}{8} - 1 + 1 = 0$$

$$0 = 0$$

$$2t^4 - t^3 - 4t^2 + 1 \text{ разделим на } t - \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r|l} 2t^4 - t^3 - 4t^2 + 1 & t - \frac{1}{2} \\ \hline 2t^4 - t^3 & 2t^3 - 4t - 2 \\ \hline -4t^2 + 1 & \\ -4t^2 + 2t & \\ \hline -2t + 1 & \\ -2t + 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\left(t - \frac{1}{2}\right)(2t^3 - 4t - 2) = 0$$

$$t = -1 - \text{корень ур-я}$$

Лист 1(7)

$$2 \cdot (-1)^3 - 4 \cdot (-1) - 2 = 0$$

$$-2 + 4 - 2 = 0$$

$$0 = 0$$

разделим $2t^3 - 4t - 2$ на $t+1$

$$\begin{array}{r|l} 2t^3 - 4t - 2 & t+1 \\ \underline{2t^3 + 2t^2} & 2t^2 - 2t - 2 \\ \underline{-2t^2 - 4t - 2} & -2t^2 - 2t \\ \underline{-2t^2 - 2t} & 0 \end{array}$$

$$(t - \frac{1}{2})(t+1)(2t^2 - 2t - 2) = 0$$

$$t = \frac{1}{2} \text{ или } t = -1 \text{ или } 2(t^2 - t - 1) = 0$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$t = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$$

$$t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \frac{1}{2} \\ t = -1 \\ t = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ t = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{array} \right. \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$t = \frac{1}{2} \text{ или } t = -1 \text{ или } t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \text{ или } \sin x = -1 \text{ или } \sin x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$



$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m,$$

$$m \in \mathbb{Z}$$



$$x = \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi l,$$

$$l \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi - \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi p,$$

$$\text{и чет } p \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№ 11.1
Ответ: (продолжение)

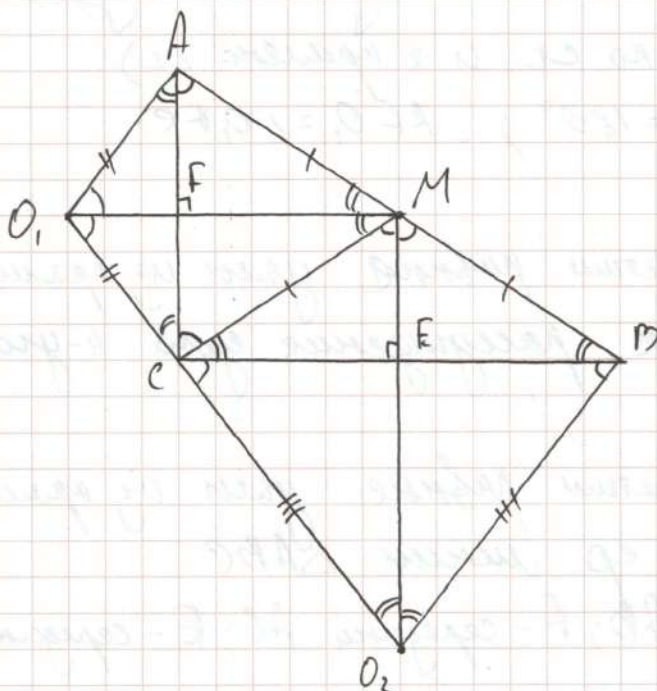
$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$x = \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi - \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$$



№ 11.2



$$\angle A = \alpha; \angle C = 90^\circ$$

$$AM = MB$$

CM - медиана $\triangle ABC$

$\angle C$ - прямой

$$\Rightarrow AM = MB = CM$$

(св-во медианы

прямоуг. \triangle)

$\Rightarrow \triangle AME$ - равноб.

(по гип.)

$\triangle CME$ - равноб.

(по гип.)

$$\Rightarrow \angle MAC = \angle ACM = \alpha$$

$$\angle AME = \angle CME = 90^\circ - \alpha$$

т.к. окружности касаются прямой AB :

окр. с центром O_1 через т. A и т. C : $O_1A \perp AB$

(радиус \perp касат. к этой точке)

т.к. никакие окр. не касались бы AB , а пересекали её

аналогично $O_2B \perp AB$

$$\Rightarrow \angle O_1AC = 90^\circ - \alpha; \angle CBO_2 = 90^\circ - 90^\circ + \alpha = \alpha$$

лист 3 (7)

$O_1A = O_1C$ - радиусы $\Rightarrow \triangle O_1AC$ - равноб. (по отр.)

$$\Rightarrow \angle O_1AC = \angle O_1CA = 90^\circ - \alpha$$

$O_2C = O_2B$ - радиусы $\Rightarrow \triangle O_2CB$ - равноб. (по отр.)

$$\Rightarrow \angle O_2BC = \angle O_2CB = \alpha$$

$$\Rightarrow \angle O_1CO_2 = 90^\circ - \alpha + \alpha + 90^\circ - \alpha + \alpha = 180^\circ - \text{развернутый}$$

т. O_1 , т. C , т. O_2 лежат на 1 прямой

$$\angle O_1CM = \angle MCO_2 = 90^\circ$$

$\Rightarrow O_1AME$ - вписанный 4-угольник

($\angle O_1AM + \angle O_1CM = 180^\circ$). AM - диаметр

$\triangle O_1AM = \triangle O_1CM$ (по катету и гипотенузе)

$\triangle O_1AF = \triangle O_1FE$ (по ст. и 2 прил. \angle)

$$\angle AFO_1 + \angle O_1FE = 180^\circ; \angle AFO_1 = \angle O_1FE$$

$$\Rightarrow \angle AFO_1 = 90^\circ$$

$O_1M \perp AC$. Отметили равные углы из прямоуг. \triangle

Из аналогичных рассуждений для 4-угольника $CMBO_2$:

$MO_2 \perp CB$. Отметили равные углы из прямоуг. \triangle

FM и EM - ср. линии $\triangle ABC$

(M - середина AB ; F - середина AC ; E - середина BC)

(из равенств \triangle)

$$\Rightarrow FM = \frac{1}{2} BC; ME = \frac{1}{2} AC$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC$$

$$S_{O_1MO_2} = \frac{1}{2} O_1M \cdot MO_2 \text{ (т.к. } \angle O_1MO_2 = 90^\circ)$$

$$\triangle CEO_2 \sim \triangle O_1MO_2 \text{ (по 2 } \angle \angle)$$

$$\triangle O_1FE \sim \triangle O_1MO_2 \text{ (по 2 } \angle \angle)$$

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№ 11. 2 (продолжение)

$$\Rightarrow \frac{CE}{O_1 M} = \frac{O_2 C}{O_1 O_2} ; \quad \frac{FC}{O_2 M} = \frac{O_1 C}{O_1 O_2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{CE}{FC} = \frac{MO_2}{MO_1}$$

$$\frac{S_{AME}}{S_{O_1 MO_2}} = \frac{AC \cdot MC}{O_1 M \cdot MO_2} = \frac{2FC \cdot 2CE}{O_1 M \cdot MO_2}$$

$$\frac{CE}{FC} = \frac{O_1 M \cdot O_2 C \cdot \sin \alpha}{O_1 O_2 \cdot O_2 M \cdot O_1 C} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{O_2 C}{O_1 C \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{O_2 C}{O_1 C} \quad O_2 C = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot O_1 C$$

$$\frac{O_2 C}{O_1 O_2} = \frac{O_2 C}{O_1 C + O_2 C} = \frac{O_1 C \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha}{O_1 C + O_1 C \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\frac{CE}{O_1 M} = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\frac{O_1 C}{O_1 O_2} = \frac{O_1 C}{O_1 C + O_2 C} = \frac{O_1 C}{O_1 C + O_1 C \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\frac{FC}{O_2 M} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{AME}}{S_{O_1 MO_2}} = 2 \cdot \left(\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} \right) \cdot 2 \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\frac{S_{AME}}{S_{O_1 MO_2}} = \frac{4 \operatorname{tg}^2 \alpha}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^2}$$

Ответ: $\frac{S_{\text{амс}}}{S_{0, \text{моз}}} = \frac{4 + g^2 x}{(1 + g^2 x)^2}$
N 11.3

~~$ax^4 + bx = c$~~ $ax^4 + bx = c$. $a, b, c > 0$
Усл. существования Δ со сторонами a, b, c :
 $x=0$ - не корень, т.к. $c > 0$

$\begin{cases} a+b > c \\ b+c > a \\ a+c > b \end{cases}$ ~~$\begin{cases} a+c > a \\ a-b > b-a \\ b-c > c-b \end{cases}$~~ ~~$\begin{cases} a > b \\ b > c \\ c > a \end{cases}$~~

$a+b > c$

$ax^4 + bx < a+b$

$a(x^4 - 1) + b(x - 1) < 0$

$a(x^2 - 1)(x^2 + 1) + b(x - 1) < 0$

$a(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) + b(x - 1) < 0$

$(x - 1)(a(x + 1)(x^2 + 1) + b) < 0$

$\begin{cases} x - 1 > 0 \\ a(x + 1)(x^2 + 1) + b < 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x - 1 < 0 \\ a(x + 1)(x^2 + 1) + b > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x > 1 \\ a(x + 1)(x^2 + 1) + b < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 1 \\ a(x + 1)(x^2 + 1) + b > 0 \end{cases}$

$a > 0; x + 1 > 0;$ $a > 0; b > 0; x^2 + 1 \geq 1$

$x^2 + 1 > 0; b \neq 0$

$\Rightarrow a(x + 1)(x^2 + 1) + b > 0$

\emptyset

$x > 1$ не может
быть корнем ур-я

При $0 < x < 1$:

$ax^4 + bx = c$

пер-во
верное
А это в-во
корней ур-ня?

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№11. 3 (продолжение)

$$\begin{cases} y = ax^4 + bx \\ y = e \end{cases}$$

$y = ax^4 + bx$ при $x > 0$ — возраст.
 $\Rightarrow ax^4 + bx = e$ — 1 реш. при $x > 0$
 ↑
 константа

Пусть x_1 — положит. корень

$0 < x_1 < 1$ — единственность положительный корень

При $x < 0$:

$$\begin{cases} y = x(ax^3 + b) \\ y = e \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = ax^4 + bx \\ y = e \end{cases}$$

ax^4 — убыв; bx — возраст

$$y' = 4ax^3 + b$$

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 2 \quad (\text{по т. Косинусов})$$

$$-1 \leq \cos 2 \leq 1$$

$$a^2 + b^2 - 2ab \leq e^2 \leq a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a-b)^2 \leq e^2 \leq (a+b)^2$$

$$a-b \leq e \leq a+b$$

$$a-b < ax^4 + bx < a+b$$

$$a(x^4 - 1) + b(x+1) > 0$$

$$a(x^2 - 1)$$

