

ШИФР

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике в 11 классе
(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника ПОГОВИН МАТВЕЙ СЕРГЕЕВИЧ

Дата рождения

Школа № 114.001 район А.С. Пушкина

город Семёнов

Дата проведения 19.01.25

Особые отметки (Заполняется представителем оргкомитета)
о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

+1 чистовик
+1 чистовик

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады **обязан**:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады **запрещается**:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполняющуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному

заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы. Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады)

ШИФР

а4

(заполняется сотрудником секретариата)

| Задание 1 | Задание 2 | Задание 3 | Задание 4 | Сумма баллов | Σ |
|-----------|-----------|-----------|-----------|--------------|----|
| + | + | ± | - | — | |
| 20 | 20 | 13 | 3 | 0 | 56 |

Заполняется проверяющим

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№ 11.1

$$2 \cos^4 x - \sin^3 x = 1$$

$$2(-1)$$

$$2(1 - \sin^2 x)^2 - \sin^3 x = 1$$

$$2 - 4\sin^2 x + 2\sin^4 x - \sin^3 x = 1$$

$$\sin x = t$$

$$2t^4 - t^3 - 4t^2 + 1 = 0$$

$$t_1 = -1$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & -1 & -4 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & -1 & 1 \end{array}$$

$$(t+1)(2t^3 - 3t^2 - t + 1) = 0$$

$$t_2 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & -3 & -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & -2 & -2 & 0 \end{array}$$

$$(t+1)(t - \frac{1}{2})(2t^2 - 2t - 2) = 0$$

$$(t+1)(t - \frac{1}{2})(t^2 - t - 1) = 0$$

* Решим уравнение

$$t^2 - t - 1 = 0$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$t_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Σ = 56

$$(t+1)(t-\frac{1}{2})(t-\frac{1+\sqrt{5}}{2})(t-\frac{1-\sqrt{5}}{2})=0$$

~~$$(sinh x + 1)(sinh x - \frac{1}{2})(sinh x - \frac{1+\sqrt{5}}{2})(sinh x - \frac{1-\sqrt{5}}{2})$$~~

$$1) \sinh x = -1$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2) \sinh x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3) \sinh x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(т.к. $\sinh x \leq 1$ это ур
не будет выполняться
не при каких
 x)

$$4) \sinh x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$x = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi i, i \in \mathbb{Z}$$

~~$$x = \pi + \operatorname{arcsinh}$$~~

$$x = \pi - \operatorname{arcsinh}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi f, f \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

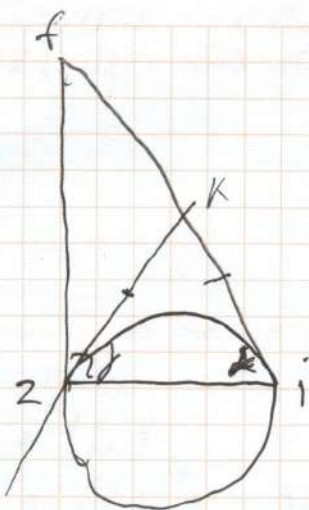
$$x = \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi i, i \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi - \operatorname{arcsinh}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi f, f \in \mathbb{Z}$$

Уп. 2

Задан прямоуго. Δ и проведем
одну окружность \odot с
окр. в центре



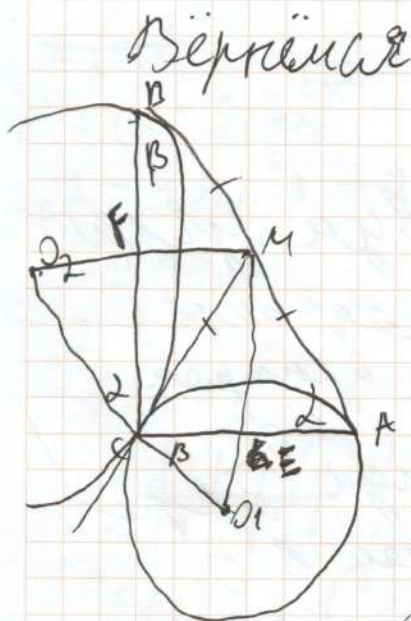
Проведем из F
касательную FK

$$\angle KFI = \angle KIF = \beta$$

Зн. $\triangle FKI$ - р/б

$\triangle FKI$ - равноср

FK -
медiana



Вернемся к задаче

Из наших предположений
расположений следует,
что CM - общая касательная

к окр с центром O_1

и окр с O_2

Зн. окр ~~так~~ касаются
в точке $C \rightarrow C \in O_1O_2$

$$\text{Добуж } \angle CBA = \beta$$

$$\angle MCA = \alpha$$

$$\angle BCM = \beta$$

Заметим, что O_1 находится
на продолжении \perp из T, M
 $\triangle CMA$, а O_2 на продолжении
 \perp из T, M $\triangle CMB$

$$\text{Следовательно } \angle CEO_1 = \angle MEA = 90^\circ$$

$$\angle O_2FC = \angle BFM = 90^\circ$$

Так все мы видим, что ME
и FM - средние линии

$$3m \quad BF = FC$$

$$AE = EC$$

$$O_1 C \perp CM$$

$$\angle MCA = \alpha \quad \left| \rightarrow \quad \angle ECO_1 = \beta \right.$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\text{Аналогично } \angle FCO_2 = \alpha$$

$$\angle FO_2 C = 90^\circ - \alpha = \beta$$

$$\angle CO_1 F = 90^\circ - \beta = \alpha$$

$$\text{Таким образом } \triangle O_1 O_2 M$$

он подобен $\triangle ABC$ (по двум углам)

$$K = \frac{O_1 O_2}{AB} = \frac{R+r}{AB}, \text{ где } R - \text{радиус } O_2 \text{ с центром}$$

$$\triangle O_1 O_2 M$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle O_1 O_2 M}} = \frac{1}{K^2}$$

а r - радиус O_1 с центром в O_1

$$\sin \alpha = \frac{CE}{r} = \frac{BF}{MB} = \frac{2BF}{AB} \quad (1)$$

$$\cos \alpha = \frac{CF}{R} = \frac{AE}{MA} = \frac{2AE}{AB}$$

$$\frac{AB}{2} = \frac{AE}{\cos \alpha} = \frac{BF}{\sin \alpha}$$

$$\frac{CF}{R} = \frac{2AE}{AB}$$

$$\frac{R}{AB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{CF}{AE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{ME}{AE} = \frac{1}{2} \tan \alpha$$

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

из (1)

1/2

$$\frac{r}{AB} = \frac{1}{2} \frac{CE}{DF} = \frac{1}{2} \frac{CE}{ME} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} 2$$

$$k = \frac{R+r}{AB} = \frac{R}{AB} + \frac{r}{AB} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2 + \frac{1}{2} \operatorname{ctg} 2$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{O_1 O_2 H}} = \frac{1}{k^2} = \frac{1}{\frac{1}{4} (\operatorname{tg} 2 + \operatorname{ctg} 2)^2} = \frac{4}{(\operatorname{tg} 2 + \operatorname{ctg} 2)^2}$$

$$= \frac{4}{\operatorname{tg}^2 2 + 2 + \operatorname{ctg}^2 2}$$

Ответ: $\frac{S_{ABC}}{S_{O_1 O_2 H}} = \frac{4}{\operatorname{tg}^2 2 + 2 + \operatorname{ctg}^2 2}$

+

11.4

$$9 \cdot x^{6x} = 1$$

$$x^{6x} = \frac{1}{9}$$

при $x > 0$

$$\log_3 x^{6x} = -2$$

$$6x \cdot \log_3 x = -2$$

В $y = 6x$ в-сегда возрастает
 $\log_3 x$ - при $x > 0$ возрастает

но $6x \cdot \log_3 x$ ~~не верно~~ возрастает (при $x > 0$)

$$-2 = \cos t$$

Следовательно при

$9x^{6x} = 1$ имеет единственный положительный корень

$x = \frac{1}{3}$ это еще положительный корень.

Ответ: а) единственный
положительный
корень

$$x = \frac{1}{3}$$

11.3

~~$$ax^4 = c$$~~

~~$$ax^4 = c$$~~

$$ax^4 + bx = c$$

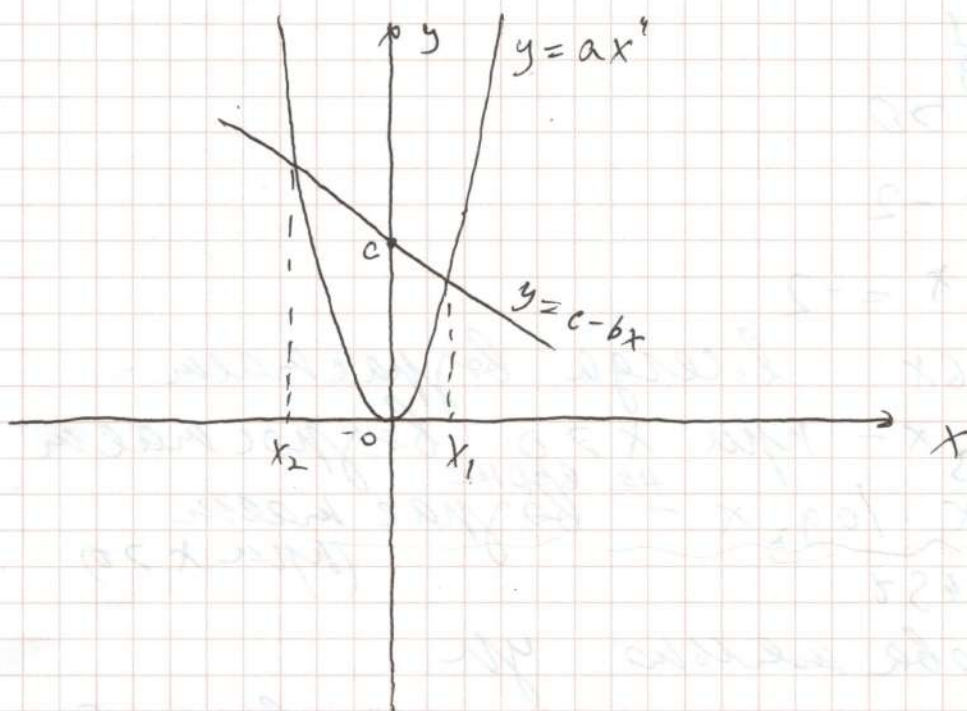
$$ax^4 = c - bx$$

$$a > 0$$

$$b > 0$$

$$c > 0$$

Схематично изобразим графики
 $y = ax^4$ и $y = c - bx$ на координат-
ной плоскости



04

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

~~тогда~~ Рассмотрим

График $y = ax^4$

$y \geq 0$ при всех x , (т.к. $a > 0$)

~~Вершина графика~~

точка мин имеет координаты
(0, 0)

График $y = c - bx$

~~это~~ это прямая, пересекающая
ось OY в точке $(0, c)$, (где $c > 0$)

Из исследования мы

видим, что графики
пересекаются в ^{и только в} 2 точках,

значит ур $ax^4 + bx = c$ имеет

2 корня.

Так же мы видим, что эти
точки не могут быть одного
знака по оси Ox .

значит и корни ур
 $ax^4 + bx = c$ имеют разные

знаки

П.к. $b > 0$

~~= b~~ Следует что ур $ax^4 + bx = c$
эквивалентна прямой $y = c - bx$
отрицательной,

У?

«отражение»?
(только в черное)

Нет главного:
сравнение корней

$c \pm 1$
(в силу
пер-ва Δ)

(*) А. график отрицательной
* корень по модулю больше
положительного. з.м.г

(*) - $y = ax^4$ - симметричен
относительно ОУ.

