

ШИФР

251

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по МАТЕМАТИКЕ

в 11

классе

(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Коломина Ирина Дмитриевна

Дата рождения

Лицей

Школа № 38 район Советский город Нижний Новгород

Особые отметки (Заполняется представителем оргкомитета)
о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

+ 1 чистовик

+ 1 чистовик

Дата проведения 19.01.2025

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады обязан:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;

- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады запрещается:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполняющуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному

заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы. Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+	+	+	-	-
20	20	8	3	0

Заполняется проверяющим

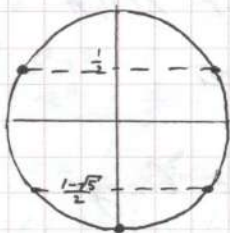
Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

11.1

$$\begin{aligned}
 2\cos^4 x - \sin^3 x &= 1 \\
 2(\cos^2 x)^2 - \sin^3 x &= 1 \\
 2(1 - \sin^2 x)^2 - \sin^3 x - 1 &= 0 \\
 2(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) - \sin^3 x - 1 &= 0 \\
 2 - 4\sin^2 x + 2\sin^4 x - \sin^3 x - 1 &= 0 \\
 2\sin^4 x - \sin^3 x - 4\sin^2 x + 1 &= 0 \\
 \sin^3 x (2\sin x - 1) + (1 - 4\sin^2 x) &= 0 \\
 \sin^3 x (2\sin x - 1) - (4\sin^2 x - 1) &= 0 \\
 \sin^3 x (2\sin x - 1) - (2\sin x - 1)(2\sin x + 1) &= 0 \\
 (2\sin x - 1)(\sin^3 x - 2\sin x - 1) &= 0 \\
 (2\sin x - 1)(\sin^3 x - \sin x - (\sin x + 1)) &= 0 \\
 (2\sin x - 1)(\sin x(\sin^2 x - 1) - (\sin x + 1)) &= 0 \\
 (2\sin x - 1)(\sin x(\sin x - 1)(\sin x + 1) - (\sin x + 1)) &= 0 \\
 (2\sin x - 1)(\sin x + 1)(\sin x(\sin x - 1) - 1) &= 0 \\
 (2\sin x - 1)(\sin x + 1)(\sin^2 x - \sin x - 1) &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 2\sin x - 1 = 0 \\
 \sin x + 1 = 0 \\
 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \quad (1)
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 \sin x = \frac{1}{2} \\
 \sin x = -1 \\
 \sin x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}
 \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
 x &= \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z} \\
 x &= \frac{5\pi}{6} + 2\pi l, \text{ где } l \in \mathbb{Z} \\
 x &= -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, \text{ где } m \in \mathbb{Z} \\
 x &= \arcsin \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z} \\
 x &= \pi - \arcsin \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + 2\pi s, \text{ где } s \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

$$(1): \begin{cases} \sin x = t \\ t^2 - t - 1 = 0 \quad (2) \\ -1 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$(2): \begin{cases} t^2 - t - 1 = 0 \\ D = (-1)^2 - 4(-1) = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ t = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Вернемся в систему (1):

$$\begin{cases} t = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ t = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \\ -1 \leq t \leq 1 \\ t = \sin x \\ \sin x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$2,2 < \sqrt{5} < 2,3$$

случ. по

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} > \frac{1 + 2,2}{2} = 1,6$$

не подходит

по огранич.



Ответ: $\alpha = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\alpha = \frac{5\pi}{6} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$; $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$;
 $\alpha = \arcsin \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; $\alpha = \pi - \arcsin \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 2\pi s, s \in \mathbb{Z}$

11.2

Решение:

Дано: $\angle C = \angle A$

$\triangle ABC, \angle C = 90^\circ$

$\omega_1(O_1; O_1A)$
 A - т. кас. к ω_1 в A

$O_1A = O_1C$

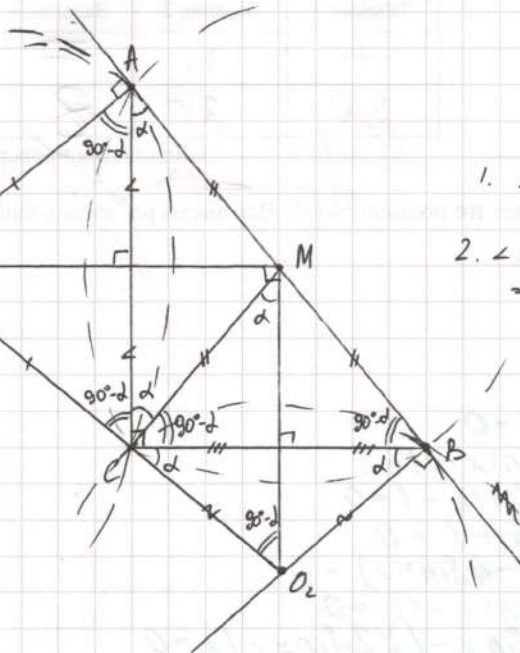
$\omega_2(O_2; O_2B)$

B - т. кас. к ω_2 в B

$O_2B = O_2C$

M - сер. $[AB]$

$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle O_1MO_2}} = ?$



1. $\angle ABC = 90^\circ - \angle BAC = 90^\circ - \alpha$

2. $\angle MBC + \angle O_2BC = 90^\circ$ ($O_2B \perp AB$)
 $\Rightarrow \angle O_2BC = \alpha$

$O_2B = O_2C$ (радиусы ω_2)
 $\Rightarrow \triangle CO_2B$ - р.б.
 $\Rightarrow \angle O_2CB = \angle O_2BC = \alpha$

аналогично
 $\angle O_1AC = 90^\circ - \alpha$
 \Rightarrow из р.б. $\triangle CO_1A$:
 $\angle O_1CA = 90^\circ - \alpha$

3. $\angle O_1CA + \angle ACB + \angle O_2CB = 180^\circ$
 \Rightarrow т. O_1, C, O_2 лежат на одной прямой

~~4. $\omega(M; MC)$ - опис. вокруг $\triangle ACB$~~
 \Rightarrow из р.б. $\triangle AMC$ и $\triangle BMC$: $\angle MCA = \alpha$; $\angle MCB = 90^\circ - \alpha$

5. $\angle O_1AM + \angle O_1CM = 180^\circ \Rightarrow \triangle O_1AMC$ - впис. 4-уг.
 $\Rightarrow \angle CO_1M = \angle CAM = \alpha$ (опир. на одну дугу)

аналогично: $\angle MCO_2 + \angle MBO_2 = 180^\circ \Rightarrow \triangle CMO_2B$ - впис. 4-уг.
 $\Rightarrow \angle CO_2M = \angle CBM = 90^\circ - \alpha$

6. $\triangle O_1MO_2$: $\angle O_1MO_2 = 180^\circ - (\angle MO_1O_2 + \angle MO_2O_1) = 90^\circ$

7. AC - общая хорда окружностей, опис. вокруг $\triangle CO_1A$ и $\triangle ACB \Rightarrow$ это перпендикулярная ось
 O_1M - отр., соединяющий центры данных окр-тей
 $\Rightarrow AC \perp O_1M$

аналогично CB - общ. хорда окр-тей, опис. вокруг $\triangle CO_2B$ и $\triangle ACB$
 O_2M - отр., соединяющий центры данных окр-тей
 $\Rightarrow O_2M \perp CB$

8. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin \alpha$

из $\triangle ACB$: $\cos \alpha = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC = AB \cdot \cos \alpha$

$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB^2 \sin \alpha \cos \alpha$

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

продолжение 11.2

$$9. S_{\Delta O_1 M O_2} = \frac{1}{2} O_1 O_2 \cdot O_1 M \cdot \sin d$$

$$\text{из прямоуг. } \Delta O_1 C M: \sin d = \frac{C M}{O_1 M}; O_1 M = \frac{C M}{\sin d}$$

$$C M = \frac{A B}{2} \text{ (медиана, провер. из прямог. угла } \Delta)$$

$$\Rightarrow O_1 M = \frac{A B}{2 \sin d}$$

$$O_1 O_2 = O_1 C + C O_2$$

$$\text{из прямоуг. } \Delta O_1 C M: \operatorname{tg} d = \frac{C M}{O_1 C}; O_1 C = \frac{C M}{\operatorname{tg} d} = \frac{A B}{2 \operatorname{tg} d}$$

$$\text{из прямоуг. } \Delta O_2 C M: \operatorname{tg} d = \frac{C O_2}{C M}; C O_2 = C M \cdot \operatorname{tg} d = \frac{A B \operatorname{tg} d}{2}$$

$$\Rightarrow O_1 O_2 = \frac{A B}{2 \operatorname{tg} d} + \frac{A B \operatorname{tg} d}{2} = \frac{A B}{2} \left(\operatorname{tg} d + \frac{1}{\operatorname{tg} d} \right) = \frac{A B}{2} (\operatorname{tg} d + \operatorname{ctg} d)$$

$$\Rightarrow S_{\Delta O_1 M O_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{A B}{2} (\operatorname{tg} d + \operatorname{ctg} d) \cdot \frac{A B}{2 \sin d} \cdot \sin d = \frac{A B^2 (\operatorname{tg} d + \operatorname{ctg} d)}{8}$$

$$10. S_{\Delta A B C} : S_{\Delta O_1 M O_2} = \frac{A B^2 \sin d \cos d}{2} \cdot \frac{8}{A B^2 (\operatorname{tg} d + \operatorname{ctg} d)} = \frac{4 \sin d \cos d}{\operatorname{tg} d + \operatorname{ctg} d} =$$

$$= \frac{2 \sin 2d}{\operatorname{tg} d + \operatorname{ctg} d}$$

$$\text{Ответ: } \frac{S_{\Delta A B C}}{S_{\Delta O_1 M O_2}} = \frac{2 \sin 2d}{\operatorname{tg} d + \operatorname{ctg} d} = +.$$

[11.4]

$$9. x^{6x} = 1$$

$$a) \begin{cases} x^{6x} = 1 \\ x^{6x} = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$x = \frac{1}{3}$ является корнем данного ур-ня

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{6 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{9}$$

$y = x^{6x}$ для $x > 0$ является возрастающей функцией

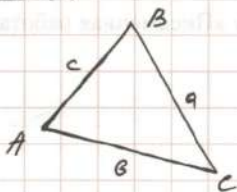
$f = \frac{1}{9}$ - график константы

след-но при всех $x > 0$ у ф-ций y и f может быть только одна точка пересечения, значит это и есть значение $x = \frac{1}{3}$

Ответ: а) положительный корень уравн

иллюстрация

11.3



$$\begin{aligned} a &< b+c \\ b &< a+c \quad (\text{нерав-во } \Delta) \\ c &< a+b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax^4 + bx &= c \\ c &< a+b \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad ax^4 + bx < a+b$$

$$\begin{aligned} a(x^4 - 1) + b(x - 1) &< 0 \\ a(x^2 - 1)(x^2 + 1) + b(x - 1) &< 0 \\ a(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) + b(x - 1) &< 0 \\ (x - 1)(a(x + 1)(x^2 + 1) + b) &< 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &> 1 \quad \text{при } x \in \mathbb{R} \\ x + 1 &> x - 1 \quad \text{при } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

получается, чтобы данное нерав-во выполнялось:

$$\begin{cases} x - 1 < 0 \\ a(x + 1)(x^2 + 1) + b > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 1 \\ a(x + 1)(x^2 + 1) + b > 0 \end{cases}$$

при $x = 0$ $c = 0 \rightarrow \Delta$ явл. вырожденным
для данного случая будет существовать еще один отриц. корень из ур-ния $ax^4 + bx = 0$, т.е. для этого случая невозможно рож-ть, что есть два корня разн. знаков, т.е. $c = 0$ не рассматриваем

Зачем вопрос? Δ
расс-во?

$$\text{при } -1 < x < 1, x \neq 0 \quad a(x + 1)(x^2 + 1) + b > 0$$

т.е. корень может находиться на этой промежутке

при $x = -1$: $a - b = c$; $a - b + c$ невозможно

$$\text{при } x < -1: ax^4 > a, \quad bx \leq b$$

$$\begin{aligned} ax^4 &= c - bx > a & bx &= c - ax^4 \leq -b \\ c &> bx + a \quad (1) \end{aligned}$$

из (1) и (2):

$$bx + a < ax^4 - b$$

$$bx + b + a - ax^4 < 0$$

$$b(x + 1) + a(1 - x^4) < 0$$

$$b(x + 1) + a(1 - x^2)(1 + x^2) < 0$$

$$b(x + 1) + a(1 - x)(1 + x)(1 + x^2) < 0$$

$$(x + 1)(b + a(1 - x)(1 + x^2)) < 0$$

Верно при $x < -1$, т.е. корень может существов. на этой промежутке

рассматрив. пер. в, а не ур-ие

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

продолжение 11.3

$$ax^4 + bx = c$$

$$x(ax^3 + b) = c$$

одного знака, т.к. $c > 0$ (длина стороны)

$$x < -1: ax^3 < -a$$

$$ax^3 + b < 0$$

$$ax^3 < -b$$

Пусть на отрезке $0 < x < 1$ есть два корня x_1, x_2

$$\text{тогда } ax_1^4 + bx_1 = ax_2^4 + bx_2$$

$$\frac{a(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2)}{(x_1 - x_2)(a(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) + b)} = 0 \Rightarrow$$

Верно, что функ. не может быть, а почему? 3 корня

след-но $x_1 = x_2$, т.е. на отр. $0 < x < 1$ может быть только один корень
тогда любой корень ~~из промежутка~~ $x < -1$ будет больше x_1 , но модулю, осталось доказать, что он единств.

Пусть он не единств., а существует два корня x_3, x_4 при $x < -1$

$$(x_3 - x_4)(a(x_3 + x_4)(x_3^2 + x_4^2) + b) = 0$$

$$\text{если } x_3 \neq x_4, \text{ то } a(x_3^3 + x_4^3 + x_3x_4(x_3 + x_4)) = -b$$

$$ax^4 + bx > 0 \quad \text{Что значит?}$$

$$x(ax^3 + b) > 0$$

$$x < 0 \Rightarrow ax^3 + b < 0$$

$$-b > ax^3$$

$$\Rightarrow a(x_3^3 + x_4^3 + x_3x_4(x_3 + x_4)) > ax_3^3 \rightarrow \text{для } x_3 \text{ и } x_4 \text{ случаи одинак.}$$

$$x_3^3 + x_4^3 + x_3^2x_4 + x_4^2x_3 > x_3^3$$

$$x_4^3 + x_3^2x_4 + x_4^2x_3 > 0$$

1
0 при $x < -1$

т.е. $x_3 = x_4$ и корень на этом промежутке также один

ч. т. п.

11.4

$$5) x^{6x} = \frac{1}{9}$$

~~мы не можем, но не отговаривать~~
~~→ в худшем случае~~
~~х=0~~

~~бывает~~
~~х=0~~

нет оснований.

у раннего ур-ия нет отриц. корней, (обл. опр. степенной, $x > 0$)

Ответ: \emptyset , нет

