

ШИФР

034

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по МАТЕМАТИКЕ

В

11

классе

(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Жоголев Денис Игоревич

Дата рождения

Школа № 55 район Канавинский город Нижний Новгород

Особые отметки (Заполняется представителем оргкомитета) о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

+ 1 чистовик

Дата проведения 19.01.2025

Правила поведенияУчастник очного тура олимпиады **обязан**:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады **запрещается**:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполнявшуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному

заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы. Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады)

ШИФР 034

(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
\pm	+	+	0	—
12	20	20	0	0

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

52
A

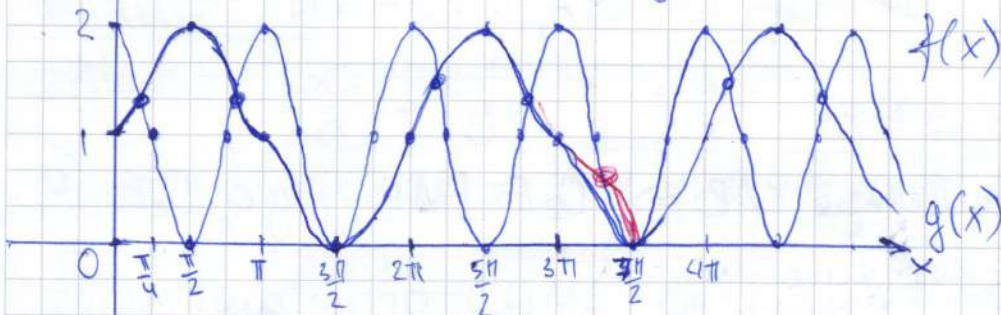
Задача 11.1

$$2\cos^4 x - \sin^3 x = 1$$

$$2\cos^4 x = 1 + \sin^3 x$$

Построим графики функций:

$$f(x) = 2\cos^4 x \text{ и } g(x) = 1 + \sin^3 x$$



не переписывать
корни

Одна серия, которая точно является решением: $x \in \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Есть еще 2 серии

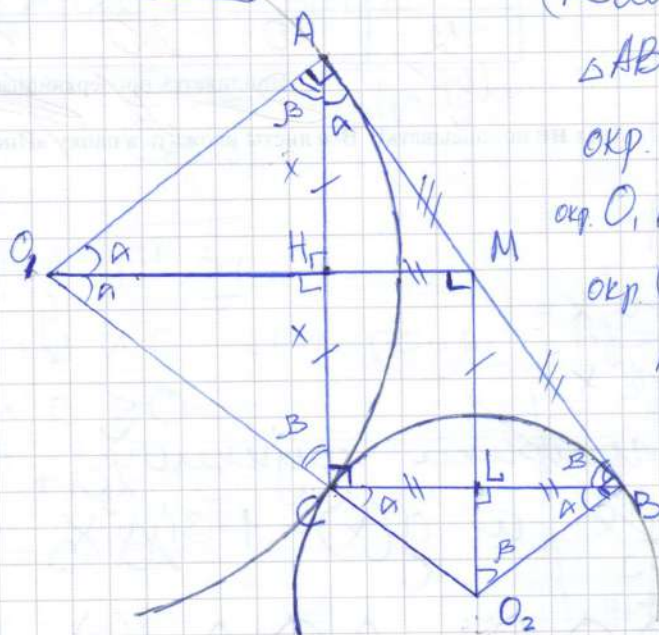
Проверим при $x = \frac{\pi}{6}$

$$2\cos^4 \frac{\pi}{6} - \sin^3 \frac{\pi}{6} - 1 = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 1 = 2 \cdot \frac{9}{16} - \frac{1}{8} - 1 = \frac{9}{8} - \frac{1}{8} - 1 = \frac{8}{8} - 1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \text{серия } x \in \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

является решением, при этом серия $x \in \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ автоматически тоже решение, т.к. при подстановке у косинуса с учетом степени знак не поменяется, а значения синуса совпадут.

Ответ: $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$; $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$;
 $k \in \mathbb{Z}$

Задача 11.2



Дано:

$\triangle ABC$ - прямоугольный

окр. O_1 и O_2

окр. $O_1 \cap AB = A$

окр. $O_2 \cap AB = B$

M - середина AB

Найти:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{O_1 O_2}} = ?$$

Решение:

окр. O_2 касается $AB \Rightarrow O_2 B \perp AB$, где $O_2 B = R$ - радиусу окружности

окр. O_2 $C \in$ окр. O_1 и $B \in$ окр. $O_2 \Rightarrow O_2$ равноудалена от отрезка $CB \Rightarrow O_2$ лежит на серединном перпендикуляре к CB , $O_2 L \perp CB$, L - середина $CB \Rightarrow CL = LB$

Аналогично для окр. O_1 и отрезка $AC \Rightarrow O_1 H$ - серединный перпендикуляр к AC

$\Rightarrow O_1 H \perp AC$, H - середина $AC \Rightarrow AH = HC$

$AC \perp CB$, $O_1 H \perp AC$, $CB \perp O_2 L \Rightarrow O_1 H \perp O_2 L$

Если мы проведем CM , то CM будет медианой, т.к. M - середина $AB \Rightarrow$

$CM = \frac{1}{2} AB$ ($\triangle ABC$ - прямоугольный) \Rightarrow пара равнобедренных треугольников $\triangle AMC$ и $\triangle CMB$, где MH и ML будут являться и медианой и высотой, то есть серединами перпендикуляров к сторонам AC и CB соответственно $\Rightarrow O_1H \cap O_2L = M$

Пусть $\angle CBA = \beta$, где $\beta = 90 - \alpha$

Учитывая \rightarrow Расставляя таким образом углы α и β и учитывая перпендикулярности, получим:

$$\angle O_1CO_2 = \beta + 90 + \alpha = 90 - \alpha + 90 + \alpha = 180 \Rightarrow O_1O_2 - \text{прямая}$$

Пусть $AH = HC = x$ и $CL = LB = y$

$$\triangle ABC: \frac{BC}{AC} = \tan \alpha; \frac{y}{2x} = \tan \alpha; y = x \tan \alpha$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CB = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2x \tan \alpha = 2x^2 \tan \alpha$$

Заметим, что $CHML$ - прямоугольник \Rightarrow

$$\Rightarrow HM = CL = x \tan \alpha, HC = ML = x$$

+ $\triangle O_1HA$ - прямоугольный:

$$\frac{AH}{O_1H} = \tan \alpha; \frac{O_1H}{AH} = \cot \alpha; \frac{O_1H}{x} = \cot \alpha \Rightarrow O_1H = x \cot \alpha$$

$\triangle CO_2L$ - прямоугольный:

$$\frac{LO_2}{CL} = \tan \alpha; \frac{LO_2}{x \tan \alpha} = \tan \alpha \Rightarrow LO_2 = x \tan^2 \alpha$$

$$S_{O_1MO_2} = \frac{1}{2} O_1M \cdot O_2M = \frac{1}{2} (O_1H + HM) (O_2L + LM) =$$

$$= \frac{1}{2} (x \cot \alpha + x \tan \alpha) (x \tan^2 \alpha + x) = \frac{x^2}{2} (\cot \alpha + \tan \alpha) (\tan^2 \alpha + 1)$$

$$= \frac{x^2}{2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \cos^2 \alpha}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{\text{омо}_2}} = \frac{2x^2 \sin A}{\cos A} : \frac{x^2}{2 \sin A \cdot \cos A \cdot \cos^2 A} = \frac{2x^2 \sin^2 A \sin A \cos^3 A}{x^2 \cos^3 A} =$$

$$= 4 \sin^2 A \cos^2 A = \sin^2 2A$$

Ответ: $\frac{S_{ABC}}{S_{\text{омо}_2}} = \sin^2 2A$

Задача 11.3

Т.к. a, b и c стороны $\triangle ABC$, то

$$a, b \text{ и } c > 0$$

$$ax^4 + bx = c$$

$$ax^4 = c - bx$$

Имеем:

$$f(x) = ax^4$$

$$g(x) = c - bx$$

при a, c и $b > 0$

$$f(x) = g(x)$$

Построим

графики $f(x)$ и $g(x)$

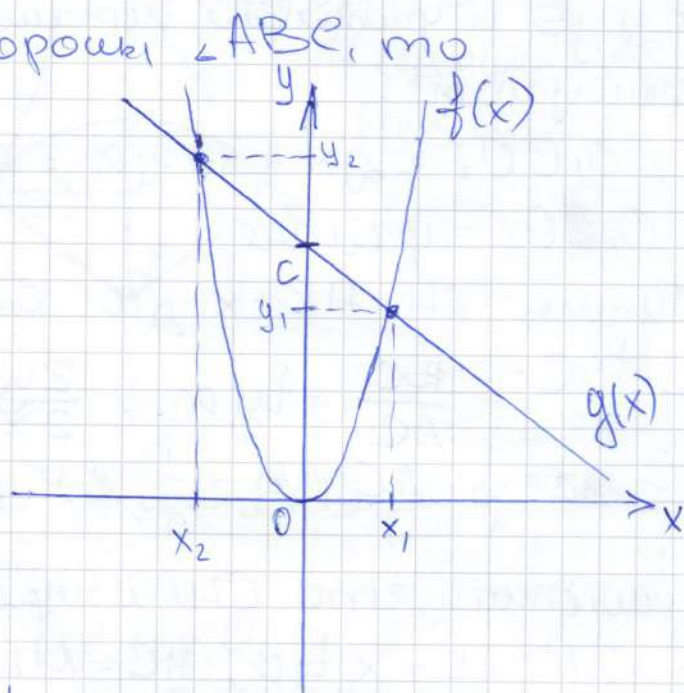


График $f(x)$ представляет собой параболу 4 степени, которая за счёт коэф. a может только расширяться ($a > 0$), но её вершина будет всегда оставаться в $(0; 0)$ и ветви вверх

График $g(x)$ - прямая, которая за счёт отрицательного коэф. $-b$ будет всегда убывающей

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

Задание II.3 Продолжение
За счёт зафиксированного положения вершины параболы в точке $(0;0)$ и тому факту, что линейную функцию при $x=0$ можно опустить ниже $O(\epsilon > 0)$, то уравнение всегда будет иметь 2 корня противоположных знаков (I и II четверть), при этом отрицательный корень по модулю больше положительного (потому что линейная функция будет ^{геометрически} убывающей, а значит т.к. $y_2 > y_1$ всегда, то и $|x_2| > |x_1|$ всегда)

Задание II.4

а) $g \cdot x^{6x} = 1$
 $x^{6x} = \frac{1}{g}$

Воспользуемся
свойством степеней:

$(x^6)^x = \frac{1}{g}$ переход
к равносильному

$f(x) = x^6$

