

ШИФР

017

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике в 11 классе
(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Белов Сергей Алексеевич

Дата рождения

Школа № 40 район _____ город Дзержинск

Особые отметки (Заполняется представителем оргкомитета)
о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

+1 чистовик

Дата проведения 19.01.2025

заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию; а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы. Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись)

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады **обязан**:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады **запрещается**:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполнявшуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

11.1. $2\cos^4 x - \sin^3 x = 1$

$$2(1 - \sin^2 x)^2 - \sin^3 x = 1$$

$$2(1 - t^2)^2 - t^3 = 1$$

$$2t^4 - t^3 - 4t^2 + 1 = 0$$

$$(t+1)(t-\frac{1}{2})(t^2+t-1) = 0$$

$$t = \sin x$$

1	2	3	4	5
± 1	+	+	+	-
13	20	20	8	0

но в. б. не

$$t = -1 \pm \frac{1}{2}$$

$$\Sigma = 61$$

let $\sin x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. $t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow |t| > 1 \Rightarrow |\sin x| > 1 \Rightarrow \emptyset$

$$\begin{cases} t = -1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{cases} k \in \mathbb{Z}$$

Отв. $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

11.3. $a, b, c > 0$; сумма двух сторон треугольника больше третьей (нерав. троу.)


$$ax^4 + bx = c$$

$$ax^4 + bx - c = 0$$

$$f(x) = ax^4 + bx - c$$

$$f'(x) = 4ax^3 + b$$

$$f''(x) = 12ax^2 \geq 0 \text{ - всегда } \Rightarrow$$

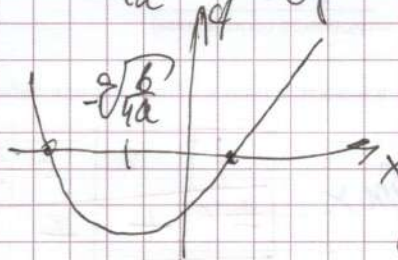
f имеет вид 

$$f'(x) = 0 \text{ при } x = -\sqrt[3]{\frac{b}{4a}} < 0$$

подставим в f : $\frac{b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{4}{3}}} \left(1 - \frac{4^{\frac{4}{3}}}{4^{\frac{1}{3}}}\right) = c = \frac{-3b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3}}} - c < 0$

при $x = 0$: $f(0) = -c < 0$, при этом при $f(1) = a + b - c > 0$ (нерав. троу.)

$x > -\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$ возраст. ~~монотонно~~



~~монотонно~~

при $x < -\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$ убывает,

$$f(-\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}) < 0$$

~~монотонно~~ \Rightarrow если $x < -\sqrt[3]{\frac{b}{4a}} < 0$, при кот. $f(x) = 0$ и если $x > 0$, при кот. $f(x) = 0$ и только там, кот.г.

$f(0) < 0$ и $f(1) > 0 \Rightarrow x > 0$ находится решение между 0 и 1

$$f(-1) = a - b - c < 0 \text{ (неправ. инф.)}$$

если $-1 \leq -\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$, то из монот. f на промежутке следует, что $|x| > 1$,

где x — отриц. реш.

если $-1 \geq -\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$, то $-\sqrt[3]{\frac{b}{4a}} > x$, x — отриц. реш. уравн. $\Rightarrow |x| > 1$ из монот. f и ее выпукл.

т.е. только отриц. реш. больше 1,

а $1 > x$ — неиск. решение, т.к.г.

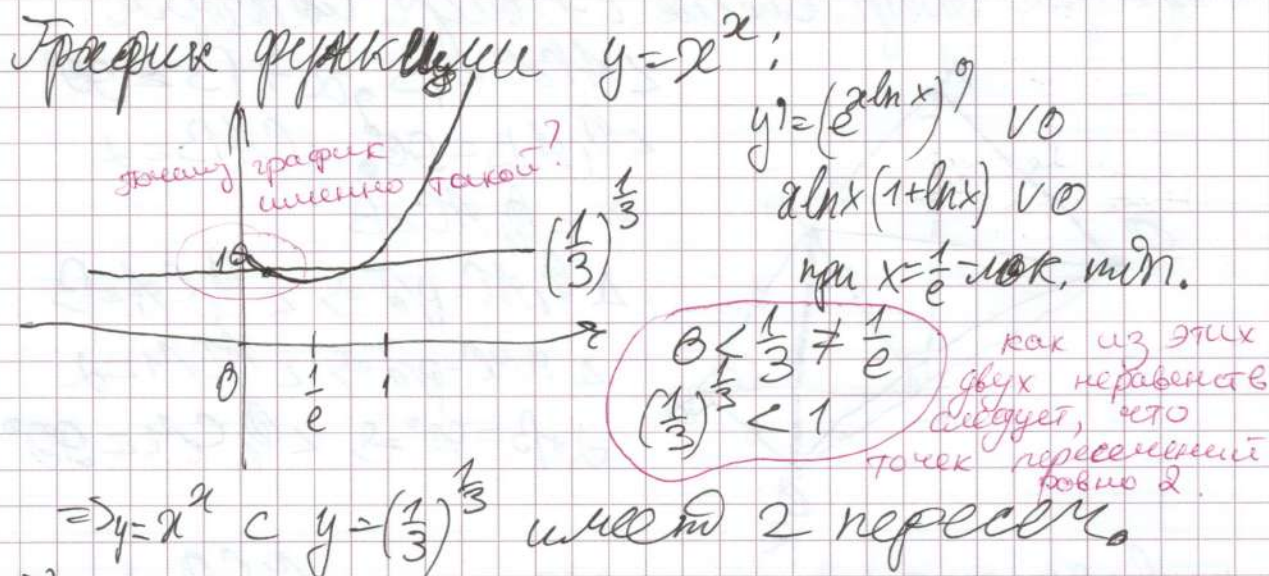
Вывод: 9-то.

11.4. а) $9 \cdot x^{6x} = 1$, $x > 0$. Если $x > 0$, то определено $x^x > 0$.

$$x^{6x} = \frac{1}{9}$$

$$(x^x)^6 = \frac{1}{9}; \quad x^x = \pm \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} > 0$$

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!



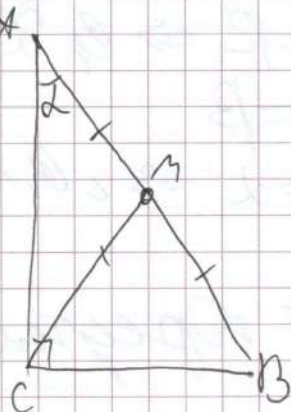
д) операция возвед. в рационал. степ. и в целую степ. - разные опер. и впр. на x при них разные. Можно заметить, что $9 \cdot (-\frac{1}{3})^{6 \cdot (-\frac{1}{3})} \geq 9 \cdot (-\frac{1}{3})^{-2} = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1$, т.е. $x = -\frac{1}{3} < 0$ - решение.

Считать ли это решением - зависит от договорён.

Ответ: а) 2; д) если, $x = -\frac{1}{3}$.

11.2.

$\angle CAB = \alpha$



окр. O_1 касается AB и $A \in \text{окр. } O_1 \Rightarrow A$ - т. касания

аналог. B - т. касания окр. O_2 и AB

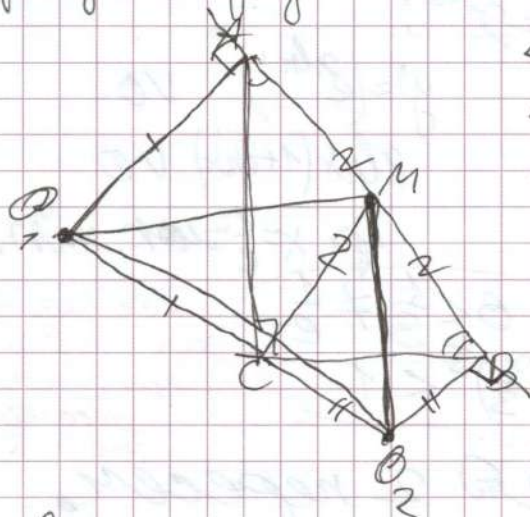
$\Rightarrow O_1 A \perp AB$; $O_2 B \perp AB$

$C \in \text{окр. } O_1 \Rightarrow O_1 A = O_1 C$

$C \in \text{окр. } O_2 \Rightarrow O_2B = O_2C$

M - сер. $AB \Rightarrow CM = AM = MB$
медиана.

Нарисуем треуго. внешне с полукр. информацией:



$$\angle ABC = \beta, \alpha + \beta = 90^\circ$$

$$\angle O_1AB = 90^\circ, \angle CAB = \alpha$$

$$\Rightarrow \angle O_1AC = \beta$$

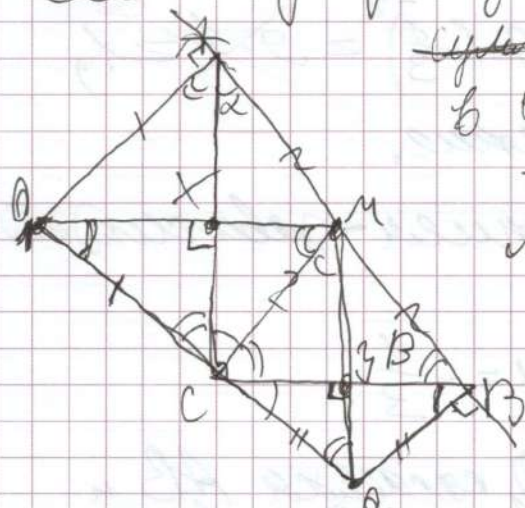
$$\triangle O_1AC - \text{пр} \Rightarrow \angle O_1CA = \beta$$

$$\triangle AMC - \text{пр} \Rightarrow \angle ACM = \alpha$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \angle O_1CM = 90^\circ$$

проведем аналог. рассужд. для $\angle MCO_2$, полукр.,
что он тоже равен 90° . $\angle O_1CM + \angle O_2CM =$
 $= 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow C \in O_1O_2$.

~~Проверим~~ Проверим.



~~сумма углов 4-уг. 360°~~

в 4-уг. $AMCO$: $\angle OAM + \angle OCM$
 $= 180^\circ \Rightarrow$ около $AMCO$

можно впис. окр. \Rightarrow

$$\angle CO_1M = \angle CAM = \alpha \quad (\text{впис. углы})$$

$$(O_1M \perp AC = \alpha) \quad (O_2M \perp CB = \beta)$$

$$\angle O_1CA = \beta \Rightarrow O_1C = 90^\circ$$

$$\angle O_1CM = 90^\circ \Rightarrow \angle O_1MC = \beta$$

$$\text{аналогично } \angle O_2MC = \alpha \Rightarrow \angle O_1MO_2 = 90^\circ$$

$$AC = b; CB = a; AB = c.$$

O_1 и O_2 - центры в пр. треугольниках

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

$$\Rightarrow AX = XC \text{ и } CY = YB$$

$$a = c \cdot \sin \alpha$$

$$b = c \cdot \cos \alpha$$

$$S_{APBC} = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} c^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\text{из } \triangle O_1AX: O_1A \cdot \cos \beta = AX = \frac{b}{2} = O_1C \cdot \cos \beta = \\ = O_1C \cdot \sin \alpha$$

$$\text{из } \triangle BO_2Y: \frac{a}{2} = O_2C \cdot \cos \alpha \quad (\text{аналог})$$

MC - высота $\triangle O_1CO_2$

$$CM = \frac{1}{2} CO_1, \quad S_{O_1CO_2} = \frac{1}{2} CO_1 \cdot CO_2 = \frac{1}{2} CO_1 \cdot (CO_1 + CO_2)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} C \cdot \left(\frac{b}{2 \sin \alpha} + \frac{a}{2 \cos \alpha} \right) = \frac{C}{8} \left(\frac{b}{\sin \alpha} + \frac{a}{\cos \alpha} \right) =$$

$$= \frac{C}{8} \left(\frac{C \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{C \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha} \right) = \frac{C^2}{8} \left(\frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} \right) =$$

$$= \frac{C^2}{8} \cdot \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$$

$$\frac{S_{APBC}}{S_{O_1CO_2}} = \frac{\frac{1}{2} C^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\frac{C^2}{8} \cdot \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}} = \frac{8}{2} (\sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2 = (2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2 =$$

$$= (\sin 2\alpha)^2 +$$

$$\text{Отв: } (\sin 2\alpha)^2.$$

DATE OF EXAMINATION: 11/10/2019

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0$$

$$x-2 = 0$$

$$x = 2$$

$$x = 2$$

$$x = 2$$

$$x = 2$$

$$x = 2$$

$$x = 2$$

$$x = 2$$

$$x = 2$$

$$x = 2$$

$$x = 2$$

$$x = 2$$

$$x = 2$$

$$x = 2$$