

ШИФР

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

## Письменная работа

### Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике в 11 классе  
(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника СОЛЫННИН СЕРГЕЙ ДМИТРИЕВИЧ

Дата рождения

Школа № 38 район советский город Минский Новоряз  
(лицей)

Дата проведения 19.01.25

**Особые отметки** (Заполняется представителем оргкомитета) о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

+1 гербовик  
+1 чистовик  
+1 чистовик  
смена пасты  
+1 чистовик

#### Правила поведения

Участник очного тура олимпиады **обязан**:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

**Внимание.** Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады **запрещается**:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

**Внимание.** За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполняющуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному

заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

#### Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы. Нельзя делать исправления карандашом.

**Внимание!** Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады)



ШИФР

(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+	+ 1/2	<del>0</del>	<del>0</del>	<del>15</del>
20	20	10	3	0

Σ

53

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

N1  $2 \cos^4 x - \sin^3 x = 1$

↓

$$2 \cos^4 x - \sin^3 x = \cos^2 x + \sin^2 x$$

$$\cos^2 x (2 \cos^2 x - 1) - \sin^2 x (\sin x + 1) = 0$$

~~$$\cos^2 x (2(1 - \sin^2 x) - 1) - \sin^2 x (\sin x + 1) = 0$$~~

$$(1 - \sin^2 x)(2 \cos^2 x - 1) - \sin^2 x (\sin x + 1) = 0$$

$$(1 - \sin x)(1 + \sin x)(2 \cos^2 x - 1) - \sin^2 x (\sin x + 1) = 0$$

$$(1 + \sin x)((1 - \sin x)(2 \cos^2 x - 1) - \sin^2 x) = 0$$

I:  $1 + \sin x = 0$

$$\sin x = -1$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

II:  $(1 - \sin x)(2(1 - \sin^2 x) - 1) - \sin^2 x = 0$

$$(1 - \sin x)(1 - 2 \sin^2 x) - \sin^2 x = 0$$

$$1 - 2 \sin^2 x - \sin x + 2 \sin^3 x - \sin^2 x = 0$$

$$2 \sin^3 x - 3 \sin^2 x - \sin x + 1 = 0$$

Предположим  $\sin x = \frac{1}{2}$   $\frac{2}{8} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{2-6-4}{8} + 1 = -\frac{8}{8} + 1 = 0$ , значит предположение верно

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

2

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Выясним } \sin x = t, -1 \leq t \leq 1$$

$$2\sin^3 x - 3\sin^2 x - \sin x + 1 = 0$$

$$2t^3 - 3t^2 - t + 1 = 0$$

$$(t - \frac{1}{2})(2t^2 - 2t - 2) = 0$$

$$2t^2 - 2t - 2 = 0$$

$$t^2 - t - 1 = 0$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 1$$

$$\sqrt{5} > 1$$

, значение не берём

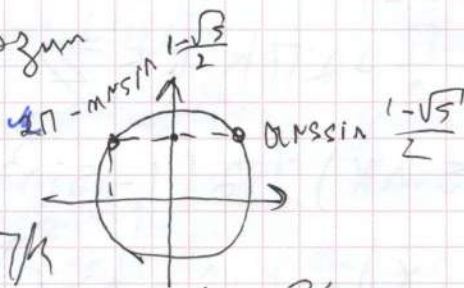
$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < -1$$

$$-\sqrt{5} < -3, \text{ не берём}$$

$$\sin x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$x = \arcsin \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + 2\pi k$$

$$x = \pi - \arcsin \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$



$$\text{Ответ: } x = \arcsin \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + 2\pi k; \pi - \arcsin \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + 2\pi k;$$

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \text{ где}$$

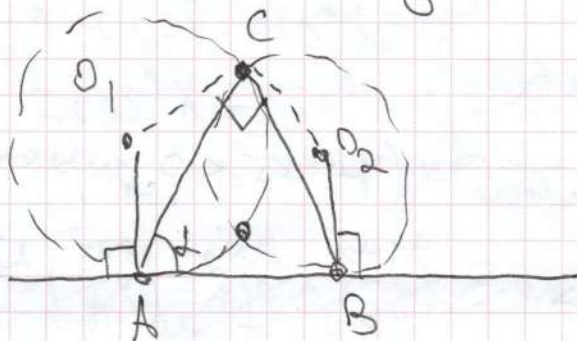
$$k \in \mathbb{Z}$$



11.2 (первая <sup>теорема</sup> ~~теорема~~, касающаяся касания к окружности)

1) Докажем, что окружности в поле 9  
с не пересекаются, а касаются.

1.2) Для этого рассмотрим обратное:



$$\angle B = 90^\circ - \alpha \text{ (из } \triangle ABC), \quad \angle B = \frac{1}{2} \angle BOC,$$

т.к. ~~свойство~~ (с-во  $\angle$  образованного касательной и хордой), тогда  $\angle CO_2B = 2\angle B = 180^\circ - 2\alpha$ ,  
оказавшимся  $\angle AO_1C = 2\alpha$ ;

1.3)  $\angle O_1AB = \angle O_2BA = 90^\circ$  (с-во радиуса, проведенного к точке касания)

1.4)  $\angle ABO_2CO_1$  - четырехугольник, значит  
сумма углов  $= 180^\circ \cdot 3$ , тогда:

$$\angle O_1CO_2 = 180^\circ \cdot 3 - 90^\circ - 90^\circ - 180^\circ + 2\alpha - 2\alpha =$$

$$180^\circ, \text{ значит точки } O_1, C, O_2 \text{ лежат}$$

на одной прямой, а это возможно  
только если две касаются (т.к.  $C$  —  
общая точка).

2)



### 11.3 (Часть I, продолжение на др. листе)

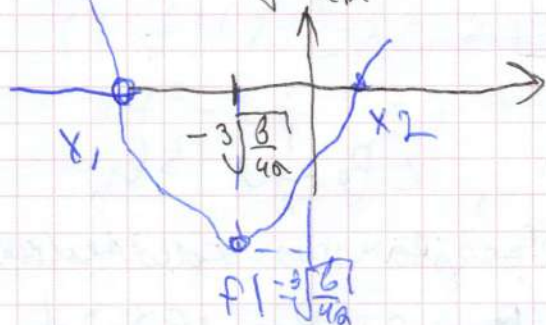
$$ax^4 + bx = c, \text{ где, что } a, b, c > 0$$

$$f(x) = ax^4 + bx - c$$

$$f'(x) = 4ax^3 + b$$

$$4ax^3 + b = 0$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{4a}}, \text{ где, что это число } < 0, \text{ поэтому}$$



где, что при любых

$$x > 0 \quad f' > 0, \text{ значит}$$

справа от  $-3\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$   $f(x) \uparrow$ ,

а слева  $\downarrow$ , может

где, что корней максимум два (как

на случае на рисунке). ~~Предположим,~~

что ~~корней~~  $< 2$  докажем, что корней

точно 2: н.к. ~~увеличим~~  $f(x) > 0$ ,

при достаточно больших и при доста-

точно ~~малых~~ отрицательных значений,

но достаточно докажем, что всегда найдется

такое  $x$ , что  $f(x) < 0$ , при  $x = 0$

$f(x) = -c, < 0$ , ~~значит~~ независимо от

значений  $a, b, c$ , н.к. они  $> 0$  всегда,

значит корней всегда 2.

\* при  $x \rightarrow \infty \quad f(x) \rightarrow +\infty$

$x \rightarrow -\infty \quad f(x) \rightarrow +\infty$

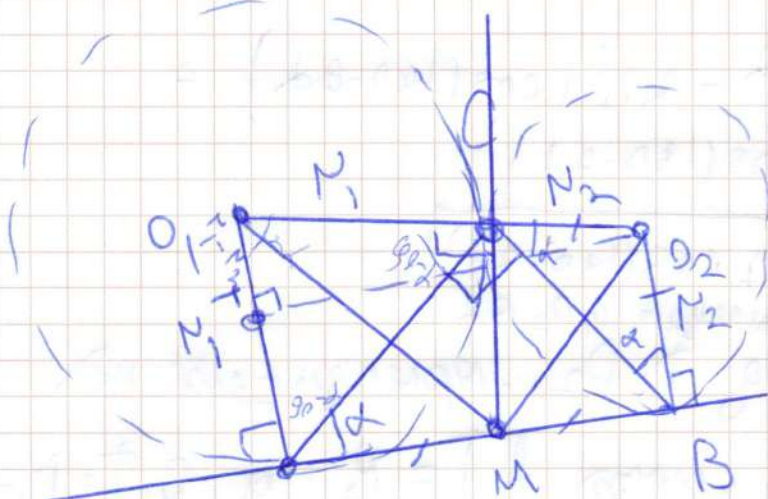


Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

11,2 (Вторая часть)

4

2) Нарисуем рисунок с косыми:



1) Проведем  $MC$ , так это медиана в  $\triangle ABC$ , но  $MC = MB = AM$ , так как  $MC$  — касательная к  $\odot O_1$  и  $\odot O_2$  по радиусу.

2) ~~Р.к~~  $MC$  касательная, но  $O_1C \perp MC$ ,  
по с-ву

3) из п.2  $\Rightarrow MC$  — высота в  $\triangle O_1O_2M \Rightarrow$

$$S_{\triangle O_1O_2M} = \frac{1}{2} MC \cdot O_1O_2 = \frac{1}{4} AB \cdot (N_1 + N_2)$$

$$4) S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot CB$$

$$5) \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle O_1O_2M}} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot CB}{\frac{1}{4} AB \cdot (N_1 + N_2)} = \frac{CB}{\frac{1}{2} (N_1 + N_2)} \cos \angle C$$

6)  $\angle CBA = 90^\circ - 2\alpha$  (из  $\triangle ABC$ ), тогда  $\angle O_2BC = 2\alpha$   
 $= \angle O_2CB$  (м.к.  $\triangle O_2CB$  - р/б по углам)

7)  $\angle CO_2B = 180 - 2\alpha$  (из п. 6)

8)  $\triangle CO_2BE$  Р. Косинусов:

$$CB^2 = R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2(\cos(180 - 2\alpha)) =$$

$$= 2R_2^2(1 - \cos(180 - 2\alpha))$$

$$CB = R_2 \sqrt{2 - 2\cos(180 - 2\alpha)}$$

\* прир. треугольн.  $O_1O_2BA$ :

9) Опустим из  $T$   $O_2$  перпендикуляр на  $BA$  ( $O_2T$ ), тогда  $AT = R_2$ , а  $O_1T = R_1 - R_2$ ,  
 а  $\angle CO_1A = 2\alpha$ , м.к. опущенное на гипотенузу,  
 тогда  $\angle CAB$  и смежный с ним угол.

10) \* прир.  $\triangle O_2O_1T$ :  $\cos \angle O_1 = \cos 2\alpha$   
 $= \frac{R_1 - R_2}{R_1 + R_2} \Rightarrow \cancel{R_1 \cos 2\alpha} + \cancel{R_2 \cos 2\alpha} = \cancel{R_1} - \cancel{R_2}$

$$R_1(\cos 2\alpha - 1) + R_2(\cos 2\alpha + 1) = 0$$

$$R_1 = \frac{R_2(1 - \cos 2\alpha)}{\cos 2\alpha - 1}$$

$$R_1 = R_2 \cdot \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} \quad R_2 = R_1 \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

11)  $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle O_1MO_2}} = \frac{R_2 \cdot \sqrt{2 - 2\cos(180 - 2\alpha)}}{\frac{1}{2}(R_2(1 + \frac{1 + \cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha}))} \cdot \cos \alpha$



Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle O_1 M P_2}} = \frac{\sqrt{2-2\cos(180-2\alpha)}}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}\right)} \cdot \cos \alpha$$

Аналогично:  $\frac{\sqrt{2(1-2\cos(180-2\alpha))}}{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}\right)} \cdot \cos \alpha$

Итого:  $\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}\right)$

Получаем корень:  $\frac{1}{3}$  - возводим,

и.к.  $3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = 1$  - верно.

Н1.3 (II часть)

Докажем, что корни разные знаков.

и.к.  $f(0) < 0$ , то второй корень правее 0, и.к. правее  $-\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$   $f(x) \uparrow$ ; при

этом первый корень левее  $-\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$ , и.к.

имеем из этого замечания  $f(x) \downarrow$ , значит корни разные знаков.

Докажем, что отрицательный корень <

положительный. По модулю, и.к. отрицательный корень левее  $-\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$ , то по модулю

он  $\geq -\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$ , при этом  $f\left(\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}\right) > 0$ , а значит

что положительный корень левее  $\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$ , значит

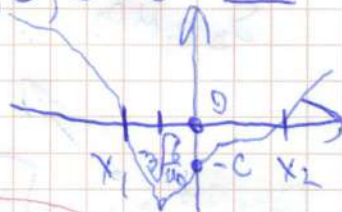


то модуль меньше  $\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$ , а значит меньше отрицательной формы.

Пр. 3  $ax^4 + bx + c$ , ясно, что  $a, b, c > 0$  М.

1) Возьмем  $f(x) = ax^4 + bx - c$

$$f'(x) = 4ax^3 + b$$



?  $f'(x) = 0$  при  $x = -\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$ , ясно, что это число  $> 0$ !, при  $x \rightarrow \infty$   $f(x) \rightarrow +\infty$   
 $x \rightarrow -\infty$   $f(x) \rightarrow +\infty$

Покажем, что в силу непрерывности функции если есть какой-то промежуток, где  $f(x) < 0$ , то корней 2

т.к. из-за того, что  $f'(x) = 0$  только в одной точке, то корней максимум 2

2)  $f(0) = -c < 0$ , значит корней минимум 2.

3) ясно, что слева от  $f(x)$  убывает до  $-\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$ , это значение т. мин.

а потом возрастает. Значит  $x_1$  лежит левее на числовой прямой чем  $-\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$ , а

значит  $x_1 < 0$ ; при этом  $f(x_1) < 0$ , а значит  $x_2$  правее 0, то есть  $x_2 > 0$ , значит корни разные.

4) Р.к.  $x_1$  левее  $-\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$ , то  $|x_1| > \sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$   
 $|x_1| > \sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$

что написано?



28

$a=c=2000$

$b=1$

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

5)  $m. n. F(\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}) > 0$  :  
отсюда

Некорректно при делении на  $a$ :

значим  $|x_2| < \sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$

Некорректно  
значим  $|x_2| < |x_1|$

~~$a(\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}) + b \leq c$~~

~~$a(\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}) + b \sqrt[3]{\frac{b}{4a}} \geq 0$~~

~~$a + b > c$~~

~~$\sqrt[3]{\frac{b}{4a}} (a \cdot \frac{b}{4a} + b) - c \geq 0$~~

~~$\sqrt[3]{\frac{b}{4a}} \cdot \frac{5b}{4} > c$~~

~~$\frac{5}{4} \cdot \sqrt[3]{\frac{b^4}{4a}} > c$~~

~~$\frac{5}{4} \sqrt[3]{b^4} \geq c \sqrt[3]{4a}$~~  берем

80



