

ШИФР

242

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по математике в 11 классе
(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Латасов Григорий Сергеевич

Дата рождения

Школа № 1223 район Коптево город Москва

Особые отметки (Заполняется представителем оргкомитета)
о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

+ Черновик
+ Чистовик

Дата проведения 19.01.2025

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады **обязан**:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады **запрещается**:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполняющуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному

заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы. Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов	Σ
+	+	+	-	-	
20	16	20	3	0	59

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№1 $2\cos^4 x - \sin^3 x = 1$

$$2(1 - \sin^2 x)^2 - \sin^3 x = 1$$

$$2 - 4\sin^2 x + 2\sin^4 x - \sin^3 x = 1$$

Пусть $\sin x = t \in [-1; 1]$, тогда

$$2t^4 - t^3 - 4t^2 + 1 = 0$$

$$2t^4 - t^3 - 4t^2 + 1 = (t+1)(t-\frac{1}{2})(2t^2 - 2t - 2) = 0$$

$$t = -1 \text{ или } t = \frac{1}{2} \text{ или } 2t^2 - 2t - 2 = 0$$

$$\sin x = -1$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$t^2 - t - 1 = 0$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$D = 1 + 4 \cdot 1 = 5$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$t_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow$$

корень не подходит

$$\sin x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{cases} x = \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \\ x = -\pi - \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi p, p \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$\arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi l, l \in \mathbb{Z}$$

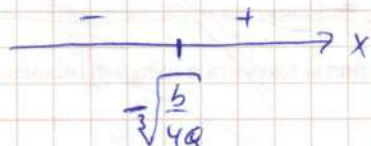
$$-\pi - \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi p, p \in \mathbb{Z}$$



№3 $ax^4 + bx - c = 0$, a, b и c — стороны $\triangle ABC \Rightarrow a, b, c > 0$

1) Введем $f(x) = ax^4 + bx - c$

$$f'(x) = 4ax^3 + b = 0 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$$



$x = -\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$ — точка минимума.

Заметим, что при $x \geq 1$ $a + b \geq c$, так как по неравенству треугольника сумма любых двух сторон больше третьей, то если и существует корень, то только при $x < 1$.

$$f(-\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}) = a \cdot \frac{b}{4a} \sqrt[3]{\frac{b}{4a}} - b \sqrt[3]{\frac{b}{4a}} - c = -\frac{3}{4} b \sqrt[3]{\frac{b}{4a}} - c < 0$$

Т.к. $f(x)$ монотонно убывает до т.к. $x = -\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$, то

существует ровно 1 отриц. корень $x_2 < -\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$

при $f(0) = -c < 0$, т.е. существует ровно 1 положительный корень, т.к. после $x = -\sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$ $f(x)$ монотонно возрастает. Пусть $x_1 < 0$, $x_2 > 0$. докажем, что

$|x_1| > |x_2|$. Мы уже доказали, что $x_2 \in (0, 1)$

~~Выясним, насколько велик x_2~~

Т.к. x_1 и x_2 корни, то $ax_1^4 + bx_1 = c = ax_2^4 + bx_2$

$$a(x_1^4 - x_2^4) = b(x_2 - x_1), \text{ и}$$

$$x_2 < 0; x_2 > 0 \Rightarrow b(x_2 - x_1) < 0,$$

$$\text{тогда } x_1^4 - x_2^4 < 0 \Rightarrow x_2^4 > x_1^4 \Rightarrow |x_2| > |x_1|$$

т.т.т.

№4 а) Пусть $x > 0$, тогда у уравнения $3 \cdot x^{6x} = 1$

$x > 1$ решений нет, т.к. $x^{6x} = \frac{1}{3}$ или $x^{6x} = 1$ Почему? или $x \geq 1$ больше или равно 1. Тогда $x \in (0; 1)$.

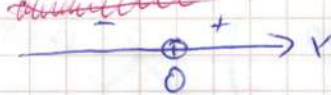
2) $\log_x x^{6x} = \log_x \frac{1}{3}$, заметим, что $x=1$ не реш-е, т.е. все ум-е выполняются для $x \in (0; 1)$

$$6x = \frac{1}{\log_3 x}$$

$$6x = -\frac{2}{\log_3 x}; \quad 3x = -\frac{1}{\log_3 x}$$

Введём $f(x) = \log_3 x$; $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln 3$

т.е. $\log_3 x$ монотонно

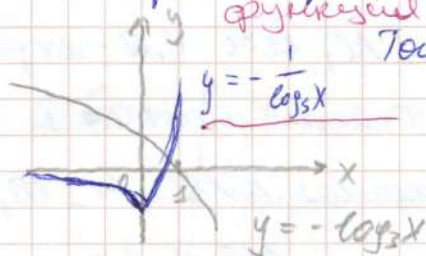


убывает $(-\infty; 0)$, на интервале $(0; 1)$ - возрастает, тогда $\frac{1}{\log_3 x}$ убывает $(0; 1)$, а $(-\frac{1}{\log_3 x})$ - возрастает от $(0; 1)$. $g(x) = 3x$ тоже возрастает на $(0; 1)$,

~~функция, если упрощаем, то получим уравнение~~
~~некорректно замечать, что это корни $x = \frac{1}{3}$~~

Важно отметить, что $x = -\frac{1}{3}$ - отрицательный корень ур-е $3x^{6x} = 1$ \Rightarrow ур-е имеет отрицательные корни

Нарисуем график $y = -\log_3 x$ (схематично)



~~функция не определена при $x < 0$ и разрывна при $x=1$~~

Тогда при $y = -\frac{1}{\log_3 x}$ ~~график~~ совсем не так.

будет выглядеть примерно так:

Видим, что $(0; 1)$ очень резко воз-?

растает \Rightarrow ~~много~~ много коэф. возрастания

больше, чем у прямой $y = 3x \Rightarrow$ будет 1 решение $x = \frac{1}{3}$

0, не может проходить через

O_2 и точки B.

радиусы, кров. в точку касания $\rightarrow O_1A \parallel O_2B \Rightarrow O_1ABO_2$ -
кривоуг. тр-ник.

$\triangle O, AC$ и $\triangle CO_2B$ - р/д,

$\text{Re} g < 0, A = 0, C = 1$ u

$$\angle CBO_2 = \angle BCO_2$$
$$\angle ABC = 90^\circ - \angle, \angle CBO_2 = \angle,$$
 $\angle BCO_2 = 2, \angle C = 80, \angle O_1CA =$
$$= 80 - 1 \Rightarrow O, C, O_2 \text{ не вст}$$

и 1 целой.

4) MQ - ср. линия $\triangle ABC \Rightarrow MQ \perp AC$, но $O, Q \perp AC$, следовательно O, Q - середина, в том числе высота $BO \perp AC \Rightarrow O, Q, M$ лежат на 1 прямой, $O, M \perp AC$. Аналогично MP - ср. линия $\triangle ABC$, $MP \perp CB$, $PO \perp BC \Rightarrow M, P, O$ лежат на 1 прямой и $MO \perp BC$

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

Продолжение решения задачи №2

5) Но значит $\angle QMP = 360 - (\angle MQC - \angle MPC - \angle C) = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle O_1MO_2$ - прямоугольный

6) ~~$O_1M = O_1Q + QM = AC \cdot \tan(90^\circ - \alpha) + \frac{BC}{2} = \frac{AC}{2} \cdot \cot \alpha + \frac{BC}{2}$~~

~~$O_2M = O_2P + MP = PB \cdot \tan \alpha + \frac{AC}{2} = \frac{BC}{2} \tan \alpha + \frac{AC}{2}$~~

7) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC$

$S_{\triangle O_1MO_2} = \frac{1}{2} O_1M \cdot MO_2$

$\tan \alpha = \frac{BC}{AC}; \cot \alpha = \frac{AC}{BC}$, тогда

~~$\left(\frac{BC}{2} \tan \alpha + \frac{AC}{2}\right) \left(\frac{AC}{2} \cot \alpha + \frac{BC}{2}\right) = \frac{1}{4} \left(\frac{BC^2}{AC} + AC\right) \left(\frac{AC^2}{BC} + BC\right) = \frac{1}{4} \left(\frac{BC^2 + AC^2}{AC \cdot BC}\right)^2$~~

8) $\frac{S_{ABC}}{S_{O_1MO_2}} = \frac{(AC \cdot BC)^2}{\frac{1}{4} (BC^2 + AC^2)} = \frac{4(AC \cdot BC)^2}{AB^2} = 4h^2$, где

~~h - высота $\triangle ABC$, проведенная из вершины C к AB .~~

6) $\triangle O_1MO_2 \sim \triangle ACB$ по 2 углам: $\angle O_1MO_2 = \angle ACB$ "90-к"

~~$\frac{O_1M}{AB} = \frac{O_2M}{AC} = \frac{MO_2}{BC} = k$ по подобиям.~~

$\angle O_1MO_2 = \angle CAB = \alpha$

$\frac{AB}{O_1O_2} = k$, где k - коэф. подобия

Но $\frac{S_{ABC}}{S_{O_1MO_2}} = k^2 = \left(\frac{AB}{O_1O_2}\right)^2$

7) Проведем $O_1M \perp O_2B$, тогда $O_1M \parallel AB$, ведь $AB \perp O_2B$ также.

$\angle O_1O_2B = 2\alpha$, тогда из $\triangle O_1O_2M$: $O_1M = O_1O_2 \cdot \sin 2\alpha$

Но $O_1M = AB$, т.к. $O_1A \parallel O_2B$, $O_1M \parallel AB$ и $\angle O_1MB = 90^\circ \Rightarrow$

O_1MBA - прямоугол., тогда $\frac{S_{ABC}}{S_{O_1MO_2}} = \left(\frac{AB}{O_1O_2}\right)^2 = \frac{\sin^2 2\alpha}{\sin^2 \alpha}$

Ответ: $\sin^2 2\alpha$

+

