

ШИФР

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИпо математике в 11 классе
(наименование общеобразовательного предмета)Фамилия И.О. участника Мамвеев Артём Яковлевич

Дата рождения

Школа № 1 район Сергиево-Посадский город Сергиев Посад**Особые отметки** (Заполняется представителем оргкомитета)
о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.+1 чистовик
+1 чистовик
+1 черновикДата проведения 19.01.25

заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы. Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.**С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен**

(подпись участника олимпиады)

Правила поведенияУчастник очного тура олимпиады **обязан**:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.Участнику олимпиады **запрещается**:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполняющуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному

ШИФР 041
(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+	+	+	+	—
20	20	8	8	0

Σ
56

Заполняется проверяющим

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№ 11.1.

$$2\cos^4 x - \sin^3 x = 1$$

по ОТТ: $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1^2$

$$2(1 - \sin^4 x - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x) - \sin^3 x = 1$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x = 1$$

$$2 - 2\sin^4 x - 4\sin^2 x(1 - \sin^2 x) - \sin^3 x = 1$$

$$\cos^4 x = 1 - \sin^4 x - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$1 - 2\sin^4 x - 4\sin^2 x + 4\sin^4 x - \sin^3 x = 0$$

$$2\sin^4 x - \sin^3 x - 4\sin^2 x + 1 = 0$$

Замена! $\sin x = t, |t| \leq 1$

$$2t^4 - t^3 - 4t^2 + 1 = 0$$

$$(t - \frac{1}{2})(2t^3 - 4t - 2) = 0$$

$$(t - \frac{1}{2})(t + 1)(2t^2 - 2t - 2) = 0 \quad | :2$$

$$(t - \frac{1}{2})(t + 1)(t^2 - t - 1) = 0$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = -1 \\ t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Учитывая $|t| \leq 1$:

$$\begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = -1 \\ t = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Опр. замена:

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

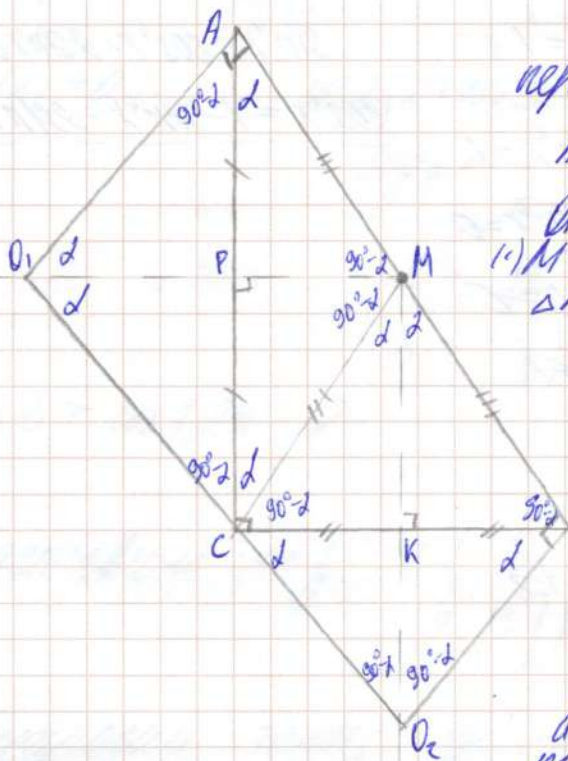
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



Ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pi - \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

№ 11.2.



Проведем срединные перпендикуляры к сторонам AC и BC: MP и MK.

Они пересекаются в (1) M, т.к. (1) M — центр опис. окруж-сти $\triangle ABC$.

Т.к. O_1, O_2 — центры окруж-стей, то O_1 будет лежать на отрезке AC, а O_2 на отрезке BC,

потому что $AO_1 = O_1C$ и

$CO_2 = O_2B$ как радиусы,

а значит O_1P и O_2K — биссектрисы, медианы и высоты в равностор. $\triangle O_1AC$ и O_2CB .

Более того, т.к. окр. с центром O_1 касается AB, то касание происходит в (1) A $\Rightarrow O_1A \perp AB$.

Аналогично с окр. с центром O_2 : $O_2B \perp AB$.

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BE$ Обозначим на картинке равные углы:

$$\angle MAC = \angle ACM = \angle AO_1P = \angle CO_1P = \angle O_2CB = \angle O_2BC = \alpha$$

($\triangle AMC$ — р.т.) ($\triangle CO_1A$ — р.т.) $\angle CMK = \angle KMB$.

$$\begin{aligned} \triangle APM: \quad \tan \alpha &= \frac{PM}{AP} = \frac{\frac{1}{2} BE}{\frac{1}{2} AC} = \frac{BE}{AC} \\ \triangle O_1PE: \quad \tan \alpha &= \frac{PE}{O_1P} = \frac{\frac{1}{2} AC}{O_1P} \end{aligned} \Rightarrow \frac{BE}{AC} = \frac{AC}{2AP}$$

$$|OP = \frac{AC^2}{2BC}|$$

$$\triangle ABC: \operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC}$$

$$\triangle O_2KB: \operatorname{tg} \alpha = \frac{O_2K}{BK} = \frac{O_2K}{\frac{1}{2}BC}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{2O_2K}{BC}$$

$$|O_2K = \frac{BC^2}{2AC}|$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC$$

$$S_{\triangle O_1MO_2} = \frac{1}{2} O_1M \cdot MO_2 = \frac{1}{2} (O_1P + PM)(MK + KO_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{AC^2}{2BC} + \frac{1}{2}BC \right) \cdot \left(\frac{BC^2}{2AC} + \frac{1}{2}AC \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{AC^2 + BC^2}{2BC} \right) \left(\frac{BC^2 + AC^2}{2AC} \right)$$

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle O_1MO_2}} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot BC}{\frac{1}{2} \cdot \frac{(AC^2 + BC^2)^2}{4BC \cdot AC}} = \frac{4AC^2 \cdot BC^2}{(AC^2 + BC^2)^2} = \frac{4AC^2 \cdot BC^2}{AB^4} =$$

по т. Пифагора в $\triangle ABC$: $AB^2 = AC^2 + BC^2$

$$= 4 \cdot \frac{AC^2}{AB^2} \cdot \frac{BC^2}{AB^2} = 4 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \sin 2\alpha \cdot \sin 2\alpha = \sin^2 2\alpha$$

Ответ: $\sin^2 2\alpha$

Примечание: не использован факт, что O_1, O_2 с лежат на одной прямой, но это верно, т.к. $\angle O_1CO_2 = 2\alpha + 2\alpha + 90^\circ - 2\alpha + 90^\circ - 2\alpha = 180^\circ$.

н.п. $9 \cdot x^{\lg x} = 1$ $x > 0$

Прологарифмируем обе части ур-я по основанию 9:

$$\log_9(x^{\lg x}) = \log_9\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$\lg x \cdot \log_9 x = -1$$

Тип $x \geq 1$: $\log_9 x \geq 0$ $\begin{matrix} 6x > 0 \\ \hline \end{matrix} \Rightarrow 6x \cdot \log_9 x > 0 \Rightarrow$

\Rightarrow ур-е $6x \cdot \log_9 x = -1$ не имеет корней,
~~значит не имеет~~ больше 1 и $x=1$ - не пересек.
 Почему?

Тип $x \in (0; 1)$: Рассмотрим до-ю $f(x) = 6x \cdot \log_9 x$
 $f'(x) = 6 \cdot \log_9 x + \frac{6x}{x \cdot \ln 9} = \frac{6x \cdot \log_9 x \cdot \ln 9 + 6x}{x \cdot \ln 9} \quad (x \neq 0)$
 $\ominus \frac{6(\log_9 x \cdot \ln 9 + 1)}{\ln 9}$

$f'(x) = 0$: $\log_9 x \cdot \ln 9 = -1$
 $\log_9 x = -\frac{1}{\ln 9}$

$x = 9^{-1/\ln 9}$

$x = \left(\frac{1}{9}\right)^{1/\ln 9}$

$\ln 9 > \ln 4.29 = 2$

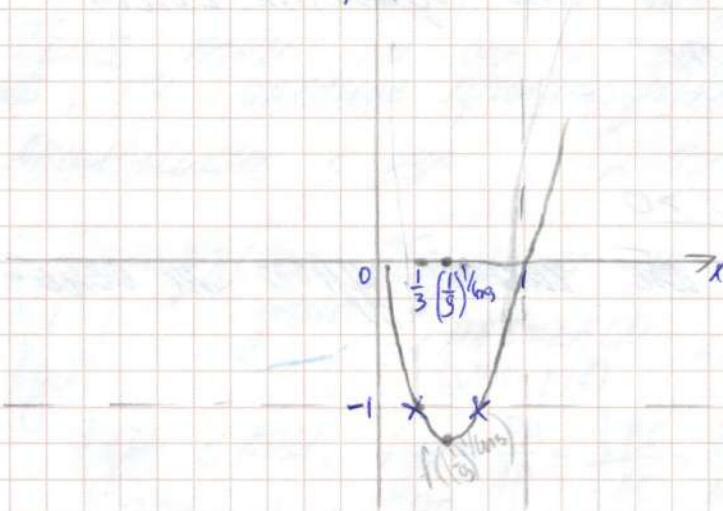
$\Rightarrow \left(\frac{1}{9}\right)^{1/\ln 9} > \left(\frac{1}{9}\right)^{1/2}$
 $\left[\frac{1}{9}\right]^{1/\ln 9} > \frac{1}{3}$

Подставим $x = \frac{1}{3}$: $6 \cdot \frac{1}{3} \cdot \log_9 x = -1$

$2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \stackrel{\text{D}}{=} -1 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$ - корень ур-я

Построим эскиз гр-на $f(x)$:

$f(x)$: $- \quad +$
 $f'(x)$: $\searrow \quad \nearrow$
 $\Rightarrow x = \left(\frac{1}{9}\right)^{1/\ln 9}$ - точка минимума



графика недостаточно

Из гр-на очевидно,
 что корней при $x \in (0; 1)$
 два!

Ответ: а) 2.

№11.3 $ax^4 + bx = c$

1) т.к. a, b, c - стороны треугольника, то воспользуемся неравенством треугольника:

$$a + b - c > 0$$

$$ax^4 + bx - c = 0 \quad | \Rightarrow \text{при } x \geq 1 \text{ ур-е не имеет корней. (подобное)}$$

2) воспользуемся еще одним нер-вом треугольника:

$$b + c - a > 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$a - b - c < 0$$

при $x \in [-1, 0]$: $ax^4 + bx - c = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - b - c < 0 \\ a - b < c \end{cases} \Rightarrow ?$$

отсюда? как это следует при отрицательных $x+1$?

$$ax^4 + bx - a + b < 0$$

$$a(x^4 - 1) + b(x + 1) < 0$$

$$a > 0, b > 0, (x^4 - 1) \geq 0, (x + 1) \geq 0 \Rightarrow$$

это неверно:
пример
 $a = 2, b = 3, c = 4$
 $x = -0.01$

$$\begin{cases} a(x^4 - 1) + b(x + 1) < 0 \\ a(x^4 - 1) + b(x + 1) \geq 0 \end{cases} - \text{противоречие}$$

\Rightarrow при $x \in [-1, 0]$ ур-е не имеет корней.

Итого из 1) и 2) \Rightarrow ур-е ~~не имеет~~ может иметь корни такие, что $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$

Рассмотрим функцию $f(x) = ax^4 + bx - c$.

$$f'(x) = 4ax^3 + b$$

$$f'(x) = 0: \quad x^3 = -\frac{b}{4a}, \quad x = \sqrt[3]{-\frac{b}{4a}} - \text{единственная точка минимума} \Rightarrow$$

$f(x)$ - неубывающая, ~~всего~~

$\Rightarrow f(x)$ максимум где, куда пересекается ось x (максимум для решения)

Таким образом
всегда
непрерывно
(а факт
верно!)

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

Мн. б. отрицательных корней нет, т.к.

$$a \cdot x^{ak} = 1$$

При некотором $x < 0$ б. может случиться ситуация $\sqrt[ak]{m}$, где $m < 0$, $ak \in \mathbb{N}$.

(т.е. под корнем чётной степени стоит число < 0 (?))

При остальных же ~~вынужденных~~ значениях $x < 0$ значение выражения x^{ak} будет меньше нуля

(т.е. под корнем нечёт. степени ~~не~~ ~~нечётное~~ число \Rightarrow \Rightarrow $a \cdot \text{нечёт} \neq 1$).

б) отрицательные корни:

при подстановке $x = -\frac{1}{3}$ $a \cdot x^{ak} \neq 1$

отрицательных корней нет, потому что при подстановке отриц. x в x^{ak} мы получаем противоречие по ОДЗ (а* при $a > 0, a \neq 1$) не всегда

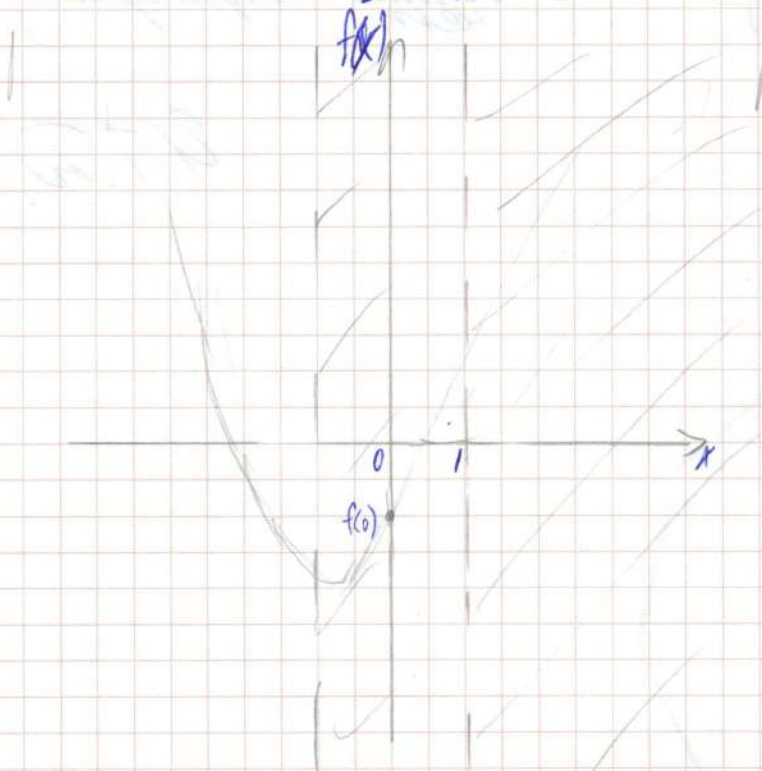
или при логарифмировании выйдет из ОДЗ логарифма, если $x > 0$, ~~т.е.~~ ~~логарифмирование~~ это

Ответ: б) нет

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

п.п. 3 (продолжение)

Начертим эскиз гр-на $f(x) = ax^4 + bx - c$



Заштрихованные
 области - области,
 не содержащие
 корней в интервале
 $f(x) \neq 0$
 (доказали ранее)

~~т.к. $c > 0$, то $\forall c$ найдется такое x , чтобы $ax^4 \neq$~~

~~c = const, $c > 0 \Rightarrow$ подставив очки~~
~~наибольшее значение $x \in (0, 1)$, для~~

~~$f(0) = -c$, $c = \text{const}$, $c > 0 \neq$~~

~~гр-я $f(x)$ непрерывная~~

~~при $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$~~

~~при $x \rightarrow -\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$~~

\Rightarrow
 почему при $x < 0$
 есть ровно 1
 корень?

\Rightarrow очевидно (по гр-ду), что гр-я $f(x)$
 обязана ровно по разу пересечь
 ось x в промежутках

~~т.к. одна точка минимума~~
~~т.е. $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $x_3 = 0$ корни~~

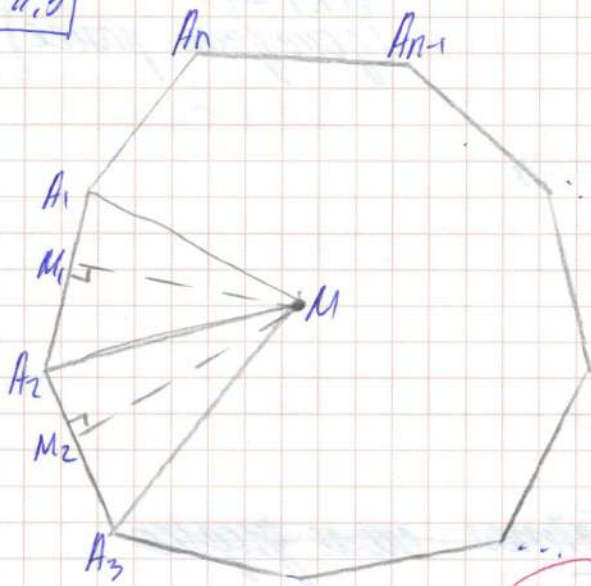
$x \in (-\infty; -1)$ и
 $x \in (0; 1)$ \Rightarrow
 все, все, все

⑤ Пусть x_1, x_2 - корни ур-я $ax^2 + bx + c = 0$
 $x_1 < 0, x_2 > 0 \Rightarrow x_1 \in (-\infty, -1), x_2 \in (0, 1) \Rightarrow$
 $x_1 \Rightarrow |x_1| > |x_2|$ Почему!

Вывод: равно α корни (т.к. одна точка минимума и больше экстремумов)
 x_1 и x_2 , и $|x_1| > |x_2|$
 $x_1 < 0$
 $x_2 > 0$

Ч.Т.Д.

№11.5



Частный случай: если $2A_i M_i = A_i A_{i+1}$, то
 $4A_i M_i^2 = A_i A_{i+1}^2 \Rightarrow$ и длины
 тангенс тангенсов равны \Rightarrow в треуголь-
 нике вида $\triangle A_i A_{i+1} M$ медиана будет равна
 высоте \Rightarrow тангенс треуго. равнобедр. \Rightarrow
 $\Rightarrow A_1 M = A_2 M = \dots = A_n M \Rightarrow M$ - центр опис. окруж-
 ности (точка пересечения окружностей)