

ШИФР

913

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

по МАТЕМАТИКЕ в 11 классе
(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Лиценер Кирилл Сергеевич

Дата рождения

Школа № 2 район - город Дзержинск

Особые отметки (Заполняется представителем оргкомитета) о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

+1 чистовик

Дата проведения 19.01.2025

Правила поведения

Участник очного тура олимпиады **обязан**:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады **запрещается**:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполняющуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному

заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы. Нельзя делать исправления карандашом.

Внимание! Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады)

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

N 11.1) $2 \cos^4 x - \sin^3 x = 1$

$$2 \cos^4 x - \sin^3 x = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$2 \cos^4 x - \cos^2 x - \sin^3 x - \sin^2 x = 0$$

$$\cos^2 x (2 \cos^2 x - 1) - \sin^2 x (\sin x + 1) = 0$$

$$(1 - \sin^2 x) (2(1 - \sin^2 x) - 1) - \sin^2 x (\sin x + 1) = 0 \quad (\text{no OTT})$$

$$(1 - \sin^2 x) (1 - 2 \sin^2 x) - \sin^3 x - \sin^2 x = 0$$

$$1 - 2 \sin^2 x - \sin^2 x + 2 \sin^4 x - \sin^3 x - \sin^2 x = 0$$

$$2 \sin^4 x - \sin^3 x - 4 \sin^2 x + 1 = 0$$

Пусть $t = \sin x$, т.е. $2t^4 - t^3 - 4t^2 + 1 = 0$

Заметим, что $t = \frac{1}{2}$ подходит: $2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{8} - 4 \cdot \frac{1}{4} + 1 = 0$ (✓)

$t = -1$ подходит: $2 + 1 - 4 + 1 = 0$ (✓)

т.е. $(t - \frac{1}{2})(t + 1)(2t^2 - 2t - 2) = 0 \quad | :2$

$$(t - \frac{1}{2})(t + 1)(t^2 - t - 1) = 0$$

т.е. $t = \frac{1}{2}$

$t = -1$

$t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Тогда $\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} & (1) \end{cases}$

$\begin{cases} \sin x = -1 & (2) \end{cases}$

$\begin{cases} \sin x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} & (3) \end{cases}$

$\begin{cases} \sin x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} & (4) \end{cases}$

(1): $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

(2): $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

(3): $2 < \sqrt{5} \Leftrightarrow 3 < 1 + \sqrt{5}$

т.е. нет решений

т.е. $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} > \frac{3}{2} > 1$

т.е. ~~нет решений~~

$-1 \leq \sin x \leq 1$

(4): $2 < \sqrt{5} < 3 \Leftrightarrow -3 < -\sqrt{5} < -2 \Leftrightarrow -2 < 1 - \sqrt{5} < -1 \Leftrightarrow -1 < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < -\frac{1}{2}$

N 11.1 продолжение: $-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < -\frac{1}{2}$

т.е. такое значение синуса существует

$$x = \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi k,$$

$$x = \pi - \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Тогда получаем:

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x = \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi k, \\ x = \pi - \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi k, \end{cases}$$



$$k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,$$

$$x = \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi k,$$

$$x = \pi - \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi k,$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

N 11.4 $a \cdot x^{6x} = 1$ Пусть $f(x) = a \cdot x^{6x}$

исследуем $f(x)$:

При $x \in (0; 1)$: x^t убывает при $t \uparrow$

$x \uparrow \Rightarrow 6x$ тоже? возрастает. Т.е. x^{6x} убывает

эта функция не монотонная

т.е. нужное значение принимается не более 1 раза

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = a \cdot \frac{1}{9} = 1 \quad \text{т.е.}$$

нужное значение принимается ровно 1 раз

При $x=0$: $a \cdot 0^0 \neq 1$

значение не определено
 $f(0)$ не определено

При $x=1$: $a \cdot 1^6 = a$

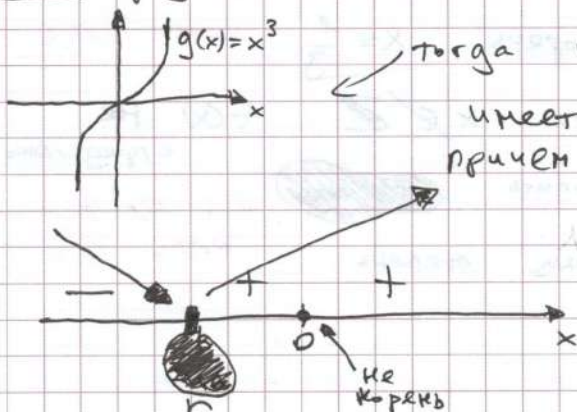
При $x \in (1; +\infty)$: x^m возрастает при $m \uparrow$

убывает

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

11.3 продолжение 1; т.е. $-\frac{b}{4a} < 0$ ($a, b, c > 0$)

тогда очев, что $x^3 = -\frac{b}{4a}$ имеет только один корень, причем отрицательный назовем его r



тогда при $x > 0$ $f(x) \uparrow$

$$f(0) = 0 < c \text{ т.к. } c > 0$$

$$f(1) = a + b > c \text{ по нер-ву треугольника } ABC$$

т.е. при $x > 0$ есть только один корень и он

принадлежит $(0; 1)$

~~$f(1) = a + b > c$ по нер-ву $\triangle ABC$: $a < b + c$
 $b < a + c$
 $c < a + b$~~

при $x \in [r; 0]$ $f(x) \uparrow$, причем $f(0) < c$
(т.е. максимум в $x=0$, но $f(0) < c$)
т.е. на $[r; 0]$ нет корней

при $x \in (-\infty; r]$ $f(x) \downarrow$ очев, что мы можем
взять настолько большие по модулю и отрицательные x ,
что $ax^4 + bx > c$ (т.к. a, b, c — ^{положит.} константы), то при

$x < r$ уменьшая x мы увеличиваем левую часть)

$$f(-1) = a - b$$

по нер-ву $\triangle ABC$: $a < b + c \Leftrightarrow a - b < c \quad f(-1) < c$

~~тогда при $x < -1$ $f(x) > c$ по нер-ву $\triangle ABC$: $a < b + c \Leftrightarrow a - b < c$~~

11.4 продолжение

$x^4 \Rightarrow 6x$ тоже возрастает, т.е. x^{6x} возрастает

т.к. $f(1) = 9$ т.е. $f(1) > 1$, то

$f(x) > 1$ при $x \in (1; +\infty)$ т.е. корней нет ✓

а) тогда при $x > 0$: 1 корень: $x = \frac{1}{3}$ есть еще корни!

б) при $x < 0$: очев при $x \notin \mathbb{Z}$ $f(x)$ не определено

т.к. мы не умеем возводить

отриц. гроби в отриц. степень

при $x \in \mathbb{Z}$:

$$x^{6x} = \frac{1}{x^{-6x}}$$

т.к. $x < 0$, то $-6x > 0$ и очев четно

т.е. $x^{-6x} > 0$, а т.к. $x < 0$ и $x \in \mathbb{Z}$, то

$$x \leq -1 \quad \text{т.е.} \quad x^{-6x} \geq 1$$

тогда $\frac{1}{x^{-6x}} \leq 1$, причем $f(x) = 1$ достигается

только при $x^{-6x} = 1$ т.е. при $x = -1$

(при других $x \leq -2$ и $-6x \geq 12$ и $-6x$ четно)
 $x^{-6x} \geq (-2)^{12}$ т.е. $x^{-6x} \geq 2^{12} > 1$

т.е. при $x < 0$ есть 1 корень, это $x = -1$

Ответ: а) 1 полож. корень

б) есть, $x = -1$

11.3 $ax^4 + bx \neq c$

Пусть $f(x) = ax^4 + bx$

$$f'(x) = 4ax^3 + b$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^3 = -\frac{b}{4a}$$

$$4ax^3 + b = 0$$

$$a, b, c > 0$$

(стороны треугольника)

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№11.3 продолжение 2: т.е. $f(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow -\infty$

т.е. на $(-\infty; r]$ \exists такое k , что

$$f(k) > c$$

Нам не важно больше r чем -1 или меньше:

при $r > -1$:



$$f(-1) < c$$

$$f(k) > c, \text{ где } k \in (-\infty; r]$$

(т.е. очев $k < -1$)

т.е. на $(-\infty; -1)$ \exists корень

причем только один

при $r = -1$:



$$f(-1) < c$$

$$f(k) > c, \text{ где } k \in (-\infty; r] \text{ (т.е. очев } k < -1)$$

тогда на $(-\infty; -1)$ \exists корень причем только один

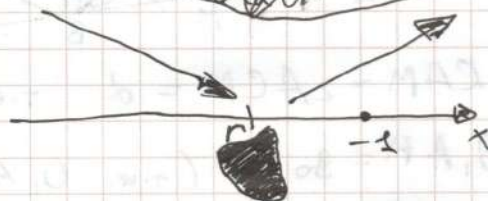
тогда \exists только два корня: $x_1 \in (0; 1)$

$x_2 \in (-\infty; -1)$. Т.к. один полож., другой отриц., то

они действительно разных знаков и по промежуткам

очевидно, что модуль отриц. корня действительно больше

при $r < -1$



$$c > f(-1) > f(r)$$

$$\text{т.е. } f(r) < c$$

$$f(k) > c, \text{ где } k \in (-\infty; r] \text{ (т.е. очев } k < -1)$$

т.е. на $(-\infty; -1)$

\exists корень, причем только один



№11.3 продолжение 3: модуль полож. корни.

т.к. при $x_1 \in (0; 1)$ и $x_2 \in (-\infty; -1)$

$$|x_2| > 1$$

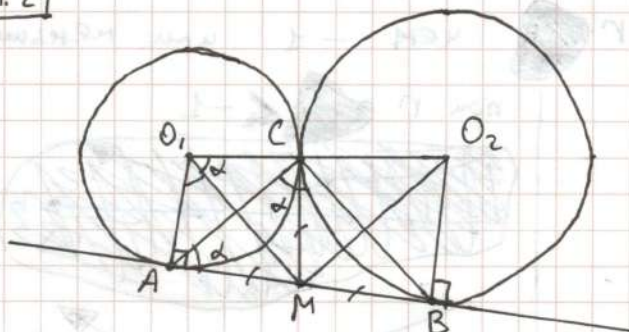
$$|x_1| < 1$$

т.е.

$$|x_1| < |x_2|$$

Ч. Т. Д.

№11.2



$$\angle CAM = \angle ACM = \alpha \quad \text{т.е. по } \angle \triangle ACM: \angle AMC = 180 - 2\alpha$$

$$\angle O_1AM = 90 - \alpha \quad (\text{т.к. } O_1A \text{ радиус, проведен в т. касания})$$

$$O_1A = O_1C \text{ как радиусы} \Rightarrow \triangle AO_1C \text{ р/б}$$

$$\text{т.е. } \angle CAO_1 = \angle O_1CA = 90 - \alpha$$

$$\text{по } \angle \triangle AO_1C: \angle AO_1C = 180 - 2(90 - \alpha) = 2\alpha$$

$$\text{т.е. } AO_1CM \text{ впис, т.к. } \angle \text{противополож углов} = 180^\circ$$

Аналогично доказываем, что $MC O_2B$ впис.

$$\angle CAM = \angle M O_1C = \alpha \quad \left. \begin{array}{l} \angle ACM = \angle A O_1M = \alpha \end{array} \right\} \text{из впис-ти } A O_1CM$$

$$\angle CAM = \angle M O_1C = \alpha$$

$$\text{т.е. } \angle A O_1M = \angle M O_1C = \alpha \quad \text{т.е. в р/б } \triangle A O_1C$$

O_1M - биссек, медиана, высота

аналогично доказываем, что O_2M биссек, медиана, высота в р/б $\triangle C O_2B$

обозначим середины AC и CB как N и K соотв

$$NK - \text{ср лин } \triangle O_1M O_2 \text{ и } \triangle ACB \quad \text{т.е. } NK = \frac{1}{2} O_1O_2 = \frac{1}{2} AB$$

$$\text{т.е. } O_1O_2 = AB \text{ проведем } CN_1 \text{ и } MN_2 - \text{высоты к } AB \text{ и } O_1O_2$$