

ШИФР

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

## Письменная работа

### Межрегиональная олимпиада школьников БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИ

ПО математике В 11 классе  
(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника Ладиков Александр Сергеевич

Дата рождения

Школа № лицей 38 район Советский город Нижний Новгород

**Особые отметки** (Заполняется представителем оргкомитета) о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

+ чистовик

Дата проведения 19.01.2025

#### Правила поведения

Участник очного тура олимпиады **обязан**:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

**Внимание.** Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады **запрещается**:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

**Внимание.** За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполнявшуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному

заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

#### Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы. Нельзя делать исправления карандашом.

**Внимание!** Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады)



ШИФР

230

(заполняется сотрудником секретариата)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+	+	+1/2	-	-
18	18	12	3	0

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

N1

лист 1

$\Sigma = 51$

$$2 \cos^4 x - \sin^3 x = 1$$

$$2 (\cos^2 x)^2 - \sin^3 x = 1$$

$$2 (1 - \sin^2 x)^2 - \sin^3 x = 1$$

$$2 (1 + \sin^4 x - 2 \sin^2 x) - \sin^3 x = 1$$

$$2 + 2 \sin^4 x - 4 \sin^2 x - \sin^3 x = 1$$

$$2 \sin^4 x - \sin^3 x - 4 \sin^2 x + 1 = 0$$

Заменим:  $\sin x = t$ ;  $t \in [-1; 1]$

$$2t^4 - t^3 - 4t^2 + 1 = 0$$

замечаем, что  $t = -1$  является корнем и поделим многочлен на  $t+1$ :

$$(t+1)(2t^3 - 3t^2 - t + 1) = 0$$

$$t = \frac{1}{2} - \text{корень: } \begin{array}{r} 2t^3 - 3t^2 - t + 1 \mid t - \frac{1}{2} \\ \underline{-2t^3 + t^2} \phantom{-t + 1} \\ -2t^2 - t + 1 \phantom{0} \\ \underline{-2t^2 + t} \phantom{0} \\ -2t + 1 \phantom{0} \\ \underline{-2t + 1} \\ 0 \end{array}$$

Уравнение примет вид:

$$(t+1)(t - \frac{1}{2})(2t^2 - 2t - 2) = 0$$

$$2(t+1)(t - \frac{1}{2})(t^2 - t - 1) = 0$$

$$\begin{array}{r} 2t^4 - t^3 - 4t^2 + 1 \mid t + 1 \\ \underline{-2t^4 + 2t^3} \phantom{-4t^2 + 1} \\ 3t^3 - 4t^2 + 1 \phantom{0} \\ \underline{-3t^3 + 3t^2} \phantom{+1} \\ -t^2 + 1 \phantom{0} \\ \underline{-t^2 + t} \phantom{0} \\ t + 1 \phantom{0} \\ \underline{t + 1} \\ 0 \end{array}$$

$$t^2 - t - 1 = 0$$

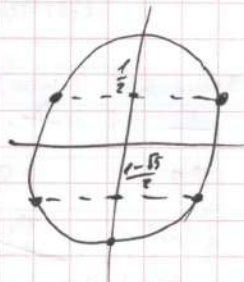
$$D = 1 + 4 \cdot 1 = 5; \sqrt{D} = \sqrt{5}$$

$$t_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 1$$

$$t_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \notin [-1; 1]$$

Обратная замена:

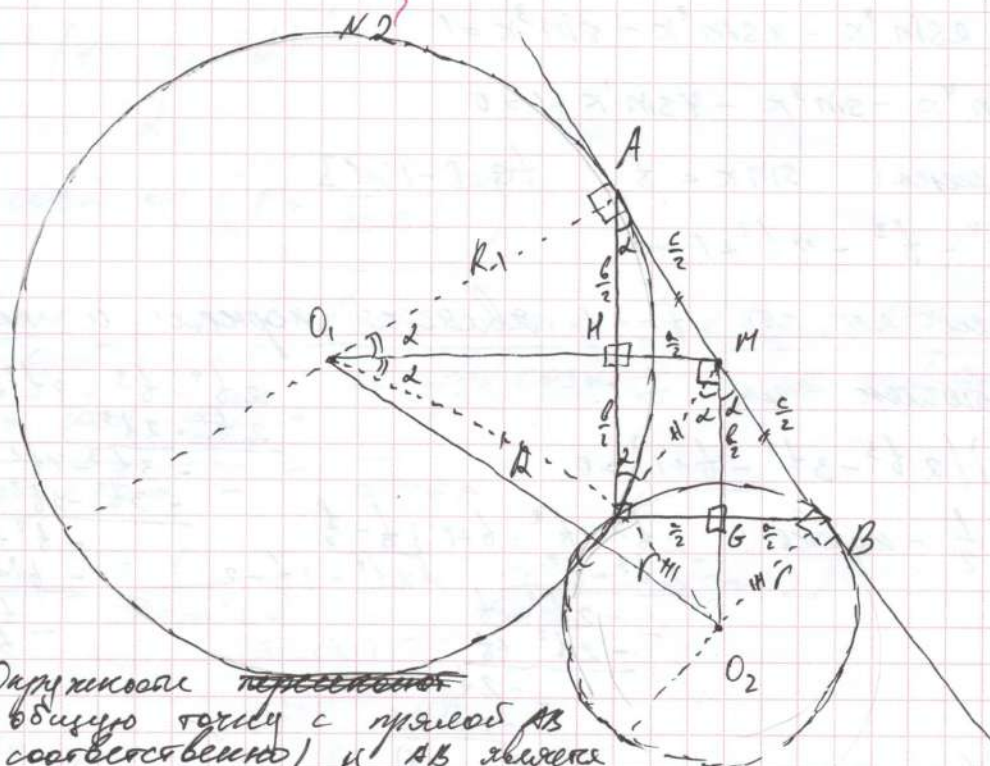
$$\begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ x = \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \\ x = \pi - \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) + \end{cases}$$



корней?



1. т. к. окружности ~~пересекаются~~ имеют общую точку с прямой AB (A и B соответственно), и AB является касательной для этих окружностей,  $\Rightarrow$  центры и вершины выглядят симметричным образом (см. рис).

2. Проведем радиусы  $O_1A$  и  $O_2B$  с точки касания:

$$\begin{aligned} O_1A \perp AB \\ O_2B \perp AB \end{aligned} \Rightarrow O_1A \parallel O_2B$$

3. CM - медиана из прямого угла  $\Rightarrow CM = AM = MB$  ( $CM = \frac{AB}{2}$ )  
Проведем радиус  $O_1C$ .



4. рассмотрим  $\triangle O, AM$  и  $\triangle O, CM$ :

$$\begin{array}{l} O, A = O, C \text{ (радиусы)} \\ AM = CM \text{ (п.3)} \\ O, M - \text{общая сторона} \end{array} \left| \begin{array}{l} \rightarrow \triangle O, AM = \triangle O, CM \Rightarrow \angle O, CM = 90^\circ \\ \Rightarrow \angle AO, M = \angle MO, C \Rightarrow \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$  в  $\triangle O, AC$   $OM$  - биссектриса  $\Rightarrow OM$  - высота  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow OM \perp AC$

5.  $MH \perp AC$  (п.4)  $\Rightarrow MH \parallel BC \Rightarrow \angle MCH = \angle CMG$   
 $BC \perp AC$

т.к.  $\triangle ABC$  -  $\triangle$ , то  $\angle MCH = \angle MAC =$   
 $= \angle CMG = \angle$

6. из равенства углов в п.5 следует, что  $AC \parallel MO_2$   
 ( $MC$  - секущая,  $\angle ACM = \angle CMO_2 = \angle$ )

7.  $AC \parallel MO_2 \Rightarrow MO_2 \perp BC$   
 $AC \perp BC$

8.  $\triangle CMG$  -  $\triangle$  ( $CM = MG$ )  $\Rightarrow \angle CMG = \angle GMB = \angle$

9. В четырехугольнике  $CHMG$ :  $\angle H = 90^\circ = \angle C = \angle G \Rightarrow \angle M = 90^\circ$   
 $\Rightarrow \triangle O, MO_2$  - прямоугольный.

10. Пусть  $AC = b$ ;  $AB = c$ ;  $BC = a$ . исходя из этого расставим на рисунке длины отрезков.

11. из подобия  $\triangle O, AM$  и  $\triangle AMM$ , а также  $\triangle MO_2, B$  и  $\triangle MBG$  следует:

$$\begin{cases} \frac{c}{2O, M} = \frac{a}{c} \\ \frac{c}{2O_2 M} = \frac{b}{c} \Rightarrow O, M \cdot \lg 2 = O_2 M \\ a = b \cdot \lg 2 \quad \lg 2 = \frac{O_2 M}{O, M} \quad (2) \end{cases}$$

Из утверждения (2) следует, что  $C \in O, O_2$ ,

а также, что  $\triangle O, MO_2$  подобен  $\triangle ABC$ .  $\Rightarrow$  если  $k$ -коэф. подобия, то

$$\frac{S_{O, MO_2}}{S_{ABC}} = k^2; \quad O, O_2 = R + r, \text{ если } R \text{ и } r \text{ радиусы окружностей с центрами } O, \text{ и } O_2 \text{ соответственно.}$$

12. По с. косинусов в  $\triangle CO_1A$ :

$$b^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos 2\alpha; \quad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$$

$$b^2 = 4R^2 \sin^2 \alpha$$

$$b = 2R \sin \alpha$$

$$R = \frac{b}{2\sin \alpha}$$

По с. косинусов в  $\triangle CO_1B$ :

$$a^2 = 2r^2 - 2r^2 \cdot \cos(180 - 2\alpha)$$

$$a^2 = 2r^2 (1 - \cos(180 - 2\alpha))$$

$$a^2 = 2r^2 (1 + \cos 2\alpha)$$

$$a^2 = 2r^2 (1 + 1 - 2\sin^2 \alpha)$$

$$a^2 = 4r^2 (1 - \sin^2 \alpha)$$

$$a^2 = 4r^2 \cos^2 \alpha$$

$$a = 2r \cos \alpha \Rightarrow r = \frac{a}{2\cos \alpha}$$

$$13. k = \frac{R+r}{c} = \dots = \frac{b \cos \alpha + r \sin \alpha}{2c \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{b (\cos \alpha + \frac{a}{2\cos \alpha} \cdot \sin \alpha)}{2c \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha} =$$

$$= \frac{\cos^2 \alpha + \cos \alpha \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha}$$

$$14. \frac{S_{O_1MO_2}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4 \sin^2 2\alpha} \quad \text{или} \quad \frac{S_{O_1MO_2}}{S_{O_1MO_2}} = \cancel{4 \sin^2 2\alpha}$$

откуда 4  
было 14

$$9 \cdot x^{6x} = 1 \Rightarrow x^{6x} = \frac{1}{9} \quad \text{запомним, что } x = \frac{1}{3}$$

хвостике поправил

$$f(x) = 9 \cdot x^{6x}$$



Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№ 3

Лист 2.

$$ax^4 + bx - c$$

$$ax^4 + bx - c = 0$$

$$f(x) = ax^4 + bx - c$$

$$f'(x) = 4ax^3 + b$$

$$f'(x) = 0: 4ax^3 = -b$$

$$x^3 = \frac{-b}{4a}, \quad \begin{matrix} a > 0 \\ b > 0 \end{matrix} \Rightarrow x^3 < 0 \Rightarrow x < 0$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{-b}{4a}}$$

Производная обращается в нуль в единственной точке, причем  $x_0 = \sqrt[3]{\frac{-b}{4a}}$  — точка минимума.

$$f(x_0) = a \left( \sqrt[3]{\frac{-b}{4a}} \right)^4 + b \sqrt[3]{\frac{-b}{4a}} - c = a \cdot \left( \frac{-b}{4a} \right)^{\frac{4}{3}} + b \cdot \left( \frac{-b}{4a} \right)^{\frac{1}{3}} - c =$$

$$= a \cdot \frac{(-b)^{\frac{4}{3}}}{(4a)^{\frac{4}{3}}} + \frac{b \cdot (-b)^{\frac{1}{3}}}{4a^{\frac{1}{3}}} - c = \frac{(-b)^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{256} \cdot a^{\frac{1}{3}}} + \frac{-b^{\frac{1}{3}}}{4a^{\frac{1}{3}}} - c =$$

$$= \frac{-b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{256} \cdot a^{\frac{1}{3}}} + \frac{-b^{\frac{1}{3}}}{4a^{\frac{1}{3}}} - c = -\frac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}} \left( \frac{1}{\sqrt[3]{256}} + \frac{1}{4} \right) - c =$$

$$= -\sqrt[3]{\frac{b}{a}} \left( \frac{1}{\sqrt[3]{256}} + \frac{1}{4} \right) - c < 0 \Rightarrow \text{уравнение}$$

•  $f(x) = 0$  в двух точках  $\Rightarrow$  исходное уравнение имеет 2 корня.

•  $f(0) = -c$ ,  $c > 0 \Rightarrow f(0) < 0 \Rightarrow$  корни исходного уравнения действительны разных знаков (один из корней  $> 0$ ) ( $f(x)$  пересекает ось  $OX$  ~~дважды~~ в двух точках по разные стороны от оси  $OY$ .)

нет сравнения  $x_1, x_2$

