

ШИФР

(заполняется ответственным секретарем приемной комиссии)

## Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников  
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ-БУДУЩЕЕ НАУКИпо МАТЕМАТИКЕ в 11 классе  
(наименование общеобразовательного предмета)

Фамилия И.О. участника ЕРМАЧКОВ ИВАН ДМИТРИЕВИЧ

Дата рождения

Школа № 179 район \_\_\_\_\_ город Москва

**Особые отметки** (Заполняется представителем оргкомитета) о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

+1 чистовик  
+1 чистовик  
+ черновик  
+1 черновик  
+1 чистовик +1 чистовик

**Правила поведения**Участник очного тура олимпиады **обязан**:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

**Внимание.** Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады **запрещается**:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

**Внимание.** За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполняющуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий. Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному

Дата проведения 19.01.2025

заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

**Оформление работы**

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы. Нельзя делать исправления карандашом.

**Внимание!** Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен

(подпись участника олимпиады)



Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+	+	+	-	
20	19	12	3	4

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№ 11.1.

$\Sigma = 58$

$$2\cos^4 x - \sin^3 x = 1$$

$$2(\cos^2 x)^2 - \sin^3 x = 1$$

$$2(1 - \sin^2 x)^2 - 1 - \sin^3 x = 0$$

$$2((1 - \sin x)(1 + \sin x))^2 - (\sin^3 x + 1) = 0$$

$$2((1 - \sin x)(1 + \sin x))^2 - ((\sin x + 1)(\sin^2 x - \sin x + 1)) = 0$$

$$(\sin x + 1)(2(1 - \sin x)^2(1 + \sin x) - (\sin^2 x - \sin x + 1)) = 0$$

$$\sin x + 1 = 0$$

$$\sin x = -1$$

$$x = 2\pi k - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$2(1 - \sin x)^2(1 + \sin x) - (\sin^2 x - \sin x + 1) = 0$$

$$2(1 - 2\sin x + \sin^2 x)(1 + \sin x) - (\sin^2 x - \sin x + 1) = 0$$

$$2(1 + \sin x - 2\sin x - 2\sin^2 x + \sin^2 x + \sin^3 x) - (\sin^2 x - \sin x + 1) = 0$$

$$2(1 - \sin x - \sin^2 x + \sin^3 x) - \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$2 - 2\sin x - 2\sin^2 x + 2\sin^3 x - \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$1 - \sin x - 3\sin^2 x + 2\sin^3 x = 0$$

$$2\sin^3 x - 3\sin^2 x - \sin x + 1 = 0$$

$$\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)(2\sin^2 x - 2\sin x - 2) = 0$$

$$2\sin^3 x - 3\sin^2 x - \sin x + 1 \mid \sin x - \frac{1}{2}$$

$$\underline{2\sin^3 x - \sin^2 x}$$

$$-2\sin^2 x - \sin x$$

$$\underline{= 2\sin^2 x + \sin x}$$

$$2\sin x - 2\sin x + 1$$

$$\underline{= 2\sin x + 1}$$

$$0$$



$$\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)(2\cos^2 x - 2\cos x - 2) = 0$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{x = 2\pi k + \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 2\pi k + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \\ x &= 2\pi k + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}}$$

$$2\cos^2 x - 2\cos x - 2 = 0$$

$$\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

Решим  $A = \cos x, A \in [-1, 1]$   
Многа:

$$A^2 - A - 1 = 0$$

$$D = 1^2 - 4(-1)(1)$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$A_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\sqrt{5} > 1 \Rightarrow 1 + \sqrt{5} > 2 \Rightarrow \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 1 \Rightarrow \text{этом корень не подходит}$$

$$A = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \in [-1, 1]$$

$$\cos x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{x = \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x &= 2\pi k + \pi - \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}}$$

Ответ:

$$x = 2\pi k - \frac{\pi}{2}$$

$$x = 2\pi k + \frac{\pi}{6}$$

$$x = 2\pi k + \pi - \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$$

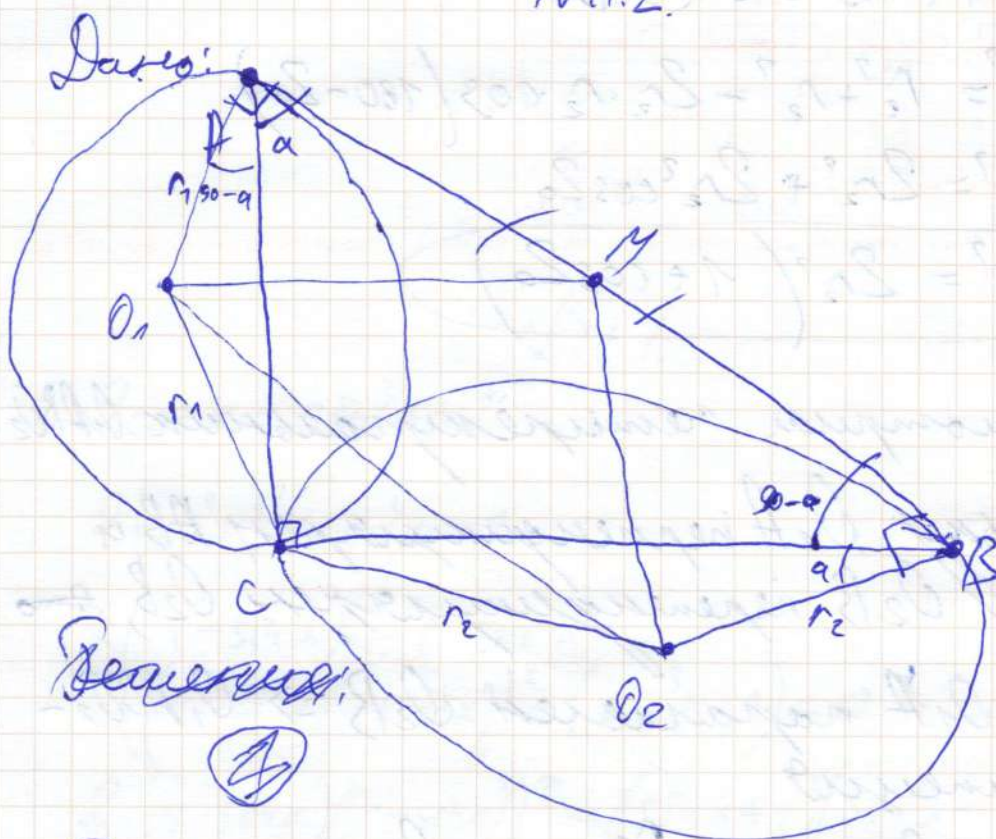
$$x = 2\pi k + \frac{5\pi}{6}$$

$$x = 2\pi k + \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)$$





N11.2.



Требуется:

④

Решение:

- ① По условию  $O_1A = r_1 \Rightarrow O_1C = r_1, O_2B = r_2$   
 $O_2B = r_2$   
 $O_1AC$   $O_1A \perp AB?$   
 $\text{Если } \angle CAB = \alpha, \text{ то } \angle BAC = 90^\circ - \alpha$   $O_2B \perp AB?$   
 $\text{и } \angle CBM = 90^\circ - \alpha, \alpha \angle CBO_2 = \alpha$

- ②  $\angle CO_1A = \pi/5 \Rightarrow \text{если } \angle O_1AC = 90^\circ - \alpha,$   
 $\text{то } \angle O_2CA = 90^\circ - \alpha, \angle AOC = 2\alpha$   
 $\text{По теореме косинусов: } \angle O_1AC:$

$$AC^2 = r_1^2 + r_1^2 - 2 \cdot r_1 \cdot r_1 \cdot \cos 2\alpha$$

$$AC^2 = 2r_1^2 - 2r_1^2 \cdot \cos 2\alpha.$$

$$(AC^2 = 2r_1^2 / (1 - \cos 2\alpha)).$$

- ③  $\angle CO_2B = \pi/5 \Rightarrow \text{если } \angle CBO_2 = \alpha, \text{ то } \angle BCO_2 = \alpha,$   
 $\alpha \angle CO_2B = 180^\circ - 2\alpha.$



Тогда по теореме косинусов ( $O_2B$ ):

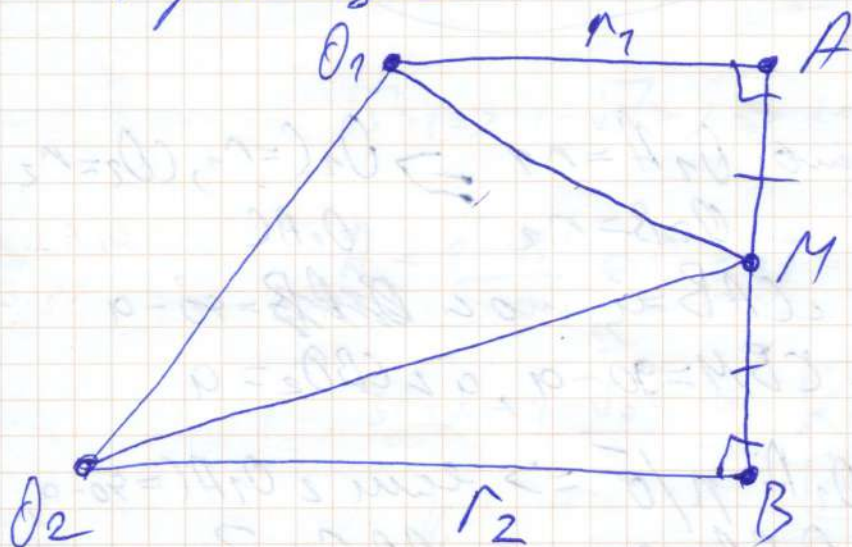
$$CB^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 \cdot r_2 \cos(180 - 2\alpha)$$

$$CB^2 = 2r_1^2 + 2r_2^2 \cos 2\alpha$$

$$CB^2 = 2r_1^2 (1 + \cos 2\alpha)$$

④ Рассмотрим четырёхугольник  $O_1ABO_2$ .

Поскольку  $O_1A$  перпендикулярен  $AB$  и  $O_2B$  перпендикулярен  $AB$ , то  $O_1A$  параллелен  $O_2B \Rightarrow O_1ABO_2$  — трапеция



$$AM = MB = \frac{AB}{2}$$

$$S_{\triangle O_1O_2M} = S_{O_1ABO_2} - S_{\triangle O_1AM} - S_{\triangle O_2BM} =$$

$$= \left( \frac{r_1 + r_2}{2} \right) AB - \frac{r_1 \cdot AM}{2} - \frac{r_2 \cdot MB}{2} =$$

$$= (r_1 + r_2) \cdot AM - \frac{r_1 \cdot AM}{2} - \frac{r_2 \cdot AM}{2} =$$

$$= \left( \frac{(r_1 + r_2) AM}{2} \right)$$



Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

(продолжение №2)

$$⑤ S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AB} \Rightarrow BC = AB \cdot \sin \alpha$$

$$BC = 2 \cdot AM \cdot \sin \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC = AB \cdot \cos \alpha$$

$$AC = 2 \cdot AM \cdot \cos \alpha$$

Тогда:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{2 \cdot AM \cdot \cos \alpha \cdot 2 \cdot AM \cdot \sin \alpha}{2}$$

$$S_{\triangle ABC} = 2 \cdot AM^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

~~$$S_{\triangle ABC} = 2 \cdot AM^2$$~~

$$S_{\triangle ABC} = AM^2 \cdot \sin 2\alpha$$

$$⑥ AC^2 = (2 \cdot AM \cdot \cos \alpha)^2 = 2r_1^2 (1 - \cos 2\alpha)$$

$$4 \cdot AM^2 \cdot \cos^2 \alpha = 2r_1^2 (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha - (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha))$$

$$4 \cdot AM^2 \cdot \cos^2 \alpha = r_1^2 (2 \sin^2 \alpha)$$

$$AM^2 \cdot \cos^2 \alpha = r_1^2 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$r_1^2 = \frac{AM^2 \cdot \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

$$r_1 = \frac{AM \cdot \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

Угол  $\alpha$  острый  
все углы  
острые  $\alpha$   
острые  
положительно-  
нон-нуль  
положительно  $\neq$  не  
стабили.

(все углы острый, а острые положительно-нон-нуль)



⑦  $(B^2 = 2r_1^2(1 + \cos 2\alpha) = (2 - 4M \sin \alpha)^2)$

$$CB' = 2 \cdot r_2^2 (1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 4DM^2 \sin^2 \alpha$$

$$CB^2 = 2 \cdot r_2^2 (2 \cos^2 \alpha) = 4 \cdot AM^2 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$CB^2 = r_2^2 \cdot \cos^2 \alpha = AM^2 \cdot \sin^2 \alpha$$

$$r_2 = \frac{AM \cdot \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$r_2 = \frac{AM^2 \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha}$$

угла  $\gamma$   
все ~~длины~~ стороны  $a$   
отрезки положитель-  
ной длины, поэтому  
 $\neq$  не ставим.

8) Thyroid:

$$S_{\Delta O_1 O_2 M} = \frac{(n_1 + n_2) AM}{2} =$$

$$= \left( \frac{AM \cdot \cos \theta}{\sin \theta} + \frac{AM \cdot \sin \theta}{\cos \theta} \right) \frac{AM}{2}$$

$$= \frac{(AM \cos^2 \alpha + AM \cdot \sin^2 \alpha) AM}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{AM^2}{\sin 2\alpha}$$

⑨ Borgia:  $\frac{S_{ABC}}{S_{O_1MO_2}} = \frac{AM^2 \sin 2\alpha}{\frac{AM^2}{\sin 2\alpha}} = \sin^2 2\alpha$  — Jensen

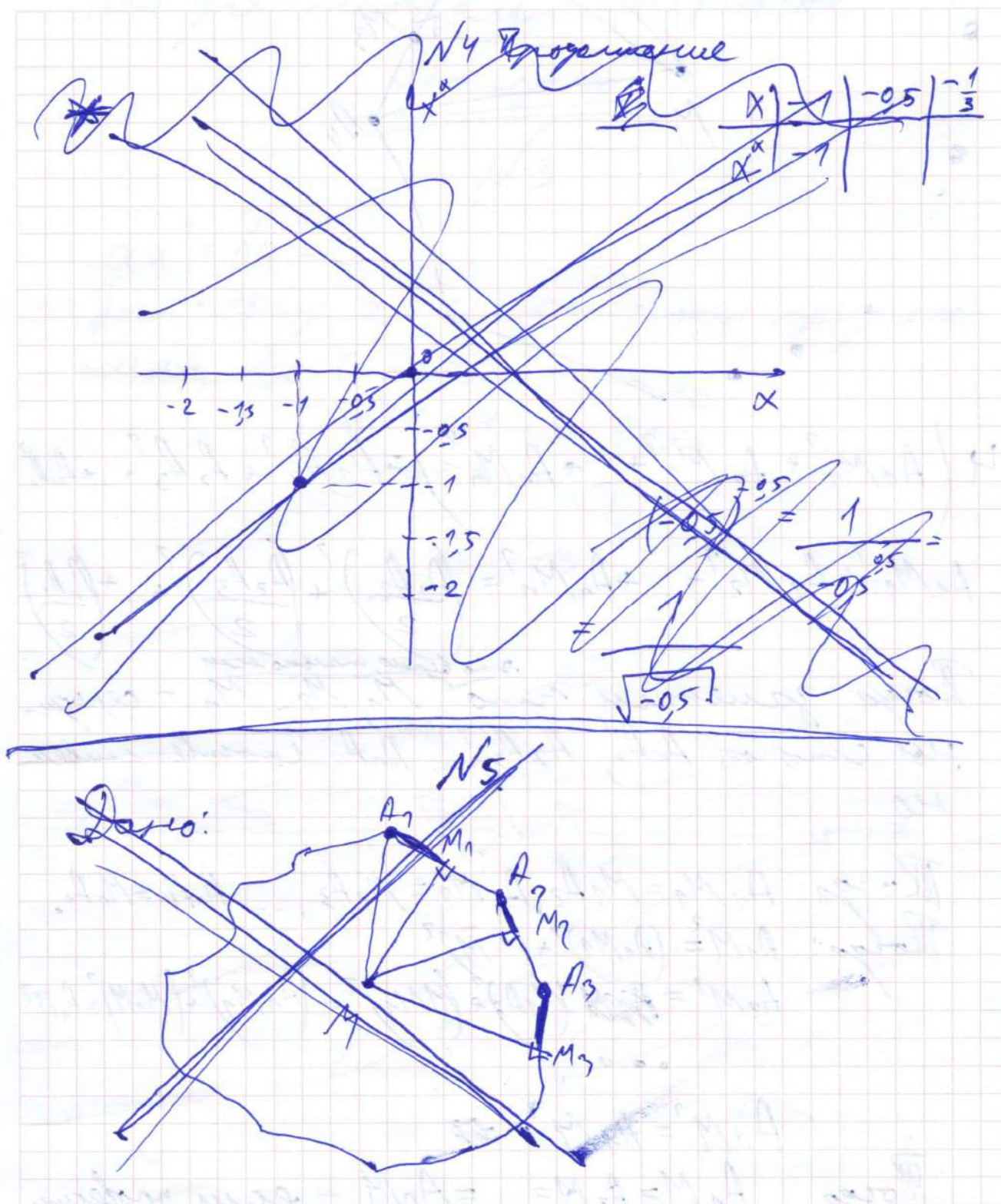
анида  
преодолеть



Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов

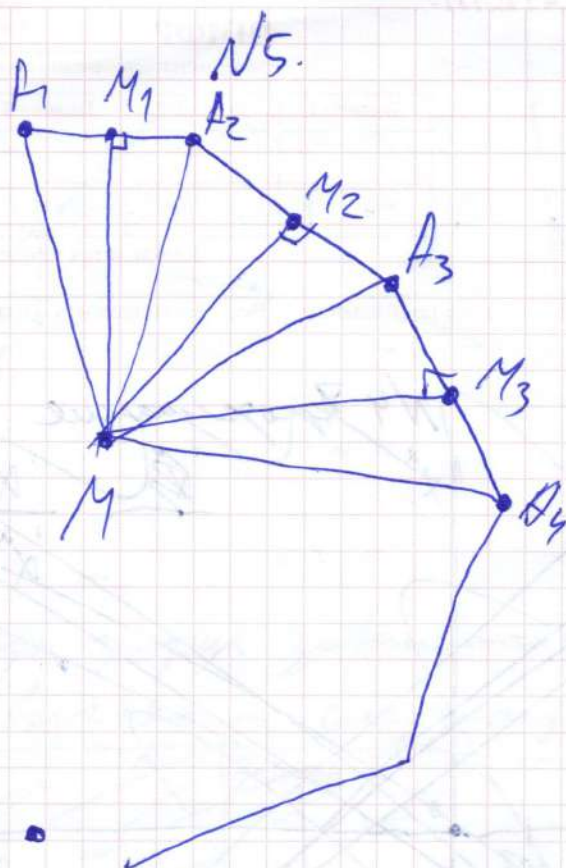
Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!





Дано:



$$4(A_1M_1^2 + A_2M_2^2 + \dots + A_nM_n^2) = A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + \dots + A_nA_1^2$$

$$A_1M_1^2 + A_2M_2^2 + \dots + A_nM_n^2 = \left(\frac{A_1A_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{A_2A_3}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{A_nA_1}{2}\right)^2$$

Когда заменим, <sup>это верно только если</sup>  $M_1, M_2, \dots, M_n$  - середины сторон  $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$  соответственно.

Решение?

Когда:  $A_1M_1 = M_1A_2, A_2M_2 = M_2A_3, \dots, A_nM_n = M_nA_1$ .

Когда:  $A_1M^2 = (A_1M_1)^2 + (M_1M)^2$

$$A_2M^2 = (A_2M_2)^2 + (M_2M)^2 = (A_1M_1)^2 + (M_1M)^2 = A_1M^2$$

...

$$A_nM^2 = A_1M^2 \Rightarrow$$

Когда  $A_1M = A_2M = \dots = A_nM$  - если проведем



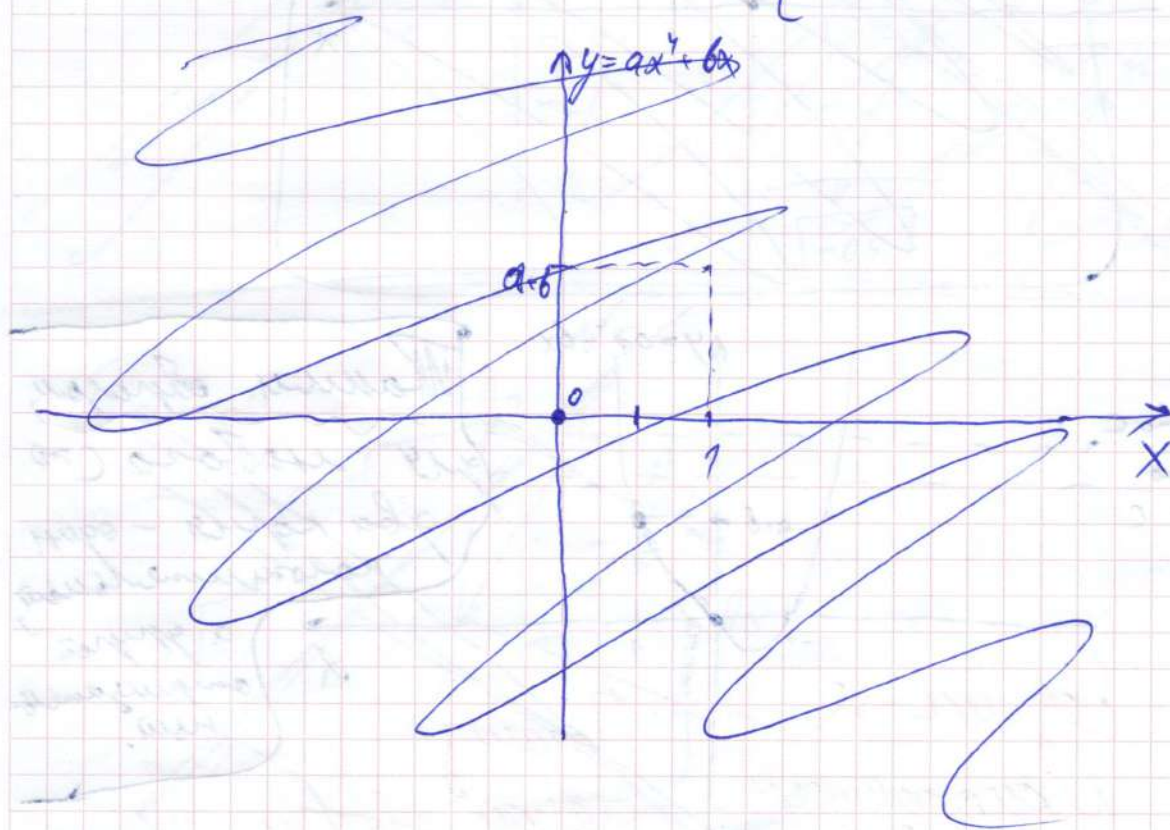
окружность радиуса  $MA_1$  с центром в точке  $M$ , то точки  $A_1, A_2, \dots, A_n$  будут лежать на этой окружности  $\rightarrow$

$\Rightarrow$  эта окружность будет описанной для многоугольника  $A_1 A_2 \dots A_n$ .

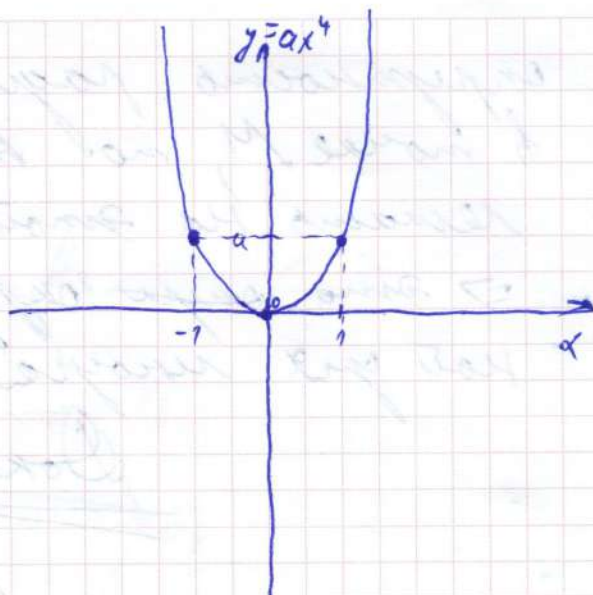
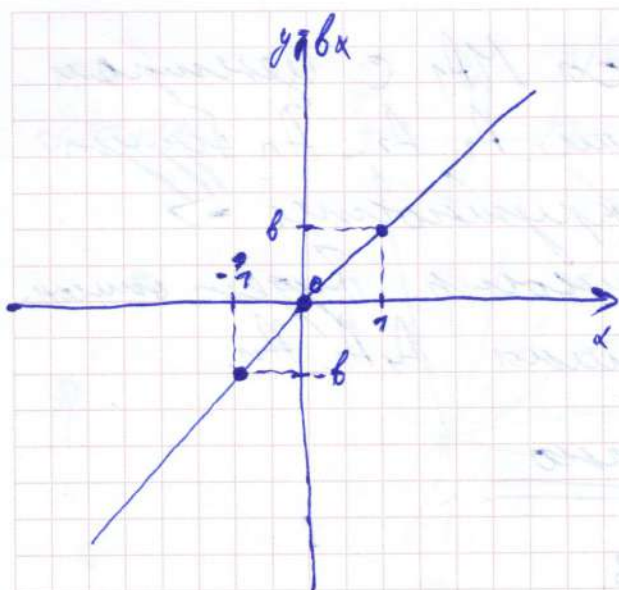
Доказано  
№3.

$$ax^4 + bx = c$$

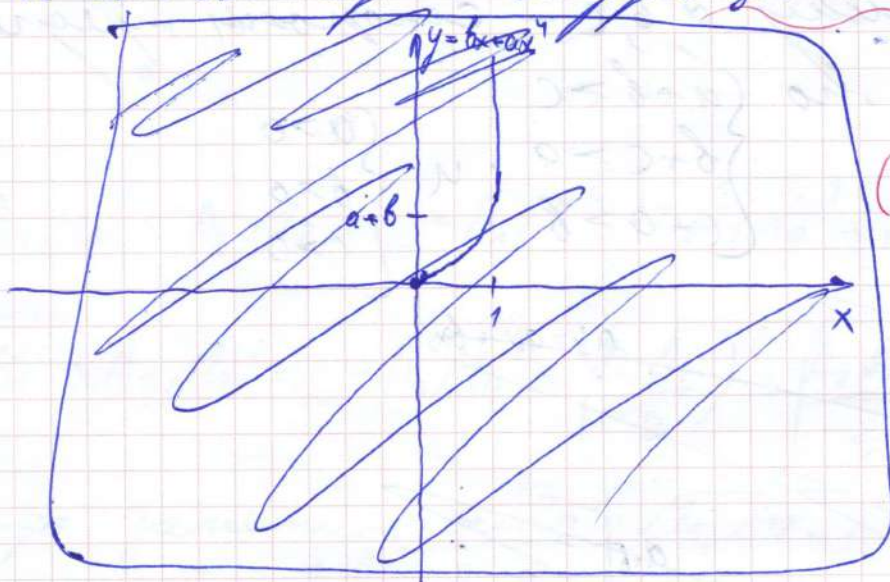
Поскольку  $a, b, c$  — стороны треугольника, то  $\begin{cases} a+b > c \\ b+c > a \\ c+a > b \end{cases}$  и  $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ c > 0 \end{cases}$





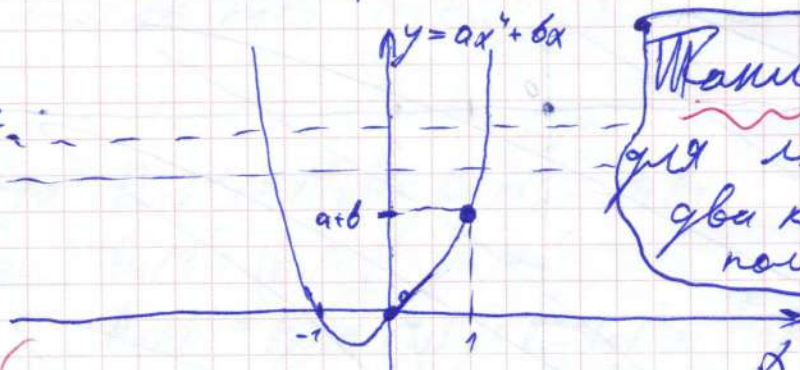


Почему? Почему график зависимости  $y = ax^2 + bx$  от  $x$  будет выглядеть следующим образом?



Какой?  
(св-ва?)

какое-то с  
какое-то  
другое с



Какой образ  
для любого с  
два корня - один  
положительный  
а другой  
отрицательный.

без исс-я  
монотонности  
такой вид  
уравнения!

Почему  
такой график  
(при  $x < 0$ )

Для дек-ва  
такого графика  
недостаточно



Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать! Все листы вложить в папку «Письменная работа»!

№3. Продолжение.

Заметим также, что при  $x \in (-\infty, -1)$  функция убывает, а при  $x \in (0, \infty)$  возрастает (участок  $x \in [-1, 0]$  нас не интересует, т.к. при нём  $y < 0 \Rightarrow c < 0 \Rightarrow \times$ ).

Когда дан  $x_1$  - корень уравнения  $ax^4 + bx = c$ , то  $x_1 > 0$

~~$ax_1^4 + bx_1 = c$~~   
Значит:

~~$a(-x_1)^4 + b(-x_1) = c_2$~~

~~$ax_1^4 - bx_1 = c_2$~~

Поскольку  $b > 0$ , то  $bx_1 > 0 \Rightarrow$

~~$\Rightarrow ax_1^4 + bx_1 > ax_1^4 - bx_1 \Rightarrow$~~   
 ~~$\Rightarrow c > c_2$~~

~~Получается~~

Пусть  $x_1, x_2$  - корни уравнения  $ax^4 + bx = c$ ,  $x_1 > 0$ ,  $x_2 < 0$

Тогда:  $\begin{cases} ax_1^4 + bx_1 = c \\ ax_2^4 + bx_2 = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax_1^4 = c - bx_1 \\ ax_2^4 = c - bx_2 \end{cases} \Rightarrow$



Вспомогательно  $\begin{cases} b > 0 \\ x_1 > 0 \\ x_2 < 0 \end{cases}$ , то  $\begin{cases} bx_1 > 0 \\ bx_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow c - bx_1 < c - bx_2$

Тогда если  $c - bx_1 < c - bx_2$ , то

$$ax_1^4 < ax_2^4$$

$$x_1^4 < x_2^4$$

$$|x_1|^4 < |x_2|^4$$

$$|x_1| < |x_2|$$

Не доказано только,  
что отрицательный корень  
единственный

т. е. отрицательный  
корень уравнения  
по модулю больше  
положительного.

Таким образом, я доказал,  
я доказал, что у уравнения  
 $ax^4 + bx = c$  ровно два корня, они  
разных знаков и отрицатель-  
ный корень уравнения по модулю  
больше положительного.

Что и требовалось доказать

Доказано