



ШИФР

01-1

(заполняется представителем Оргкомитета)

## Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников  
БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИО математике Дата проведения 19.01.2025  
(наименование общеобразовательного предмета)ФИО участника (полностью) Сухоруков Кирилл АртёмовичДата рождения \_\_\_\_\_ СНИЛС \_\_\_\_\_  
Класс \_\_\_\_\_Школа № СУНЦ НГУ район Советский город Новосибирск**Особые отметки** (Заполняется представителем оргкомитета)  
о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.

Все виды шпаргалок изымаются и выдаются по письменному заявлению после истечения времени, предусмотренного на подачу и рассмотрение апелляций по данному предмету.

## Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной пастой (чернилами), одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета пасты (чернил), следует обратиться за разрешением к представителю оргкомитета олимпиады).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы.

Нельзя делать исправления карандашом.

**Внимание!** Если в работе ошибки исправлены карандашом, то при шифровке работы карандашные исправления будут стерты и на проверку поступит работа без исправлений.

С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ (подпись участника олимпиады)

## Правила поведения

Участник очного тура олимпиады обязан:

- занять место, которое ему указано представителями оргкомитета;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

**Внимание.** Если во время проверки письменных работ, жюри обнаружит идентичный текст (или цитаты с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух, или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады запрещается:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- пользоваться средствами мобильной связи;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

**Внимание.** За нарушение правил поведения участник удаляется с очного тура олимпиады с выставлением нуля баллов за выполняющуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий.



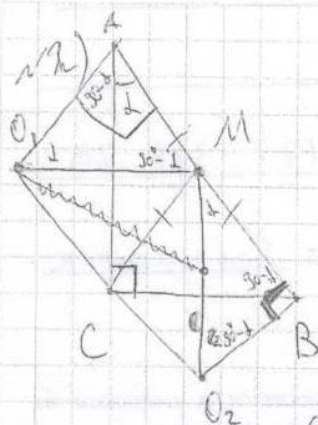
Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+12	+	±	-	-
10	20	12	4	4

$\Sigma = 50$

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество НЕ писать! Лист НЕ подписывать!

1	2	3	4	5	Σ
10	20	10	4	4	48



$CM = AM = MB$   
свойство

т.е.  $CM$  — медиана к гипотенузе  
т.к.  $O_1$  касается  $AB$  и проходит через  $A \Rightarrow$   
 $\Rightarrow \angle O_1AB = 90^\circ$ , аналогично по с окружностью

с  $O_2$  и в точке  $B \Rightarrow \angle O_2BA = 90^\circ$ , тогда  
 $O_1AC$  заметим, что  $O_1$  и  $M$  лежат на

срединном перпендикуляре к  $AC$  (т.е.  $O_1$  и  $M$

равноудалены от  $A$  и  $C$ )  $\Rightarrow O_1M \perp AC$ , аналогично  $O_2M \perp BC$

тогда  $\angle O_1MO_2 = 90^\circ$  т.е.  $\angle ACB = 90^\circ$  т.к.  $AC \perp O_1M$

$\Rightarrow \angle AMO_1 = 90^\circ - \angle$ , аналогично  $\angle BMO_2 = 90^\circ - \angle \Rightarrow$

$\Rightarrow$  т.е.  $O_2M \perp BC$ , следовательно  $\angle BMO_2 = \angle$ , тогда

$\sin \angle O_1M = AM$

и  $\cos \angle O_2M = BM$

$\sin \angle O_1M = \frac{AB}{2}$

$\cos \angle O_2M = \frac{AB}{2}$

но  $AC = AB \cdot \cos \angle$  и  $CB = AB \cdot \sin \angle$

$\sin \angle O_1M \cdot \cos \angle O_2M$

$= \frac{1}{2} S_{O_1MO_2} \sin \angle \cos \angle$

$S_{ABC} = \frac{AC \cdot CB}{2} = \frac{AB^2 \cdot \sin \angle \cos \angle}{2}$

$\frac{AB^2}{8}$

$\Rightarrow S_{O_1MO_2} = \frac{AB^2 \cdot \cos \angle \sin \angle}{8 \cdot \sin \angle \cos \angle}$

$\frac{AB^2}{8 \cdot \sin \angle \cos \angle}$

$\frac{S_{ABC}}{S_{O_1MO_2}} = \frac{\sin \angle \cos \angle}{\frac{1}{4 \sin \angle \cos \angle}} = 4 \sin^2 \angle \cos^2 \angle = 2(\sin 2\angle)^2$

Ответ:  $\frac{S_{ABC}}{S_{O_1MO_2}} = \sin^2 2\angle$





Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать!

$$11.1) 2\cos^4 x - \sin^3 x = 1$$

$$2(1-\sin^2 x)^2 = 1 + \sin^3 x = (1+\sin x)(1-\sin x + \sin^2 x)$$

$$2(1-\sin x)^2(1+\sin x)^2 = (1+\sin x)(1-\sin x + \sin^2 x) \quad \sin x = -1$$

$$2(1-\sin x)^2(1+\sin x) = 1 - \sin x + \sin^2 x$$

$$2(1-\sin x)^2(1+\sin x) = 1 - \sin x + \sin^2 x$$

$$(2(1-\sin^2 x) + 1)(1-\sin x) = 1$$

$$2\cos^2 x + 1 = 1$$

$$(2\cos^2 x + 1)$$

$$(1-\sin x)(2(1-\sin x)(1+\sin x) + \sin x) = 1$$

$$(1-\sin x)(2 - 2\sin^2 x + \sin x) = 1$$

$$(2\cos^2 x + 1)(1-\sin x) = 1$$

$$\sin x = y$$

$$(3-2\sin^2 x)(1-\sin x) = 1$$

$$y \in$$

$$3 - 2\sin^2 x - 2\sin^3 x + 2\sin^2 x = 1$$

$$3\sin^3 x - 2\sin^2 x - 2\sin x + 3 = 0$$

$$2y^3 - 2y^2 - 3y + 3 = 0$$

$$(1-y)(-2y^2 + y + 2) = 1$$

$$-2y^2 + y + 2 + 2y^3 - y^2 - 2y = 1$$

$$2y^3 - 3y^2 - y + 1 = 0, \text{ заметим, что } y = \frac{1}{2} \text{ — корень } \Rightarrow x = ?$$

$$2(y - \frac{1}{2})(y^2 - y - 1) = 0$$

$$y^2 - y - 1 = 0$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow (y - \frac{1}{2})(y - \frac{1+\sqrt{5}}{2})(y + \frac{1+\sqrt{5}}{2}) = 0$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, x = \arcsin(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + 2\pi k, x = \arcsin(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) + 2\pi k$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, x = \arcsin(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + 2\pi k, x = \arcsin(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) + 2\pi k$$



$$11.8) \quad a+b > c, \quad b+c > a, \quad a+c > b$$

$$ax^4 + bx = c$$

$$a(x^4 - 1) + b(x - 1) < 0 \text{ т.к. } a+b > c$$

$$a(x^2 - 1)(x^2 + 1) + b(x - 1) < 0$$

$$a(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) + b(x - 1) < 0$$

$$(x - 1)(a(x + 1)(x^2 + 1) + b) < 0$$

$$I) \quad x - 1 < 0 \quad \text{и} \quad a(x + 1)(x^2 + 1) + b > 0$$

$$\text{т.к. } x < 1$$

$$II) \quad x - 1 > 0 \quad \text{и} \quad a(x + 1)(x^2 + 1) + b < 0$$

$$x + 1 > 0 \Rightarrow a(x + 1)(x^2 + 1) + b > 0 \text{ т.к. } x > -1, a > 0 \text{ и } b > 0$$

невозможно

При  $x > 1$ :  $ax^4 + bx > a + b > c \Rightarrow ax^4 + bx > c$ , значит  $\frac{1}{x}$  до  $+\infty$  не имеет

корней, но при  $x = 0$ :  $ax^4 + bx = 0$ , но  $c > 0$  т.к. страна

преобразования  $\Rightarrow (0; 1)$  - есть 1 корень т.к. на этой промежутке

$0x^4 + bx = x(ax^3 + b)$  - монотонная функция. При  $x < 0$  при

$$0 \geq x \geq -1: ax^4 \leq a, \text{ т.к. } x^4 \leq 1, \text{ а } 0 \geq bx > -b$$

$$ax^4 = c - bx$$

$$a > ax^4 = c - bx > c + b \Rightarrow a > c + b, \text{ что невозможно т.к. } b + c > a$$

нестрого!

Значит  $\frac{1}{x}$  в промежутке от 0 до -1 не имеет корней.

$$ax^4 + bx = x(ax^3 + b) = c > 0, \text{ значит при } x \leq -1:$$

$$H) \quad ax^3 + b < 0 \Rightarrow ax^3 < -b \Rightarrow x < \sqrt[3]{-\frac{b}{a}} \quad -ax^3 > b \Rightarrow -x^3 > \frac{b}{a} \Rightarrow |x| > \sqrt[3]{\frac{b}{a}}$$

значит в  $[-1; -\sqrt[3]{\frac{b}{a}}]$  - нет корней, но если  $x < 0$  и  $ax^3 + b < 0$ , то

$\frac{1}{x}$  функция на этом интервале монотонна, но есть т.к. в точке

$$x = -\sqrt[3]{\frac{b}{a}}: ax^4 + bx = 0, \text{ то при } x > \sqrt[3]{\frac{b}{a}}: ax^4 + bx > 0 \text{ и монотонна,}$$

а значит имеет только одно пересечение с  $y = c$  на графике  $\Rightarrow$

$\Rightarrow$  на  $(-\infty; -\sqrt[3]{\frac{b}{a}})$  - имеет только один корень, тогда

$ax^4 + bx = c$  - имеет только два корня (на отрезке  $(0; 1)$  и на  $(-\infty; -\sqrt[3]{\frac{b}{a}})$ ) при этом на отрезке  $[-1; 0]$  - нет корней  $\Rightarrow$  единственный корень положительный.



Фамилию, имя, отчество **не** писать! Лист **не** подписывать!

11.4)  $3 \cdot x^{6x} = 1$

$3 = x^{-6x}$

$3^2 = x^{-6x}$

$3 = x^{-3x}$

$3^{\frac{1}{3x}} = x^{-1} = \frac{1}{x} = y$

$3^{\frac{1}{3}} = y$

$3^y = y^3$

$\log_3 y^3 = y \Rightarrow$  отрицательные корни не могут быть

корни -2, т.е. симметричной этой функции будет

линейной  $y = 1$ , в частности  $(3 \cdot x^{6x})' = 0$  где дек-то?

дек. дек.

Если  $x < 0$ , то  $3 = -|x|^{6|x|}$

$3 = (x^2)^{3|x|}$

$3 = |x|^{3|x|}$

$\log_{3|x|} 3 = 3|x|$

1	2	3	4	5	Σ
10	20	10	4	4	48

М

11.5)

$A_1 M_1^2 = A_1 M^2 - M M_1^2$  ( $A_1 A_2 + A_2 M_1 + A_1 A_2 + A_2 M_1$ )

$A_1 A_2^2 + 2 A_1 A_2 A_2 M_1 + A_2 M_1^2 = A_1 M^2 - M M_1^2$

$A_1 A_2 + 2 A_1 A_2 A_2 M_1 + A_2 M_1^2 = A_1 M^2 - M M_1^2$

$A_1 A_2^2 = A_1 M^2 - A_2 M^2 - 2 A_1 A_2 A_2 M_1$

$A_1 A_2^2 + \dots + A_1 A_n^2 = -2 (A_1 A_2 A_2 M_1 + A_2 A_3 A_3 M_2 + \dots + A_n A_1 A_1 M_n)$

$2 A_1 M_1^2 + \dots + A_n M_n^2 = - (A_1 A_2 A_2 M_1 + \dots + A_n A_1 A_1 M_n)$

$2 A_1 M_1^2 + \dots + A_n M_n^2 = - ((A_1 M_1 - A_2 M_1) A_2 M_1 + \dots + (A_n A_1 - A_1 M_n) A_1 M_n)$

$A_1 M_1^2 + \dots - A_n M_n^2 - A_2 M_1^2 - \dots - A_n M_n^2 = - (A_1 M_1 A_2 M_1 + \dots + A_n M_n A_1 M_n + \dots)$

аналогично только если сумма степеней

точка  $M_1$  - равна нулю. Тогда безразлично

можно если существуют такие окружности, которые имеют

эти окружности, значит все  $A_i$  лежат на

одной окружности, значит.

откуда.