



ШИФР

(заполняется членом оргкомитета или тех.секретарем)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи - будущее науки»ПО МАТЕМАТИКЕ В 11 классе
(наименование общеобразовательного предмета)ФИО Ломинин Дмитрий Евгеньевич
(полностью! в именительном падеже)

Дата рождения

Школа МБОУ гимназия им. академика Н. Г. Басоварайон Центральный город Воронеж**Особые отметки** (Заполняется представителем оргкомитета)
о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.Дата проведения 19.01.2025**Правила поведения**

Участник олимпиады обязан:

- занять место, которое ему указано организаторами в аудитории;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ жюри обнаружит идентичный текст (или текст с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады запрещается:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- иметь при себе любые средства мобильной связи, включая смартфон, микрофон, наушники, смарт-часы и пр.;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с олимпиады с выставлением нуля баллов за выполняющуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной ручкой, одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета ручки следует обратиться за разрешением к организатору в аудитории).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы.

Нельзя делать исправления карандашом.**С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен**

(подпись участника олимпиады)

$$\Sigma = 55$$

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+	+	+1/2	-	-
20	20	10	3	2

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество не писать! Лист не подписывать!

~ 11.1

$$2 \cos^4 x - \sin^3 x = 1$$

$$2(1 - \sin^2 x)^2 - \sin^3 x - 1 = 0$$

$$2(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) - \sin^3 x - 1 = 0$$

$$2 - 4\sin^2 x + 2\sin^4 x - \sin^3 x - 1 = 0$$

$$\text{Замени } t = \sin x \quad |t| \leq 1$$

$$+1 \quad 2t^4 - t^3 - 4t^2 + 1 = 0$$

Применим схему Горнера:

$$(t+1)(t-\frac{1}{2})(2t^2-2t-2)=0$$

$$(t+1)(t-\frac{1}{2})(t^2-t-1)=0$$

$$D = 1 + 4 = 5$$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$t_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 1 \text{ - не подходит}$$

$$t_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ - подходит}$$

$$-3 < -\sqrt{5} < -2$$

$$-2 < 1 - \sqrt{5} < -1$$

$$-1 < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < -\frac{1}{2}$$

Ищем следующие решения:

$$\sin x = -1$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

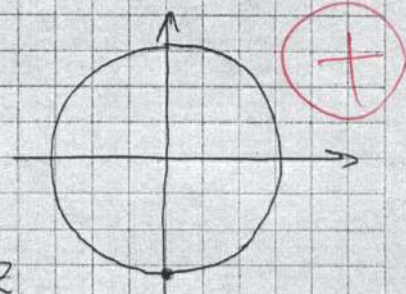
$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$x = (-1)^m \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) + \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; (-1)^m \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) + \pi m, m \in \mathbb{Z}.$



~ 11.2

Dano:

$\triangle ABC$ - прямоугол

 $\angle A = 2$

LC-прямой

D_1, D_2 - is. okp. eñ

ω_1, ω_2 - частоты
окр-ти

 $m.A, C. \in \mathcal{D}_i$
$$m. B, C \in \mathcal{D}_2$$

ω_1, ω_2 кас-ся АВ-
прямой

M-тип AB

SABC - ?

 $S_{O,MO}$

т. А и В - т.
кас-я окр-ей

ω_1 и ω_2 прямой AB ,

Носитель м.к.

$$A \in AB, A \in W_1$$
$$B \in AB, B \in \mathcal{W}_i$$

$O_1A = O_1C$; $O_2C = O_2B$ т.к. это радиусы совм. окр-ей.

Пусть OD - высота из O к AC , тогда она же является и медианой $\triangle AOC$, т.к. этот \triangle р/б. $OD \perp AC$, $BC \perp AC$, а значит $OD \parallel BC$. Заметим также, что DM - ср.-линия $\triangle ABC$, $DM \parallel BC$, а значит т. O , D и M лежат на одной прямой.

Аналогично доказываем для m, D_2, E и M .

$OA \perp AB, OB \perp AB$ т.к. это радиусы, проведенные к точке касания.

$$\angle A O_1 M = \alpha, \text{ m.r. } \angle O_1 A D = 90^\circ - \alpha$$

$\angle DO, C$ также дугсектриса, поэтому $\angle DO, C$ также \angle

$$\angle DCO_1 = 90^\circ - \angle$$

Поскольку $\triangle CO_2B$ - р/б, то $\angle ECO_2 = \angle EBO_2 = \alpha$

$\angle O_1CO_2 = \angle O_1CD + \angle ACB + \angle O_2CE = 90^\circ - \angle + 90^\circ + \angle = 180^\circ \rightarrow$ значит точки O_1, C и O_2 лежат на одной прямой.

Заметим, что $\triangle APM = \triangle MEB$ (по св-ву ср. линии), $\triangle AOD = \triangle COD$ и $\triangle EOD = \triangle EOB$, а также что $\triangle ABC \sim \triangle AMD \sim \triangle OAD \sim \triangle BOE$. (по \angle остр.)

$$\triangle ABC \sim \triangle AMD \quad K = 2$$

$\Delta ABC \sim \Delta ADM$ $K=2$
Пусть $S_{ABC} = S$, тогда $S_{ADM} = S_{MEB} = \frac{1}{4}S$, следовательно $S_{DMEC} = \frac{1}{2}S$
($S - \frac{1}{4}S - \frac{1}{4}S$) \uparrow

~ 11.2 (продолжение)

$$S_{ADM} = \frac{1}{2} AD \cdot DM = \frac{1}{2} AD^2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4} S$$

$$DM = \operatorname{tg} \alpha \cdot AD$$

$$S_{O,DA} = \frac{1}{2} O, D \cdot AD = \frac{1}{2} \frac{AD^2}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$O, D = \frac{AD}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$\frac{S_{O,DA}}{S_{ADM}} = \frac{\frac{1}{2} \frac{AD^2}{\operatorname{tg} \alpha}}{\frac{1}{2} AD^2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$S_{O,DA} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot S_{ADM} = \frac{S}{4 \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$S_{MEB} = \frac{1}{2} ME \cdot EB = \frac{1}{2} \frac{BE^2}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{4} S$$

$$ME = \frac{BE}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$S_{O_2BE} = \frac{1}{2} BE \cdot EO_2 = \frac{1}{2} BE^2 \operatorname{tg} \alpha$$

$$EO_2 = OE \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{S_{O_2BE}}{S_{MEB}} = \frac{\frac{1}{2} BE^2 \operatorname{tg} \alpha}{\frac{1}{2} \frac{BE^2}{\operatorname{tg} \alpha}} = \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$S_{O_2BE} = \frac{S \operatorname{tg}^2 \alpha}{4}$$

$$S_{ABC} = S$$

$$S_{O,MO_2} = S_{O,DC} + S_{DMCE} + S_{CEO_2} = \frac{S}{4 \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{1}{2} S + \frac{S \operatorname{tg}^2 \alpha}{4} = \frac{S + 2S \operatorname{tg}^2 \alpha + S \operatorname{tg}^4 \alpha}{4 \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{O,MO_2}} = \frac{S}{\left(\frac{S(1 + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^4 \alpha)}{4 \operatorname{tg}^2 \alpha} \right)} = \frac{4 \operatorname{tg}^2 \alpha}{(\operatorname{tg}^2 \alpha + 1)^2}$$

Ответ: $\frac{4 \operatorname{tg}^2 \alpha}{(\operatorname{tg}^2 \alpha + 1)^2}$

+

$$9 \cdot x^{6x} = 1$$

$$9 \cdot x^{6x} - 1 = 0$$

$$(3x^{3x} - 1)(3x^{3x} + 1) = 0$$

Замена $3x^{3x} = t$

$$(t - 1)(t + 1) = 0$$

$$t = 1 \quad t = -1$$

$$t > 0, \text{ значит}$$

$$t > 0$$

$$t = 1, \text{ т.к. } 1^1 = 1$$

$$3 \cdot x^{3x} \neq (3x)^{3x}$$

~ 11.4.

вернемся к замене:

$$x = \frac{1}{3} \quad x = -\frac{1}{3}$$

проверяем подстановкой $x = -\frac{1}{3}$ не подходит $9 \cdot (-\frac{1}{3})^{-2} \neq 1$

имеем 1 корень $x = \frac{1}{3}$ верно

Ответ: а) 1

б) нет.

$$-1 < 0, \text{ значит } t < 0$$

$$t = -1, \text{ т.к. } (-1)^{-1} = -1$$

~ 11.3.

$$ax^4 + bx = c$$

a, b, c - стороны Δ

$$a, b, c > 0$$

$$\begin{cases} a < b + c \\ b < a + c \\ c < a + b \end{cases}$$

- из правила Δ

док-ть: $\begin{cases} 2 \text{ корня разных знаков} \\ x_1 < 0 \quad x_2 > 0 \\ |x_1| > x_2 \end{cases}$

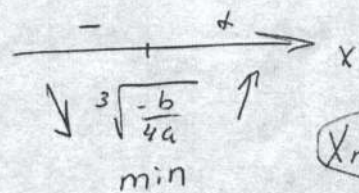
$ax^4 + bx = c$, учитывая что $ax + b \geq c$
 $a, b, c > 0$, то $a \neq 0$

$$f(x) = ax^4 + bx + c$$

$$f'(x) = 4ax^3 + b = 0$$

$$x^3 = -\frac{b}{4a}$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{4a}} = x_{\min}$$



$$x_{\min} < 0$$

$$f_{\min} = f(x_{\min}) = a \cdot \frac{-b}{4a} \cdot \sqrt[3]{-\frac{b}{4a}} + b \cdot \sqrt[3]{-\frac{b}{4a}} + c =$$

$$= \frac{ab}{4a} \sqrt[3]{\frac{b}{4a}} - b \sqrt[3]{\frac{b}{4a}} + c = b \sqrt[3]{\frac{b}{4a}} \left(\frac{1}{4} - 1 \right) + c =$$

$$= b \sqrt[3]{\frac{b}{4a}} \left(c - \frac{3}{4} \right) +$$

$$- \frac{3}{4} b \sqrt[3]{\frac{b}{4a}} + c$$

и?
что?

Сравним два числа:

$$\frac{3}{4} b \sqrt[3]{\frac{b}{4a}}$$

и c .

$$\sqrt[3]{\frac{27b^4}{256a}} \quad ? \quad \sqrt[3]{c^3}$$

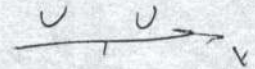
У нас фиксированные корни

при $b \rightarrow 0, a \rightarrow c$ левая часть меньше правой, а значит $f_{\min} > 0$.
 и пересечений с осью x не будет
 если $b \rightarrow c, a \rightarrow 0$, наоборот $f_{\min} < 0$ и будет 2 реш-я.

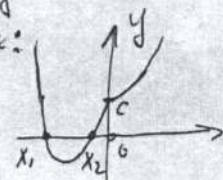
$$f''(x) = 12ax^2 = 0$$

$$x^2 = 0$$

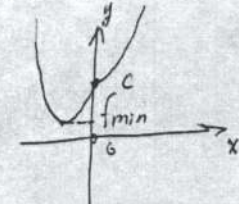
$$f(0) = c$$



получаем график:



$x_1, x_2 < 0$



корней нет

Действительно, наша ф-я принимает наши. знач. левее оси Oy , а в

правее своего минимума ф-я

n - угловники
 A_1, A_2, \dots, A_n
 m, M

M_i - Пр $A_i A_{i+1}$ M

Док-тв, если

$$4(A_1 M_1^2 + A_2 M_2^2 + \dots + A_n M_n^2) = A_1 A_2^2 + A_2 A_3^2 + \dots + A_n A_1^2$$

то около n -угольника можно описать окр-ть.

Перепишем условие в несколько ином виде:

$$((2A_1 M_1)^2 - A_1 A_2^2) + ((2A_2 M_2)^2 - A_2 A_3^2) + \dots + ((2A_n M_n)^2 - A_n A_1^2) = 0. \quad (1)$$

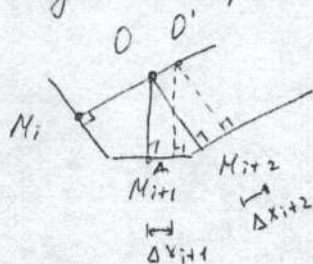
Около

n -многоугольника можно описать окр-ть если её центр лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров, значит M_i - середина стороны $A_i A_{i+1}$.

Подставим условие $A_i M_i = \frac{1}{2} A_i A_{i+1}$ уг-ет условию из задачи, т.к. тогда все слагаемые обратятся в ноль.

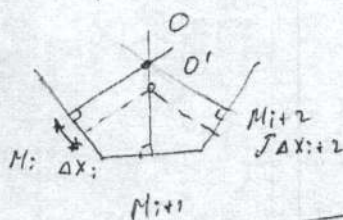
Если точка M будет лежать снаружи многоугольника, то некоторые ^{отрезки $A_i M_i$} ~~проекции~~ будут больше самих сторон $A_i A_{i+1}$, а значит рав-во не будет выполняться не будет.

Сдвинем расположение сер. \perp в неправ. многоугольнике:



тогда $\Delta x_{i+1} \neq \Delta x_{i+2}$ и эти приращенния не будут компенсировать друг друга в выражении (1)

В правильном многоу-ке:



$$\Delta x_i = \Delta x_{i+2}$$

но

$$\begin{aligned} & (2(A_i M_i - \Delta x_i))^2 - A_i A_{i+1}^2 = \\ & = 4A_i^2 M_i^2 - (A_i A_{i+1} + \Delta x_i)^2 - A_i A_{i+1}^2 = \\ & = -2A_i A_{i+1} \Delta x_i + \Delta x_i^2 \neq 0 \end{aligned}$$

для любого угла:

$$|\Delta x_i| < \frac{1}{2} A_i A_{i+1}$$

и поскольку эти слагаемые суммируются, то мы получим значение $\neq 0$. Получается, что при отклонении на Δx_i i -ой проекции от центра $A_i A_{i+1}$ у нас остается Δx_i^2 который не компенсируется другими слагаемыми, а значит мы не получим 0, в таком ш.