



ШИФР

Vaid

(заполняется членом оргкомитета или тех.секретариата)

Письменная работа

Межрегиональная олимпиада школьников
«БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ - БУДУЩЕЕ НАУКИ»по математике в 11 классе
(наименование общеобразовательного предмета)ФИО Горайнов Олег Александрович
(полностью! в именительном падеже)

Дата рождения

Школа МБОУ гимназия им. акад. Н.Г. Басоварайон Центральный город Воронеж**Особые отметки** (Заполняется представителем оргкомитета)
о добавлении листов, о смене цвета пасты, о нарушении правил поведения и т.д.Дата проведения 19.01.2025**Правила поведения**

Участник олимпиады обязан:

- занять место, которое ему указано организаторами в аудитории;
- соблюдать тишину;
- использовать для записей только листы установленного образца;
- работать самостоятельно и не оказывать помощь в выполнении задания другим участникам.

Внимание. Если во время проверки письменных работ жюри обнаружит идентичный текст (или текст с одинаковыми грамматическими, речевыми или смысловыми (фактическими) ошибками) в двух или более работах, то за эти работы баллы не начисляются.

Участнику олимпиады запрещается:

- разговаривать с другими участниками;
- использовать какие-либо справочные материалы (учебные пособия, справочники, словари, записные книжки, в том числе и электронные, и т.д., а также любого вида шпаргалки);
- иметь при себе любые средства мобильной связи, включая смартфон, микрофон, наушники, смарт-часы и пр.;
- покидать пределы территории, которая установлена организаторами для проведения очного тура олимпиады.

Внимание. За нарушение правил поведения участник удаляется с олимпиады с выставлением нуля баллов за выполняющуюся работу независимо от числа правильно выполненных заданий.

Оформление работы

Участник аккуратно заполняет титульный лист папки «Письменная работа», ставит дату и подпись.

На вложенных листах, как для чистовых, так и для черновых записей, можно писать или синей, или фиолетовой, или черной ручкой, одинаковой во всей работе (при необходимости смены цвета ручки следует обратиться за разрешением к организатору в аудитории).

Задания (или часть задания), выполненные на листах, на которых имеются рисунки или записи, не относящиеся к выполняемому заданию, а также записи не на русском языке, и любые другие пометки, которые могут идентифицировать участника, на проверку не поступают и претензии по этим заданиям (задачам) не принимаются. На проверку не поступают также листы, подписанные участником, листы, на которых имеются записи карандашом (кроме рисунков, необходимых для пояснения сути ответа), и рваные (надорванные) листы.

Нельзя делать исправления карандашом.**С правилами поведения на олимпиаде и правилами оформления работы ознакомлен**

(подпись участника олимпиады)

Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Сумма баллов
+	+	±	-	0
20	20	12	4	0

Заполняется проверяющим!

Фамилию, имя, отчество не писать! Лист не подписывать!

N 11.1

$$2\cos^4 x - \sin^3 x = 1$$

$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = (1 - \sin^2 x)^2 = \sin^4 x + 1 - 2\sin^2 x$$

$$2\cos^4 x = 2\sin^4 x + 2 - 4\sin^2 x$$

Подставим:

$$2\sin^4 x + 2 - 4\sin^2 x - \sin^3 x = 1$$

$$2\sin^4 x - \sin^3 x - 4\sin^2 x + 1 = 0$$

$$2\sin^3 x \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) - 4 \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) \left(\sin x + \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\left(\sin x - \frac{1}{2} \right) (2\sin^3 x - 4\sin x - 2) = 0 \quad | :2$$

$$\left(\sin x - \frac{1}{2} \right) (\sin^3 x - 2\sin x - 1) = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\left(\sin x - \frac{1}{2} \right) (\sin x + 1) (\sin^2 x - \sin x - 1) = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = -1$$

$$\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = -1 \\ \sin x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \sin x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Оценим: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\sqrt{5} > 2$$

$$1+\sqrt{5} > 3$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1,5$$

Следовательно

$$-3 < -\sqrt{5} < -2$$

$$-2 < 1-\sqrt{5} < -1$$

$$-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < -\frac{1}{2}$$

$$\sin x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

- решение нет

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = -1$$

$$\sin x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

→ заменим решение eq

№ 11.1 (прод.)

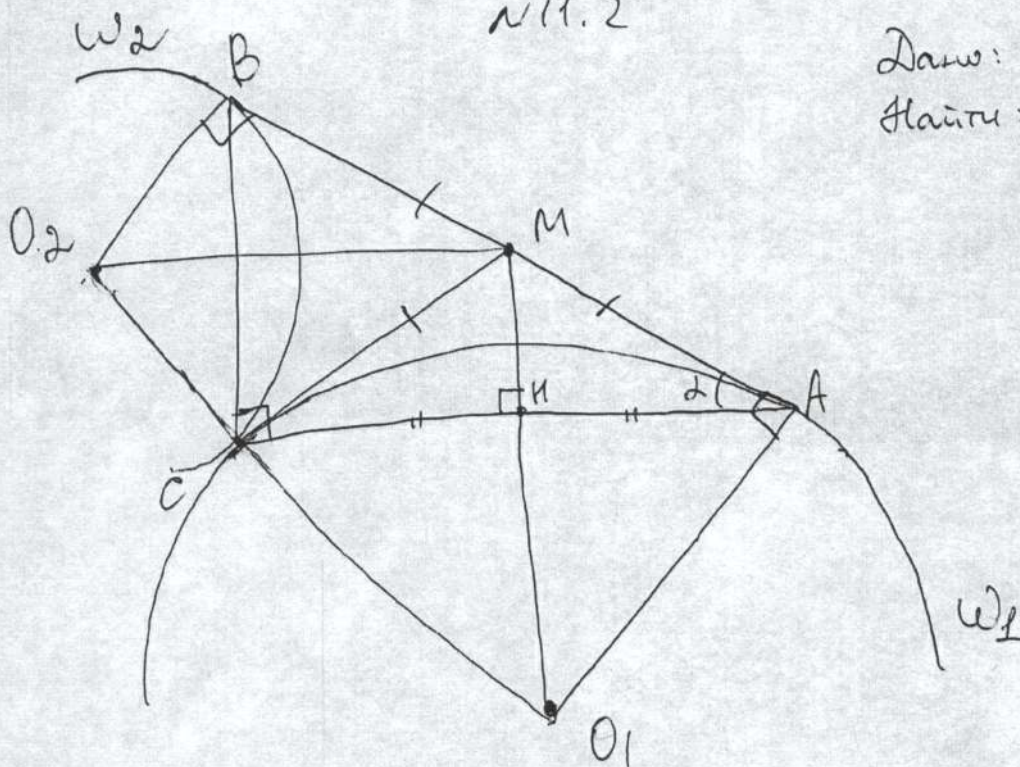
$$\begin{cases} x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ x = (-1)^{n+1} \cdot \arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + \pi n \end{cases}$$



Ответ: $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n; (-1)^{n+1} \cdot \arccos\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

№ 11.2

Дано: \angle
Найти: $\frac{S_{ABC}}{S_{O_1MO_2}}$



Решение:

т.к. M - с.р. от. AB, то $MA = MB = MC$

~~Рассмотрим треугольник MOC~~

Проведём $MH \perp AC$ в $\triangle AMC$ (H - с.р. AC т.к. $\triangle M(\delta)$)
в $\triangle CO_1A$ проведём O_1H - мед.

т.к. $O_1C = O_1A$, то O_1H мед и выс, т.е. M, H, O_1 - одна

~~прямая A с.с.м. от. прямой MO~~

точки A и C с.с.м. групп групп. относ. MO,
 MA - кас. к $\omega_1 \Rightarrow MC$ - кас. к ω_1

Аналогично для ω_2 :

MB - кас. к $\omega_2 \Rightarrow MC$ - кас. к ω_2

т.е. окружности ω_1 и ω_2 касаются в точке C
тогда O_1, C, O_2 - лежат на одной прямой

N 11.2 (прод.)

По гон. $\angle MO_1$ - уг., выс. и дуг. в $\triangle AMC$, м.е.
 ~~$\angle AMO_1$~~ - дуг. $\angle AMC$

Аналогично: MO_2 - дуг. $\angle BMC$

$$\angle AMC + \angle BMC = 180^\circ$$

$$\angle O_2MC + \angle O_1MC = \frac{\angle BMC}{2} + \frac{\angle AMC}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \Rightarrow$$

$\Rightarrow \triangle O_2MO_1$ - прямоуголь.

Пусть r_1 - радиус ω_1 ; r_2 - радиус ω_2 ; $a = AB$

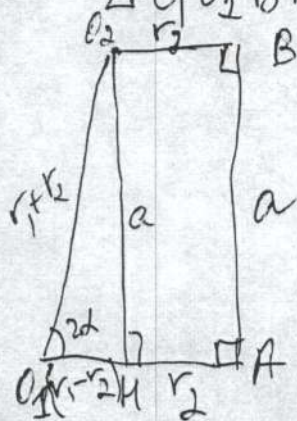
в $\triangle ABC$: $BC = a \sin \alpha$, $AC = a \cos \alpha$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC = \frac{a \cdot \sin \alpha \cdot a \cdot \cos \alpha}{2} = \frac{a^2}{4} \cdot \sin 2\alpha$$

Рассмотрим $\square O_1O_2BA$:

$O_2B \perp BA$ (м.к. AB кас. к ω_2)
 $O_1A \perp BA$ (м.к. BA кас. к ω_1) $\Rightarrow O_2B \parallel O_1A \Rightarrow$

$\Rightarrow \square O_1O_2BA$ - прямоуголь



$$O_1O_2 = r_1 + r_2$$

$$O_2B = r_2$$

$$O_1A = r_1$$

~~Н~~ Проведем $BH \perp O_1A$ ($O_2H = BA = a$)
 Тогда $HA = O_2B = r_2$, а $O_1H = r_1 - r_2$
 в прямоуголь. $\triangle O_1O_2H$ по м. Пифагора:

$$O_1H^2 + O_2H^2 = O_1O_2^2$$

$$a^2 + (r_1 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2$$

$$a^2 = 4r_1r_2$$

$$a = 2\sqrt{r_1r_2}$$

Тогда $S_{ABC} = \frac{4r_1r_2}{4} \cdot \sin 2\alpha = r_1r_2 \cdot \sin 2\alpha$

$\angle MAO_1 = 90^\circ$ (по гон.) $\Rightarrow \angle CAO_1 = 90^\circ - \alpha$, м.к.

$\triangle CO_1A$ - п/б, но $\angle ACO_1 = 90^\circ - \alpha \rightarrow \angle CO_1A = 2\alpha$

м.е. $\angle O_2O_1H = 2\alpha$

11.2 (прод.)

8. пр.м. $\triangle O_1 O_2 H$:

$$\sin(2\alpha) = \frac{a}{r_1 + r_2}$$

$$S_{MO_1 O_2} = \frac{1}{2} O_2 M \cdot O_1 M$$

$$O_1 M^2 = AM^2 + AO_1^2 \text{ (по м. Пифагора)}$$

$$O_1 M^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + r_1^2$$

$$O_1 M = \sqrt{r_1^2 + \frac{a^2}{4}}$$

$$O_2 M^2 = BM^2 + BO_2^2 \text{ (по м. Пифагора)}$$

$$O_2 M = \sqrt{r_2^2 + \frac{a^2}{4}}$$

$$S_{MO_1 O_2} = \frac{1}{2} \sqrt{r_1^2 + \frac{a^2}{4}} \cdot \sqrt{r_2^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{r_1^2 + r_1 r_2} \cdot \sqrt{r_2^2 + r_1 r_2} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{r_1 r_2 (r_1 + r_2)^2} = \frac{1}{2} (r_1 + r_2) \cdot \sqrt{r_1 r_2}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{MO_1 O_2}} = \frac{r_1 r_2 \cdot \sin 2\alpha}{\frac{1}{2} (r_1 + r_2) \cdot \sqrt{r_1 r_2}} = \frac{\sqrt{r_1 r_2} \cdot \sin 2\alpha}{\frac{1}{2} (r_1 + r_2)} =$$

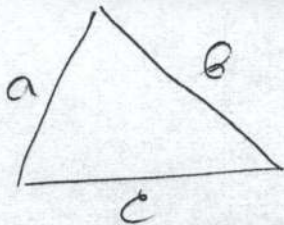
$$= \frac{(2\sqrt{r_1 r_2}) \cdot \sin 2\alpha}{(r_1 + r_2)} = \frac{a \sin 2\alpha}{r_1 + r_2} = \sin 2\alpha \cdot \sin 2\alpha =$$

$$= \sin^2(2\alpha)$$

$$\boxed{\text{Ответ: } \sin^2(2\alpha)}$$

+

N 11.3

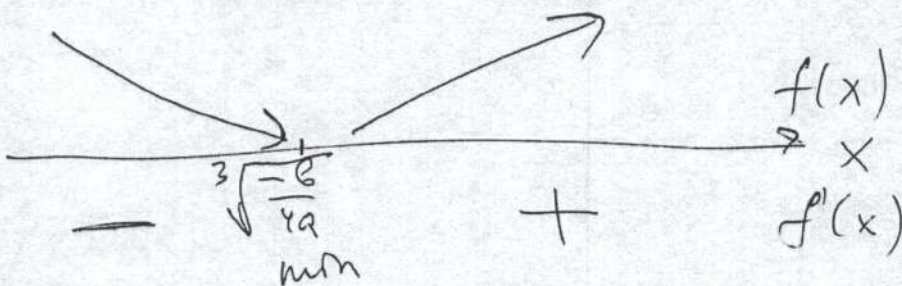


$$ax^4 + bx = c$$

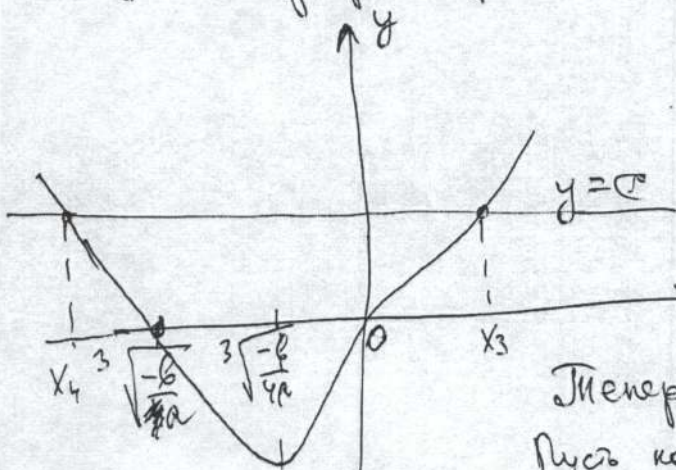
Пусть $f(x) = ax^4 + bx$
 $f'(x) = x(ax^3 + b) = 0.$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{-\frac{b}{a}} \end{cases} \quad - \text{ корни } f'(x)$$

~~м.к.~~
 $f'(x) = 4ax^3 + b = 0.$
 $x = \sqrt[3]{-\frac{b}{4a}}$



П.е. график $f(x)$ выглядит примерно так



$(-\infty; \sqrt[3]{-\frac{b}{4a}}] f(x) \downarrow$
 $[\sqrt[3]{-\frac{b}{4a}}; +\infty) f(x) \uparrow$
 Какие пределы на ∞ ?

м.к. $c > 0$ (сторона $\triangle ABC$),
 то будет ровно 2 решения

Теперь у-ам, что они разных знаков:
 Пусть корни $ax^4 + bx = c$ будут x_3, x_4

Помимо, что так как $c > 0$ то
 корни (x_3, x_4) будут НУО : $x_3 > 0, x_4 < \sqrt[3]{-\frac{b}{a}}$

$x_3 > 0$ - positif

$x_4 < \sqrt[3]{-\frac{b}{a}}$ - отриц.

м.к. локальный мин. меньше 0,

то $|x_3| < |x_4|$

нет раз-ва

Ч.Т.Д.

5

N 11. 4.

$$9^{x^{6x}} = 1$$

$$x^{6x} = \frac{1}{9}$$

$$x^{6x} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$(x^{3x})^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$(1): \begin{cases} x^{3x} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$(2): \begin{cases} x^{3x} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

~~Задача решена. Вспомогательные уравнения решены. Проверка: при $x = \frac{1}{3}$ получаем $9^{(\frac{1}{3})^2} = 9^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{9} = \sqrt[3]{3} \neq 1$. При $x = -\frac{1}{3}$ получаем $9^{(-\frac{1}{3})^2} = 9^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{9} = \sqrt[3]{3} \neq 1$. При $x = \frac{1}{9}$ получаем $9^{(\frac{1}{9})^6} = 9^{\frac{1}{81}} = \sqrt[81]{9} = \sqrt[9]{3} \neq 1$. При $x = -\frac{1}{9}$ получаем $9^{(-\frac{1}{9})^6} = 9^{\frac{1}{81}} = \sqrt[81]{9} = \sqrt[9]{3} \neq 1$. При $x = \frac{1}{27}$ получаем $9^{(\frac{1}{27})^6} = 9^{\frac{1}{27}} = \sqrt[27]{9} = \sqrt[3]{3} \neq 1$. При $x = -\frac{1}{27}$ получаем $9^{(-\frac{1}{27})^6} = 9^{\frac{1}{27}} = \sqrt[27]{9} = \sqrt[3]{3} \neq 1$. При $x = \frac{1}{81}$ получаем $9^{(\frac{1}{81})^6} = 9^{\frac{1}{243}} = \sqrt[243]{9} = \sqrt[27]{3} \neq 1$. При $x = -\frac{1}{81}$ получаем $9^{(-\frac{1}{81})^6} = 9^{\frac{1}{243}} = \sqrt[243]{9} = \sqrt[27]{3} \neq 1$. При $x = \frac{1}{243}$ получаем $9^{(\frac{1}{243})^6} = 9^{\frac{1}{6561}} = \sqrt[6561]{9} = \sqrt[729]{3} \neq 1$. При $x = -\frac{1}{243}$ получаем $9^{(-\frac{1}{243})^6} = 9^{\frac{1}{6561}} = \sqrt[6561]{9} = \sqrt[729]{3} \neq 1$. При $x = \frac{1}{6561}$ получаем $9^{(\frac{1}{6561})^6} = 9^{\frac{1}{43046721}} = \sqrt[43046721]{9} = \sqrt[4896243]{3} \neq 1$. При $x = -\frac{1}{6561}$ получаем $9^{(-\frac{1}{6561})^6} = 9^{\frac{1}{43046721}} = \sqrt[43046721]{9} = \sqrt[4896243]{3} \neq 1$. При $x = \frac{1}{43046721}$ получаем $9^{(\frac{1}{43046721})^6} = 9^{\frac{1}{3222255369}}$~~

~~и т.д.~~

по ОДЗ x либо любое положительное, либо целое число. - $6x \in \mathbb{Z}$

Решим сначала (2) ур-ие:

$x^{3x} = -\frac{1}{3}$, если $x > 0$, то $x^{3x} \geq 0$
т.е. решений нет

Если $x < 0$, $x \in \mathbb{Z}$

$$x = -1:$$

$$(-1)^{-3} = -1$$

$$x = -2:$$

$$(-2)^{-6} = \frac{1}{64}$$

$$x = -3:$$

$$(-3)^{-9} = -\frac{1}{3^9}$$

при $x \rightarrow -\infty$

$y \rightarrow 0$

при

$$x \leq -2$$

$$|x^{3x}| < \frac{1}{3}$$

а при $x = -1$ не подходит

значит решений ур-ия:
 $x^{3x} = -\frac{1}{3}$ нет

Надо проверить и отрицательные x (2004)
 $(3x \in \mathbb{Z})$

№11.4 (арог.)

Решим теперь ~~то~~ 1 ур-ие

$$x^{3x} = \frac{1}{3}$$

при $x < 0$, $x \in \mathbb{Z}$ мы уже выяснили, что

$$|x^{3x}| < \frac{1}{3} \quad \text{при } x \leq -2, \text{ а}$$

при $x = -1$ не подходит.

Осталось $x \geq 0$:

$$x^{3x} = \frac{1}{3}$$

$$x^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$x = \frac{1}{3}$$

уверенно

а) Ответ: 1 корень $\neq \frac{1}{3}$

б) Ответ: нет