Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Национальный исследовательский университет

Учебно-научный и инновационный комплекс
"Новые многофункциональные материалы и нанотехнологии"

Игнатов С.К.

МЕХАНИКА.
КУРС ЛЕКЦИЙ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ХИМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Электронное учебное пособие

Мероприятие 1.2. Совершенствование образовательных технологий, укрепление материально-технической базы учебного процесса

Учебные дисциплины: «Общая физика»

Специальности, направления: Направление подготовки 020100 «Химия», специальности 020101 «Химия», 020801 «Экология», 240306 «Химическая технология монокристаллов, материалов и изделий электронной техники»

Нижний Новгород
2010

МЕХАНИКА. КУРС ЛЕКЦИЙ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ХИМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ. Игнатов С.К. Электронное учебное пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2010. – 102 с.

Мероприятие 1.2. Совершенствование образовательных технологий, укрепление материально-технической базы учебного процесса.

В настоящем учебном пособии представлен курс лекций, разработанный на основе учебной программы «Общая физика» для студентов химического факультета. В отличие от известных курсов и стандартных учебников, в данном пособии более подробно рассмотрены вопросы, приближающие курс общей физики к специальности «химия», сделан акцент на вопросах физической теории, вызывающие затруднения студентов при изучении химических дисциплин. В частности, кратко изложена теория движения вращающегося тела по орбите (основа теории спина и спин-орбитального взаимодействия), вращения тел вокруг неподвижной точки (основы теории микроволновой спектроскопии), движения тел в сильных гравитационных полях (основы центрифугирования).

Электронное учебное пособие предназначено для студентов ННГУ, обучающихся по направлению подготовки 020100 «Химия» и специальностям 020101 «Химия», 020801 «Экология», 240306 «Химическая технология монокристаллов, материалов и изделий электронной техники».

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Материал пособия изложен в том порядке, в каком он излагается на лекциях по общей физике для студентов 1 курса химического факультета (2 семестр). Разделения на отдельные лекции нет, вместо этого материал разделен на темы. Материал, помеченный знаком ●, представляет собой определения или основные законы. Они обязательны для изучения и соответствуют формулировкам вопросов коллоквиумов и предэкзаменационных тестов (но далеко не исчерпывают их). Материал, помеченный серым шрифтом, необязателен для изучения, обычно это математические выводы повышенной сложности для студентов с хорошей математической подготовкой. Формулы в рамках, а также подчеркнутый жирный шрифт выделяет материал, на который следует обратить внимание. Текст курсивом выделяет вопросы, логически подводящие к изложению последующего материала. Нумерация формул приводится только там, где на них есть ссылки далее в тексте. Материал в целом основан на изложении механики в учебниках Савельева и Трофимовой, рекомендованных в качестве основных учебников по общей физике для студентов химического факультета ННГУ. Однако, для проработки материала, непонятного на основе приведенных лекций, а также для ознакомления с дополнительным материалом (весьма объемным и зачастую очень познавательным), рекомендуется использовать дополнительные учебники, приведенные в разделе «Список рекомендованной литературы». Автор очень рекомендует студентам относиться к этой литературе не как к «материалу для заучивания» в ночь перед экзаменом, а как к легкому и непринужденному чтению в свободное время во время семестра. Во время этого чтения можно пропускать сложные выводы, но обращать внимание на смысл описываемых явлений, логику выводов и скрытую взаимосвязь казалось бы разнородных явлений, красоту и изящество картины природы, возникающей по мере того как человек усваивает научный взгляд на мир.

Список рекомендуемой литературы

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. Механика, колебания и волны, молекулярная физика. – М.: Наука, 1970 – 511 с.
2. Трофимова Т.И. Курс физики: Учеб. пособ. для вузов. – М.: Высшая школа, 1990. – 478 с.
3. Иродов И.Е. Основные законы механики. – М. Наука, 1990. – 247 с.
4. Сивухин Д.В. Общий курс физики Т.1. Механика. – М.: Наука, 1979. – 520 с.
5. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. – М.: ОНИКС 21 век, Мир и образование, 2003. – 432 с.
6. Джанколи Д. Физика. Т.1. – М.: Мир, 1989. – 656 с.

Часть этой литературы в настоящее время может быть найдена в Интернет, в частности на сайте кафедры фотохимии и спектроскопии ННГУ http://ichem.unn.ru/pcs

Список сокращений (в алфавитном порядке)

ГМИ	Главные моменты инерции
ЗН	Закон Ньютона
ЗСИ	Закон сохранения импульса
ИКС	Инфракрасная спектроскопия
ИМТ	Изолированная материальная точка
ИСО	Инерциальная система отсчета
КЭ	Кинетическая энергия
МВС	Микроволновая спектроскопия
МТ	Материальная точка
НСО	Неинерциальная система отсчета
ОТО	Общая теория относительности
ПЭ	Потенциальная энергия
СО	Система отсчета
СТО	Специальная теория относительности
ЦМ	Центр масс

КИНЕМАТИКА ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Основные понятия кинематики

● **Механика** – раздел физики, изучающий движение тел в пространстве.

● **Движение** – изменение положения тела в пространстве в зависимости от времени.

● **Кинематика** – раздел механики, изучающий движение тел, независимо от причины их движения.

Простейшим объектом механики и, в частности, кинематики является материальная точка.

● **Материальная точка** (МТ) – тело, размерами которого в данной задаче можно пренебречь.

- МТ характеризуется только положением и массой.
- МТ – это абстрактное понятие: идеальной МТ не существует
- Во многих задачах можно выделить тела, которые с хорошей степенью точности описываются как МТ, напр. солнечная система (солнце, планеты, их спутники – МТ)

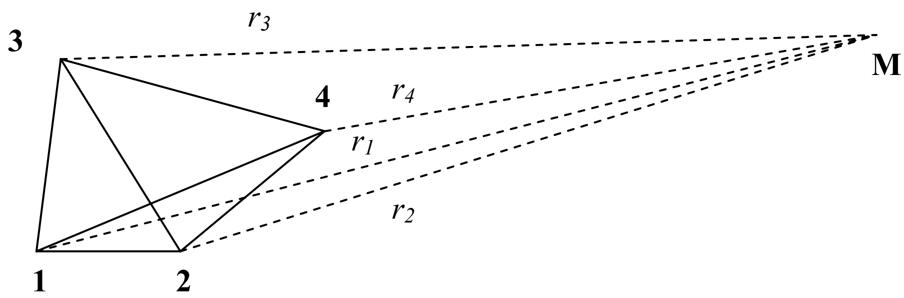
Как описать движение МТ?

Описание движения – это описание изменения положение тела во времени. Любое положение (и, следовательно, любое движение) можно описать только относительно других тел. Для этого необходимо выбрать **тело отсчета.**

Описание положения точки относительно тела отсчета – это определение расстояний от данной МТ до точек тела отсчета. **Для однозначного описания положения МТ в трехмерном пространстве необходимо 4 опорных точки, не лежащих в одной плоскости.** Таким образом:

● **Тело отсчета** - любое тело, имеющее 4 точки (1,2,3,4), не лежащие в одной плоскости, расстояния между которыми в процессе наблюдения не изменяются.

Описание положения материальной точки **М** в пространстве – это определение 4 расстояний до опорных точек **1, 2, 3, 4**, например:



Определение расстояний в конечном итоге всегда сводится к сравнению отрезков с некоторым числом **эталонов длины (**например, делений линейки)**.** Длина – это число единичных эталонов длины (или их долей), соответствующих данному расстоянию.

Движение точки можно описать, зная изменение положения в ходе определенного промежутка времени. Определение времени возможно путем отсчета единичных интервалов длительности (или их долей), задаваемых **эталоном времени** (например, длительностью колебания маятника в часах).

Наиболее точным эталоном времени в современной науке служит период колебаний электромагнитной волны, излучаемой определенными атомами (см. ниже «Единицы измерения времени и длины»). Эталоном расстояния – расстояние, проходимое светом в вакууме за единицу времени. Длина и длительность этих эталонов выражена в **единицах длины и времени.**

Единицы измерения времени и длины

В настоящее время исходными величинами для определения интервалов времени и длины являются секунда и скорость света в вакууме. Скорость света в вакууме принята в качестве точной физической константы. Метр является производной единицей, определяемой на основе этих двух величин.

[t] = 1 секунда = 1 с

● **Секунда** – интервал времени равный 9192631770 периодов излучения между сверхтонкими уровнями ^{133}Cs при T = 0 К в отсутствии внешних полей. (1983 г.)

(Примечание: В наст. время самые точные атомные часы (США, 2009 г) на изотопах Al и Mg «уходят» на 1 с за 4 млрд лет (время жизни Вселенной ~13.5 млрд лет)

● **Скорость света в вакууме**

c = 299792458 м/с (принята точной величиной с 1983 г.) ~1 079 252 848.8 км/ч

[L] = 1 метр = 1 м

● **Метр** – длина пути, проходимая светом в вакууме за (1/299792458) секунды. (1983 г.)

До 1983 г. метр являлся исходной величиной (использовался эталон «Парижский метр»), а скорость света – производной. Это определение до сих пор часто встречается в старых справочниках.

● Совокупность тела отсчета, эталона времени и эталона длины называют **системой отсчета (СО)**.

Обратите внимание, что все составляющие СО – тело отсчета, эталон расстояния, эталон времени – это реальные физические объекты, а не просто математические понятия. Они подвержены физическим воздействиям, происходящим в изучаемой системе.

● Расстояния r_1, r_2, r_3, r_4 от М до опорных точек называются **координатами** точки М в заданной **координатной системе**, а способ их нахождения (включая способ задания опорных точек) – **системой координат**.

На практике удобно определять опорные точки особым способом, например, так, чтобы векторы

$$\overline{i} = \overrightarrow{(1,2)} \quad \overline{j} = \overrightarrow{(1,3)} \quad \overline{k} = \overrightarrow{(1,4)}$$

(**базисные векторы**, или **орты**) были взаимно ортогональны. Тогда любой вектор $\overline{r} = \overline{(1,M)}$ однозначно описывается длинами проекций на направления векторов:

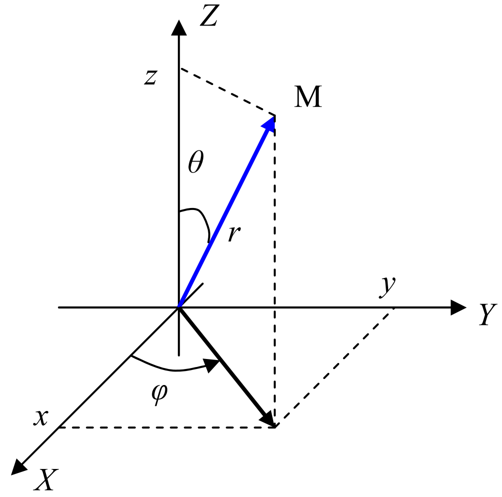
$$\overline{r} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$$

Определенная таким образом система координат называется **декартовой системой координат**, а тройка чисел (x, y, z) – **декартовыми координатами** точки M**.**

Любой набор чисел (q_1, q_2, q_3), из которого в любой момент времени можно однозначно выразить (x, y, z) по некоторому правилу (например, применением функции $x=f_1(q_1,q_2,q_3)$, $y=f_2(q_1,q_2,q_3)$, $z=f_1(q_1,q_2,q_3)$ также является координатами (часто их называют **обобщенные координаты**). Примерами часто используемых систем координат являются

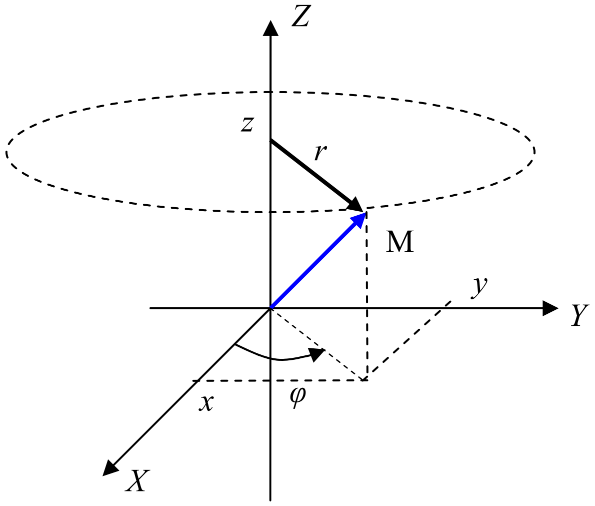
● **Сферические координаты** (r,θ,φ):

$$x = \sin\theta\cos\varphi, \quad y = \sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$



● **Цилиндрические координаты** (r, φ, z):

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z$$



Система координат, в отличие от системы отсчета – понятие математическое. На нее (т.е. на функции $x=f_1(q_1,q_2,q_3)$, $y=f_2(q_1,q_2,q_3)$, $z=f_1(q_1,q_2,q_3)$) не влияют физические процессы, происходящие в реальной системе.

Вышеуказанные определения длины, эталонов расстояний и времени подразумевают, что

- физическое пространство **однородно, изотропно, бесконечно делимо** и **эвклидово** (плоское)
- время **однородно, необратимо и бесконечно делимо**
- время и пространство не зависят друг от друга
- все механические процессы протекают одинаково в любых частях пространства.

Эти положения составляют основу **классического механического описания природы**. **Это приближенное описание. Оно ограничено несколькими факторами**:

- однородность пространства и времени может нарушаться на малых расстояниях (10^{-34} м, теория струн)
- процессы зависят от скоростей систем отсчета, от масс вблизи которых находится система (СТО, ОТО)

- материальная точка становится плохим приближением для описания поведения малых частиц (квантовая механика).

● Если координаты МТ известны (измерены либо заданы) в любой момент времени, то можно указать вектор-функцию (совокупность трех функций), которая называется **закон движения** материальной точки:

$$\overline{r} = \overline{r}(t) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Если система состоит из N МТ, то закон движения есть система $3N$ уравнений, например:

$$\begin{cases} \overline{r_1} = \overline{r_1}(t) \\ \overline{r_2} = \overline{r_2}(t) \\ \ldots \\ \overline{r_N} = \overline{r_N}(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ y_1 = y_1(t) \\ \ldots \\ z_N = z_N(t) \end{cases} \quad \text{- (}3N\text{ скалярных уравнений)} \qquad (1)$$

Не все координаты могут быть независимы. В некоторых механических системах часть из них связана т.н. **уравнениями связи.** Например, если молекула состоит из двух атомов, соединенных жёсткой химической связью (которая в данной задаче имеет постоянную длину l), то возникает уравнение связи:

$$l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \qquad (2)$$

Объединив уравнения (1) и (2), можно выразить одну из шести координат (любую) через пять оставшихся и l. Т.е. пять координат будут независимыми, а шестая – будет зависеть от них.

● Число независимых координат, которые достаточны для описания положения всех точек системы называются **числом механических степеней свободы системы**:

$$\boxed{N_{CC} = 3N - N_{связей}}$$

● **Траектория** – линия, описываемая МТ в пространстве за все время движения. Ее уравнения можно получить, если исключить *t* из (1).

- Если траектория – прямая: *прямолинейное движение*
- Если траектория – кривая: *криволинейное движение*

● **Длина пути *Δs*** – длина участка траектории, пройденная за определенное время

$$\Delta s = \Delta s(t)$$

● **Перемещение *Δr*** – вектор, проведенный из начального положения МТ в точку положения в данный момент.

$$\Delta\overline{r} = \overline{r}(t) - \overline{r}(0) = \begin{cases} x(t) - x(0) \\ y(t) - y(0) \\ z(t) - z(0) \end{cases}$$

● **Скорость** (**мгновенная скорость**) ***V*** – векторная величина, определяющая направление и быстроту перемещения в данный момент *t*

$$\overline{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overline{r}}{\Delta t} = \frac{d\overline{r}}{dt} = \begin{cases} v_x = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{dt} \\ v_y = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta y}{dt} \\ v_z = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta z}{dt} \end{cases} = \begin{cases} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{cases} .$$

● **Средняя скорость**

$$< \overline{V} >= \frac{\Delta \overline{r}}{\Delta t}$$

Движение, при котором $|V|$ = *const* называется **равномерным**

Движение, при котором $|V|$ /= *const* называется **неравномерным**

● Для криволинейного движения иногда вводят величину $< V' >= \frac{\Delta s}{\Delta t}$ (**средняя путевая скорость, средняя скорость криволинейного движения**).

Для криволинейного движения: $< V' > \quad > \quad < V >$

Для прямолинейного движения: $< V' > \quad = < V >$

● **Пройденный путь**

- при прямолинейном равномерном движении:

$$ds = Vdt$$

$$\Delta s = V \Delta t$$

- при прямолинейном неравномерном движении:

$$\Delta s = \int_{t=0}^{t=t_1} V(t)dt$$

<u>Для неравномерного движения необходимо знать, как быстро изменяется скорость:</u>

● **Ускорение** (**мгновенное ускорение**) ***a*** – векторная величина, характеризующая направление и быстроту изменения вектора скорости

$$\overline{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overline{V}}{\Delta t} = \frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{d^2 \overline{r}}{dt^2} = \dot{V}(t) = \ddot{r}(t) \qquad .$$

● **Среднее ускорение**

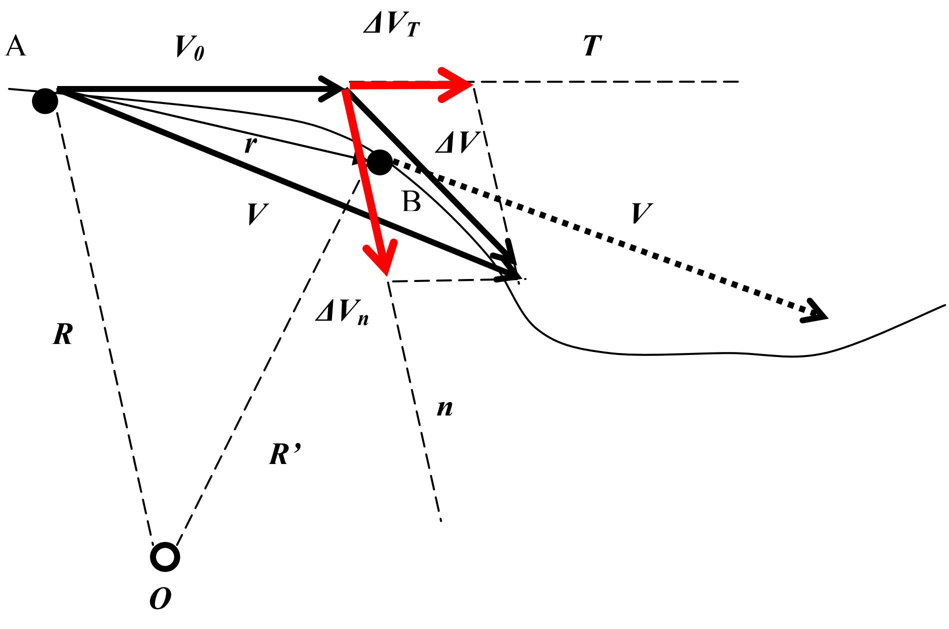
$$<\bar{a}>=\frac{\Delta\bar{V}}{\Delta t}$$

Ускорение при криволинейном движении

При криволинейном движении удобно представить ускорение в виде двух компонент

- вектор, характеризующий изменение модуля скорости
- вектор, характеризующий изменение направления скорости

Рассмотрим участок криволинейной траектории, проходимый телом в данный момент времени *t*. В этот моменту кривую можно представить в виде некоего участка окружности с центром *O* (мгновенный центр) и радиусом *R*.



Хотя в последующий момент времени *t'>t* центр мгновенной окружности переместиться в новую точку, а радиус приобретет новое значение, в момент *t* существуют линии касательной τ к мгновенной окружности, и нормали *n*, направленной из точки касания к центру *O*. Спроектируем скорость $\bar{V}$ на эти направления как показано на рисунке. Определим:

● **Тангенциальное ускорение –** ускорение, характеризующее изменение модуля вектора скорости

$$\boxed{\overline{a}_\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overline{V}_\tau}{\Delta t} = \frac{d\overline{V}_\tau}{dt}}$$

● **Нормальное ускорение**– ускорение, характеризующее изменение направление вектора скорости

$$\boxed{\overline{a}_n = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overline{V}_n}{\Delta t}}$$

Чему равны эти компоненты ускорения?

$$\overline{V} = \left|V\right| \overline{\tau} = V\overline{\tau}$$

$$\frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{d(V\overline{\tau})}{dt} = \frac{dV}{dt}\overline{\tau} + V\frac{d\overline{\tau}}{dt}$$

$$d\overline{\tau} = \overline{n}'\,|\,\overline{\tau}\,|\,d\alpha = \overline{n}'\frac{ds}{R} \approx \overline{n}'\frac{Vdt}{R} \xrightarrow[(\alpha\to 0)]{} \overline{n}\frac{Vdt}{R}$$

$$\frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{dV}{dt}\overline{\tau} + \frac{V^2}{R}\overline{n}$$

Таким образом:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \overline{a}_\tau = \dfrac{dV}{dt}\overline{\tau} & a_\tau = \dfrac{dV}{dt} \\ \overline{a}_n = \dfrac{V^2}{R}\overline{n} & a_n = \dfrac{V^2}{R} \end{array}}$$

Обратите внимание, что выражения справа - это модули, а не векторы!

Полное ускорение может быть найдено как векторная сумма:

$$\overline{a} = \overline{a}_\tau + \overline{a}_n$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

Классификация движений (несколько важных случаев):

1) $a_t=0,\ a_n=0$ - прямолинейное равномерное движение

2) $a_t=a=const,\ a_n=0$ – прямолинейное равноускоренное движение
3) $a_t=0\ a_n=a=const$ – равномерное движение по окружности

Законы движения для скоростей и координат при прямолинейном движении

($a_n=0,\ \ a_t= a=const$)

$$\overline{V} = \frac{d\overline{r}}{dt} \Leftrightarrow \left(V_x = \frac{dx}{dt}; V_y = \frac{dy}{dt}; V_z = \frac{dz}{dt} \right)$$

$$d\overline{r} = \overline{V}dt \tag{1}$$

Решая ДУ (1) находим:

$$\overline{r}(t) = \overline{r}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \overline{V}(t)dt$$

Подробное решение, основанное на теоремах мат.анализа:
Пусть две функции равны:

$$f_1(t) = f_2(t)$$

$$F_1(t) = F_2(t) + C \quad \textit{если функции равны то первообразные отличаются на С}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} F_1(t_0) = F_2(t_0) + C \\ F_1(t_1) = F_2(t_1) + C \end{array} \right.$$

$$F_1(t_1) - F_1(t_0) = F_2(t_1) - F_2(t_0)$$

По формуле Ньютона Лейбница $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ Тогда

$$F_1(t_1) - F_1(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} f_2(t)dt$$

Аналогично

$$\overline{r}(t_1) - \overline{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \overline{V}(t)dt$$

Пусть t_0 – время начала движения, t_1 - время окончания движения (или текущее время наблюдения за движущейся точкой)

Обозначим $\mathbf{r}(t_0)=\mathbf{r}_0$ Тогда из (*)

$$\overline{r}(t)=\overline{r}_0+\int_{t_0}^{t}\overline{V}(t)dt=\begin{cases} x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}V_x(t)dt \\ y(t)=y_0+\int_{t_0}^{t}V_y(t)dt \\ z(t)=z_0+\int_{t_0}^{t}V_z(t)dt \end{cases}\quad (\text{Здесь } \overline{r}(t_0)\equiv\overline{r}_0 \;\; t' \text{ заменено на } t)$$

Аналогично для скоростей:

$$\overline{V}=\frac{d\overline{a}}{dt}$$

$$\overline{V}=\overline{V}_0+\int_{t_0}^{t}\overline{a}(t)dt=\begin{cases} V_x(t)=V_x(t_0)+\int_{t_0}^{t}a_x(t)dt \\ V_y(t)=V_y(t_0)+\int_{t_0}^{t}a_y(t)dt \\ V_z(t)=V_{z0}(t_0)+\int_{t_0}^{t}a_z(t)dt \end{cases}$$

<u>Наиболее важные частные случаи:</u>

1) равномерное движение *a=0, V=const:*

$$\boxed{\begin{array}{l} \overline{a}=0 \\ \overline{V}=\overline{V}_0 \\ \overline{r}=\overline{r}_0+\overline{V}t \end{array}} \qquad (3)$$

2) равноускоренное движение *a=const, V=V(t):*

$$\boxed{\begin{array}{l} \overline{a}=const \\ \overline{V}=\overline{V}_0+\overline{a}t \\ \overline{r}=\overline{r}_0+\overline{V}_0t+\dfrac{\overline{a}t^2}{2} \end{array}} \qquad (4)$$

Примечание: (3) и (4) справедливы для любой компоненты векторов *V, a, r* и должны рассматриваться как система из трех уравнений для компонент *x, y, z*. Таким образом, в скалярном виде (3) и (4) есть системы из 9 уравнений.

Формулы (4) позволяют решать все задачи кинематики при равномерном или равноускоренном движении. Например:

Задача *С башни высотой h брошен камень под углом a к горизонту. Камень упал на расстоянии s от башни через время t_n. Найти начальную и конечную скорости камня и максимальное возвышение над землей траектории камня.*

Решение

Закон движения при равноускоренном движении:

$$\overline{r} = \overline{r_0} + \overline{V_0}t + \frac{\overline{a}t^2}{2}$$

$$\overline{V} = \overline{V_0} + \overline{a}t$$

Их проекции на оси координат (с учетом $a_x = 0, \quad a_y = -g$)

$$OX : x = x_0 + V_{0x}t$$

$$OY : y = y_0 + V_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$$

$$OX : V_x = V_{0x}$$

$$OY : V_y = V_{0y} - gt$$

Проекция на ось OX в момент времени t_n:

$$s = V_{0x}t_n$$

$$s = V_0 \cos\alpha \cdot t_n$$

Отсюда начальная скорость камня:

$$\boxed{V_0 = \frac{s}{t_n \cos\alpha}}$$

Конечная скорость в горизонтальном направлении:

$$V_x = V_{0x} = V_0 \cos\alpha = \frac{s}{t_n}$$

Начальная скорость в вертикальном направлении:

$$V_{0y} = V_0 \sin\alpha = \frac{s}{t_n} tg\alpha$$

Конечная скорость в вертикальном направлении:

$$V_y = V_{0y} - gt_n$$

$$V_y = \frac{s}{t_n} tg\alpha - gt_n$$

Конечная скорость:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{\frac{s^2}{t_n{}^2} + \frac{s^2}{t_n{}^2} tg^2\alpha - 2gstg\alpha + g^2 t_n{}^2}$$

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{s^2}{t_n{}^2 \cos^2\alpha} - 2gstg\alpha + g^2 t_n{}^2}}$$

Проекция скорости на ось OY:

$$V_y = V_{0y} - gt_n$$

Время достижения точки разворота t_H (максимального возвышения), когда вертикальная скорость $V_y=0$, а высота H:

$$0 = V_{0y} - gt_n$$

$$t_H = \frac{V_{0y}}{g} = \frac{stg\alpha}{gt_n}$$

Максимальная высота от земли:

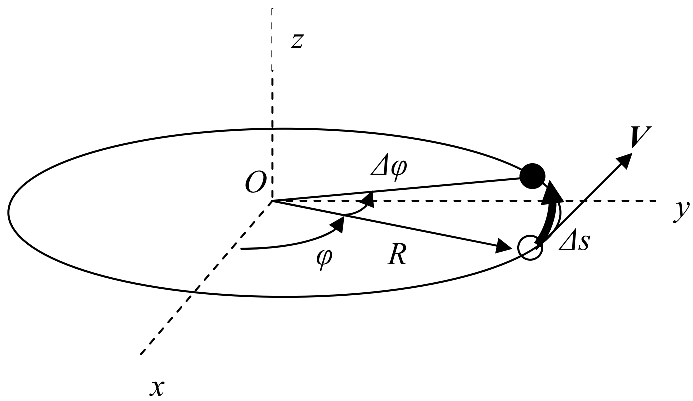
$$H = h + V_{0y} t_H - \frac{gt_H^2}{2}$$

$$H = h + \frac{s^2 tg^2\alpha}{gt^2} - \frac{s^2 tg^2\alpha}{2gt^2}$$

$$\boxed{H = h + \frac{s^2 tg^2\alpha}{2gt^2}}$$

Законы движения при равномерном движении МТ по окружности

($a_n = const,\ \ a_t = 0$**)**



Изменяются две координаты *(x, y)*, но независима только одна, т.к. есть уравнение связи (расстояние до центра вращения постоянно):

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Число степеней свободы: 2 коорд. – 1 у.с. = 1 с.с.

Т.е. можно выбрать одну независимую координату, а все остальные выражать через нее. В качестве такой координаты выберем угол φ между радиусом-вектором МТ и осью ОХ **(φ наз. угловой координатой).** Тогда

$$x = R\cos\varphi$$
$$y = R\sin\varphi$$

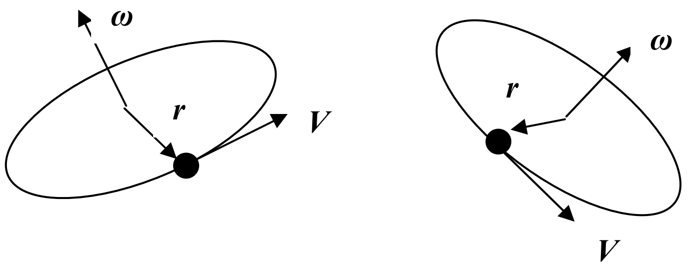
● Величина $\Delta\varphi = \varphi(t) - \varphi(0)$ называется **угловым перемещением** за промежуток времени t.

● **Угловая скорость –** производная углового перемещения по времени

$$\boxed{\omega = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}} \quad (*)$$

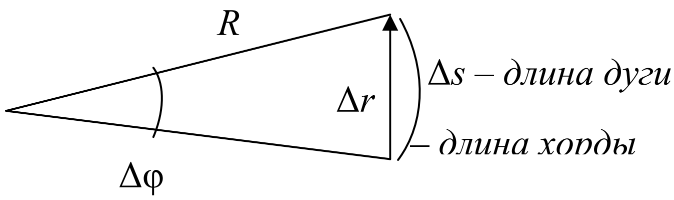
● Для определения оси и направления вращения, угловая скорость считается вектором, сонаправленным с осью вращения. **Направление ω –направление поступательного движения правого винта, вращение которого совпадает с вращением МТ.**

Например:



Единицы измерения угловой скорости: [ω]=1 рад/с= 1 $с^{-1}$

<u>Как связаны линейная и угловая скорость МТ, движущейся по окружности?</u>



$\boxed{\Delta s = R\Delta\varphi}$ - по определению радиана (радиан это угол, при котором длина дуги равна радиусу)

$\boxed{\Delta r \approx \Delta s}$ - при небольших углах

$\boxed{dr = ds}$ - при бесконечно малых углах (доказать самостоятельно!)

(выразить Δr через Δφ по теореме косинусов, разложить в ряд и показать, что с точностью до беск.малых 1 порядка Δr=Δs)

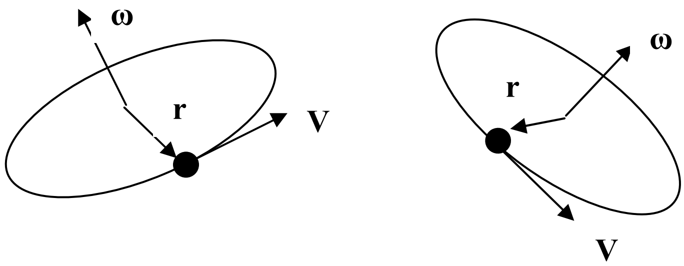
Т.е., $\boxed{dr = Rd\varphi}$. Отсюда $\boxed{V = \frac{dr}{dt} = \frac{Rd\varphi}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt} = R\omega}$

$$\boxed{V = R\omega \qquad \omega = \frac{V}{R}} \quad (**)$$ - выражение для модулей.

Объединяя (*), (**) и правила для направления угловой скорости, получаем:

$$\boxed{\overline{V} = \left[\overline{\omega}, \overline{r}\right] \qquad \overline{\omega} = \frac{\left[\overline{r}, \overline{V}\right]}{R^2}}$$

(**r** – радиус-вектор из центра вращения к МТ, R - его длина, **V** – вектор мгновенной линейной скорости МТ, **w** – вектор ее мгновенной угловой скорости)



Частные случаи движения по окружности

1. ω=const (равномерное движение по окружности)

Один и тот же угол (например, полную окружность) точка проходит за один и тот же интервал времени. Таким образом, ее движение характеризуется **периодом и частотой.**

● **Период вращения T –** время за кот. МТ совершает 1 полный оборот (т.е. $\Delta\varphi=2\pi$)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad [T]=1\ \text{с}$$

● **Частота вращения ν –** число оборотов за единицу времени

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T} \qquad [\nu] = 1\ \text{с}^{-1} = 1\ \text{Герц} = 1\ \text{Гц}$$

● **Циклическая (круговая) частота вращения w** – число радиан, проходимых точкой за единицу времени (совпадает по определению с угловой скоростью)

$$\Omega = \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \qquad [\omega] = 1 \text{ рад с}^{-1} = 1 \text{ с}^{-1}$$

Примечание: в некоторых учебниках и научных работах (особенно западных) частота вращения ν называется циклической частотой (частотой циклов вращения), а частота ω – круговой частотой. В настоящем курсе система обозначений соответствует учебнику Савельева.

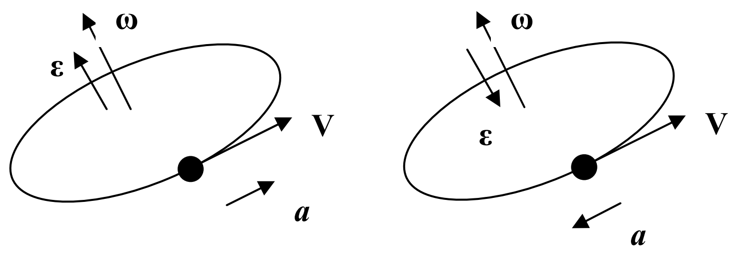
2. Равноускоренное движение по окружности

Введем аналогично линейному ускорению *a* угловое ускорение.

● **Угловое ускорение –** производная угловой скорости по времени

$$\boxed{\bar{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}}$$

- вектор, сонаправленный с **ω**, когда **ω** увеличивается, и направленный против **ω**, когда **ω** уменьшается.



Как связаны угловые величины и линейные ускорения (a_t и a_n)?

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon R$$

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R$$

$$\boxed{\begin{aligned} a_\tau &= \varepsilon R \\ a_n &= \omega^2 R \end{aligned}}$$

- Обратите внимание, что это скалярные равенства! Направления векторов определяются правилами правого винта.

Таким образом, при равноускоренном движении по окружности имеют место зависимости:

$$\boxed{\begin{aligned} s &= R\varphi \\ V &= \omega R \\ a_\tau &= \varepsilon R \\ a_n &= \omega^2 R \end{aligned}}$$

Закон движения при равноускоренном движении по окружности:

$$\boxed{\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \varepsilon t \\ \varphi &= \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2} \end{aligned}}$$

(вывести самостоятельно!)

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Первый закон Ньютона

● **Динамика** - раздел механики, рассматривающий движение тел и те причины, которые вызывают изменение этого движения

● Простейший объект динамики – **изолированная материальная точка (ИМТ)** – материальная точка, бесконечно удаленная от других тел и не испытывающая каких-либо внешних влияний.

ИМТ – абстракция, которая может быть реализована только с определенной точностью

Поведение ИМТ имеет очень важную особенность, которая сформулирована на основе большого числа наблюдений (Галилей, 1590-е гг., сформулирован в математическом виде Ньютоном в 1660-1690 гг.):

● **Принцип инерции Галилея:**

В отсутствие внешних воздействий МТ бесконечно долго сохраняет состояние **покоя** или **равномерного поступательного** движения.

● Это свойство МТ называется **инерция**. В более широком смысле инерция – способность материальных тел (не обязательно точек) сопротивляться попыткам изменениям их скорости движения.

Очевидно, однако, что равномерное движение зависит от выбора СО, поскольку одна СО относительно другой может двигаться с ускорением. Поэтому в настоящее время существование свойств инерции формулируют в виде:

● **I з-н Ньютона:** В природе существуют СО, в которых изолированная МТ сохраняет состояние покоя или равномерного поступательного движения.

<u>Определим:</u>

● **Инерциальная СО** – СО, относительно которой изолированная МТ покоится или движется равномерно и прямолинейно из любого начального положения в любом направлении.

Примеры:

- СО, покоящаяся отн.	*- Земли*	*становится*
	- Солнца	*более*
	- звезд	***инерциальными***
	- галактик	

- СО, вращающаяся равномерно по окружности -

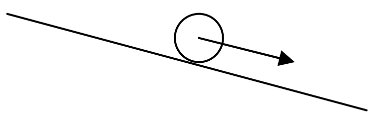
- ***неинерциальна*** *(изолир. МТ движется по окружности)*

- СО, движущаяся с ускорением относительно ИСО – ***неинерциальны*** *(есть важное исключение – СО, свободно падающие в гравитационном поле!)*

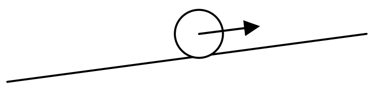
- СО в лифте, свободно падающем с высоты - ?

Таким образом, еще одна (упрощенная) формулировка 1-го закона Ньютона: **«в природе существуют ИСО».**

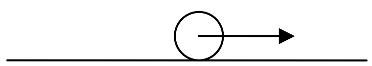
Принцип инерции Галилея открыт Галилео Галилеем при наблюдении за катящимися и падающими телами, позднее математически сформулирован Исааком Ньютоном в книге «Математические начала натуральной философии» (1687 г.). Обратите внимание, что этот принцип противоречит бытовому опыту, согласно которому движущееся тело всегда останавливается. Галилею удалось понять, что принцип бесконечности движения лежит в основе всех явлений, а бытовой опыт – проявление побочных процессов (сил трения). Этот факт очень поучителен, он показывает: **роль ученого при исследовании явлений природы состоит в том, чтобы выделить фундаментальный принцип, замаскированный побочными явлениями.** Часто считается, что в основе такого выделения лежит представление о внутренней симметрии («красоте») окружающего нас мира. Например, в примере с катящимся шариком, представление о его бесконечном движении основано на определенной симметрии картины движения:



шарик разгоняется (соответствует опыту)



шарик замедляется (соответствует опыту)



шарик бесконечно движется без изменения скорости? (противоречит опыту, но делает картину движения симметричной)

Сила

По Галилею и Ньютону, изменение скорости – это всегда влияние других тел. Это влияние необходимо количественно описать.
Количественное описание этого влияния – сила:

● **Сила** – такое влияние тела 2 на МТ 1, в результате которого МТ 1 приобретает ускорение, исчезающее при удалении тела 2 на бесконечное расстояние.

Свойства силы <u>(по определению):</u>

1. Изменение скорости (при отсутствии других сил) совпадает по направлению с действием силы.

2. Чем больше сила, тем больше изменение скорости

3. Силы от различных тел действуют на тело независимо друг от друга.

Математически это означает, что **сила – вектор, свойства которого**:

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1. & \bar{F} \uparrow\uparrow \bar{a} \\ 2. & |\bar{F}| \text{ } \textit{связан с} \text{ } |\bar{a}| \\ 3. & \bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \ldots \\ 4. & |\bar{F}| \to 0 \quad \textit{при} \quad r_{12} \to \infty \end{array}}$$

<u>Примеры сил</u>:

1. Сила упругости: $\boxed{\bar{F}_{упр} = -k\overline{\Delta x}}$
2. Сила гравитационного притяжения: $\boxed{\bar{F}_{12} = G\dfrac{m_1 m_2}{|r_{12}|^2}\dfrac{\overline{r_{12}}}{|r_{12}|}}$
3. Сила Кулона (электростатическая) : $\boxed{\bar{F}_{12} = -k\dfrac{Q_1 Q_2}{|r_{12}|^2}\dfrac{\overline{r_{12}}}{|r_{12}|}}$

$\bar{F}$ не зависит от $\bar{V}$
$\bar{F}$ зависит от $\bar{r}$
(*расстояния до определенной точки*)
(центральные, они же всегда - потенциальные)

4. Сила Лоренца (магнитная): $\boxed{\bar{F}_л = Q\left[\bar{V}, \bar{B}\right]}$

5. Сила Кориолиса (сила отклонения при движении во вращающейся СО)

$$\boxed{\bar{F}_л = 2m\left[\bar{\varpi}, \bar{V}\right]}$$

$\bar{F} \perp \bar{V}$ **(гироскопические)**

6. Сила трения: $\boxed{\bar{F}_{тр} = -\mu N \dfrac{\bar{V}}{|V|}}$, ($N$ – сила нормальной реакции опоры)

7. Сила сопротивления среды: $\boxed{\bar{F}_{Стокс} = -6\pi r\eta \bar{V}}$

$\bar{F} \uparrow\downarrow \bar{V}$ **(диссипативные)**

Любая сила, понимаемая как функция влияния тел, может быть откалибрована по некому эталону силы, например, по эталонной пружине. Уравновешивая неизвестную силу, силами эталонных пружин, можно измерить неизвестную силу. Такой способ определения называется динамометрическим, а прибор – **динамометром.**

Второй закон Ньютона

Экспериментально установлено (Галилей, 1590-1599 г., затем Ньютон обобщил, сформулировал в математическом виде): ускорение тела зависит не только от силы, но и от массы тела (изначально определяемой взвешиванием). Причем **ускорение прямо пропорционально силе и обратно пропорционально массе**:

$$\left.\begin{array}{l} a \sim F(m = const) \\ a \sim \dfrac{1}{m}(F = const) \end{array}\right| \quad \Rightarrow \quad a = k\frac{F}{m}$$

Коэффициент k определяется выбором системы единиц.

В СИ: $k = 1$ $[m] = 1$ кг . Тогда [F]=1 кг*м/с^2 = 1 Ньютон = 1 Н

Отсюда:

● **II закон Ньютона** – в ИСО ускорение, приобретаемое МТ под действием других тел, прямо пропорционально равнодействующей всех сил, действующих на тело, и обратно пропорционально массе МТ.

$$\boxed{\bar{a} = \frac{\bar{F}}{m}}$$

Ограничения: - справедлив только в ИСО ! В НИСО требуется модификация (возникают дополнительные члены)

Примечание: - принцип инерции Галилея – частный случай 2 ЗН.

Более привычная формулировка:

$$\boxed{\bar{F} = m\bar{a}}$$

Сам 2 ЗН может быть использован для определения массы, если известна сила (любой природы!), измерено ускорение и имеется эталонная масса:

$$m = m_{et} \frac{F}{F_{et}} \frac{a_{et}}{a}$$

Определенная таким образом масса называется инертной массой. С другой стороны, можно использовать независимый способ определения массы – используя свойство массы притягивать другие массы (**закон всемирного притяжения**) (открыт Ньютоном на основе описания орбит астрономических тел):

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$$

Если есть эталонная масса, то поочередное измерение притяжения двух тел к телу X дает:

$$F = G\frac{m m_X}{r^2} \qquad F_{et} = G\frac{m_{et} m_X}{r^2} \qquad m = m_{et}\frac{F}{F_{et}}$$

Определенная таким образом масса называется гравитационной.

Итак,

● **Масса** – физ. величина, характеризующая инертные (инертная м.) или гравитационные (гравитационная м.) свойства тела.

● **Физический смысл инертной массы** – мера инертности тела при поступательном движении под действием силы (чем больше масса, тем труднее разогнать тело).

Как связана инертная и гравитационная масса?

До сих пор все самые тщательные измерения показывают, что гравитационная и инертная массы строго пропорциональны.

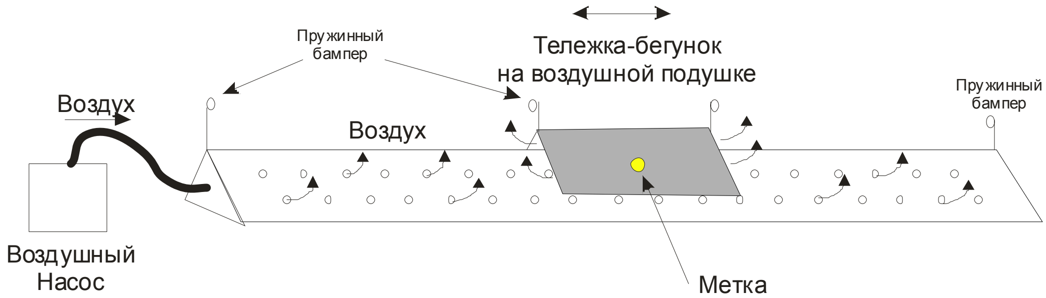
$$\frac{m^{gr}}{m_{et}^{gr}} = \frac{m^{in}}{m_{et}^{in}}$$

Доказательству этого равенства были посвящены специальные **опыты Этвёша** (XIX в.) – относительная точность $5\cdot10^{-9}$, **опыты Дике** (1961-1964 гг.) – точность 10^{-10}. Сегодня достигнутая точность проверки до 10^{-12} т.е.

$$\frac{m^{gr} - m^{in}}{m^{in}} \le 10^{-12}.$$

Этот факт позволил А.Эйнштейну сформулировать принцип общей теории относительности (**принцип эквивалентности**), по которому инертная и гравитационная масса есть одна и та же величина, а гравитационное притяжение является движением тела по инерции в пространстве, искривленном гравитационной массой. На сегодняшний день это не единственное гипотеза о природе гравитации, но одна из наиболее тщательно проработанных и выдержавших за свою долгую множество экспериментальных проверок. Среди этих проверок нет ни одной, которая бы ее явно опровергла.

1 и 2 з-ны Ньютона могут быть продемонстрированы на опыте (с небольшой точностью):



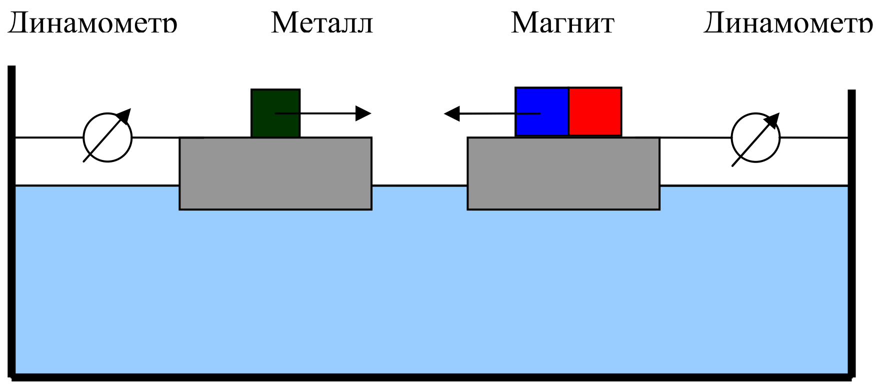
Демонстрация I и II законов Ньютона.

1. Бегунок, приведенный в движение, очень долго сохраняет состояние с почти постоянной скоростью, отталкиваясь от пружинных бамперов.
2. Если прикрепить к бегунку нить с грузиком, он начнет ускоренное движение. Ускорение можно регистрировать наблюдая за меткой через стробоскоп или видеокамеру. Положение метки через равные промежутки времени даст координаты равноускоренной точки.

Следует, однако, четко понимать – справедливость законов Ньютона не вытекает из какого-либо одного эксперимента. Она вытекает из всей совокупности физических выводов, основанных на них и на многолетней практике человечества применения их в технике, науке, повседневном опыте.

Третий закон Ньютона

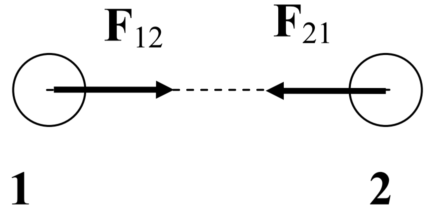
Если два тела взаимодействуют друг с другом, как связаны между собой силы действующие на эти тела? Действует ли только одно тело на другое? Например, Земля, притягивая яблоко, кажется неподвижной, а яблоко падает. Ньютон: это кажущийся эффект. Идея всеобщности действия сил и законов механики засавляет предположить, что тела должны «симметрично» действовать друг на друга. Иначе придется выбрать какое-либо «главное» тело и «побочные». Это демонстрируется опытом:



В том опыте динамометры показывают одинаковую силу для обоих тел, независимо от природы взаимодействия: магнитная сила, сила упругости, сила электростатического притяжения.

Можно сформулировать:

● **III закон Ньютона: с**илы, с которыми две МТ взаимодействуют друг с другом, равны по модулю, противоположны по направлению и действуют вдоль прямой, соединяющей точки.



$$\boxed{\overline{F}_{12} = -\overline{F}_{21}}$$

<u>Примечание</u>: Силы F_{12} и F_{21} нельзя складывать как равнодействующие, т.к. они приложены к разным телам!

Выводы к разделам «Законы Ньютона»

1. Совокупность 3 законов Ньютона составляет основу классической динамики: **пользуясь ими (и функциональными зависимостями сил), можно решить все типы задач** об описании механических движений и их изменений в процессе взаимодействия тел.

Наиболее «прямая» задача: Зная силы и массы → определить ускорения → подставить ускорения в кинематические законы движения и получить скорости и траектории (координаты). При этом требуется знать начальные условия движения: V_0, r_0.

2. Справедливость этих законов нельзя доказать только простыми экспериментами или демонстрациями (слишком много факторов влияет на «чистоту» эксперимента) – **их справедливость доказывалась на протяжении столетий практикой применения классической механики в самых разных областях: <u>астрономия</u>, баллистика, военное дело, строительство, науки о Земле (приливы), инженерная механика, строительство.**
3. Эти законы **ограничены и являются приближенными зависимостями:** (а) ИСО (б) макроскопическими объектами (в) малыми (относительно скорости света) скоростями движения тел.
4. Эти законы – не единственный способ описания классической механики. Существуют альтернативные формулировки классической механики (<u>формулировка Лагранжа</u> (в которой нет сил, но есть энергии), <u>формулировка Гамильтона</u>). В ряде случаев они более общие и эффективные (с точки зрения решения конкретных задач). Однако

Ньютонов формализм самый простой и исторически самый ранний.

5. Т.к. законы Ньютона действуют для любой точки, в том числе и для МТ, взаимодействующей с другими, то они должны действовать и для систем точек. Значит, их можно применять к описанию систем МТ, сложных тел, и систем тел.

Следствия из законов Ньютона

Математически законы Ньютона играют роль аксиом, выбранных на основе опыта. Если их рассматривать как математические уравнения, то можно сразу же вывести несколько важных следствий:

1. З-н сохранения импульса

2. З-н движения центра масс

3. Теорема о кинетической энергии

4.З-н сохранения полной механической энергии

Закон сохранения импульса

Введем величину:

● **Импульс** – векторная величина, равна произведению массы МТ на ее скорость.

$$\boxed{\overline{P} = m\overline{V}}$$

Но:

$$\overline{a} = \frac{d\overline{V}}{dt}$$

$$m\overline{a} = m\frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{d(m\overline{V})}{dt} = \frac{d\overline{P}}{dt}$$

Тогда II з-н Ньютона можно записать:

$$\overline{F} = \frac{d\overline{P}}{dt}$$

Определим:

● **Механическая система** – совокупность точек и тел, рассматриваемых в данной задаче как единая совокупность.

● **Внутренние силы** – силы, действующие между телами системы.

● **Внешние силы** – силы, действующие на тела системы со стороны тел, не входящих в систему.

● **Замкнутая система** – система, на которую не действуют внешние силы.

Рассмотрим систему из *n* точек (*i*=1,2,3…*n*), на которые действуют внешние силы $\mathbf{F}_i$, между точками действуют внутренние силы $\mathbf{F'}_{ij}$ Запишем второй закон Ньютона для всех точек:

$$\begin{aligned}
&\overline{F}'_{12} + \overline{F}'_{13} + \ldots + \overline{F}'_{1n} + \overline{F}_1 = m_1\overline{a}_1 \\
&\overline{F}'_{21} + \overline{F}'_{23} + \ldots + \overline{F}'_{2n} + \overline{F}_2 = m_2\overline{a}_2 \\
&\ldots. \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (*) \\
&\overline{F}'_{n1} + \overline{F}'_{n2} + \ldots + \overline{F}'_{nn-1} + \overline{F}_n = m_n\overline{a}_n
\end{aligned}$$

Сложим (*),сгруппируем силы попарно и применим третий закон Ньютона:

$$\boxed{\underbrace{\overline{F}'_{12} + \overline{F}'_{21}}_{0} + \underbrace{\overline{F}'_{13} + \overline{F}'_{31}}_{0} + \ldots + \underbrace{\overline{F}'_{n1} + \overline{F}'_{1n}}_{0} + \ldots + \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \ldots\overline{F}_n = m_1\overline{a}_1 + m_2\overline{a}_2 + \ldots + m_n\overline{a}_n}$$

Тогда, вспоминая, что *ma=dp/dt*:

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i = \sum_{i=1}^{n}\frac{d\overline{p}_i}{dt}$$, $\mathbf{p}_i$ –импульсы отдельных точек.

Или:

$$\overline{F} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\overline{p}_i$$ (**F** – равнодействующая всех внешних сил).

Т.е.: **равнодействующая всех внешних сил действует на систему так, как если бы система была единственной точкой с импульсом, равным векторной сумме импульсов отдельных точек.**

$\overline{F} = \dfrac{d\overline{P}}{dt}$, где $\overline{P} = \sum_{i=1}^{n}\overline{p}_i$ – полный импульс системы

Если система замкнутая (**F**$_i$=0**),** то

$\boxed{\dfrac{d\overline{P}}{dt} = 0}$, или $\boxed{\overline{P} = const}$.- **Закон сохранения импульса.**

● **Закон сохранения импульса** – импульс замкнутой системы не изменяется с течением времени.

Примечание: 1. В таком виде ЗСИ – всего лишь математическое следствие трех ЗН. Однако он имеет более фундаментальное значение. Можно показать, что он является следствием фундаментального факта – однородности пространства относительно параллельного переноса (все процессы в пространстве протекают одинаково, независимо от того, перенесли ли мы систему на постоянный вектор **r** в любом направлении на любое расстояние). Этот факт очень общий и ЗСИ выполняется даже в квантовой механике (т.е. в области малых расстояний, где не выполняются законы Ньютона). В этом смысле можно считать, что **ЗСИ является более общим законом, чем ЗН, т.е. ЗСИ – одна из аксиом, а ЗН – его следствия.**

2. ЗСИ не зависит от выбора ИСО

3. В этом виде выполняется только в ИСО, в НСО требуется модификация

Закон движения центра масс

Рассмотрим систему из *n* точек с полным импульсом Р.

$$\overline{P} = m_1\overline{V}_1 + m_2\overline{V}_2 + \ldots + m_n\overline{V}_n \quad (1)$$

Пусть М – полная масса системы

$$M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$$

Преобразуем (1)

$$\overline{P} = M\,\frac{m_1\overline{V}_1 + m_2\overline{V}_2 + \ldots + m_n\overline{V}_n}{M}$$

$$\overline{P} = M\,\frac{m_1\dfrac{d\overline{r}_1}{dt} + m_2\dfrac{d\overline{r}_2}{dt} + \ldots + m_n\dfrac{d\overline{r}_n}{dt}}{M}$$

$$\overline{P} = M\,\frac{d}{dt}\underbrace{\frac{m_1\overline{r}_1 + m_2\overline{r}_2 + \ldots + m_n\overline{r}_n}{M}}_{\overline{r}_{CM}} \quad (2)$$

Определим

- **Центр масс (центр инерции) –** точка с координатами

$$\boxed{\overline{r}_{CM} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\overline{r}_i}{\sum\limits_{i}^{n} m_i}}$$

Тогда из (2): $\boxed{\begin{aligned}\overline{P} &= M\,\frac{d\overline{r}_{CM}}{dt}\\ \overline{P} &= M\overline{V}_{CM}\end{aligned}}$ (3)

Дифференцируя (3) по времени, получаем: $\boxed{\begin{aligned}\overline{F} &= M\,\frac{d\overline{V}_{CM}}{dt}\\ \overline{F} &= M\overline{a}_{CM}\end{aligned}}$

Таким образом, имеет место

● **Закон движения центра масс –** центр масс системы движется как точка в которой сосредоточена вся масса системы и на которую действует сила, равная геометрической сумме всех сил, действующих на точки системы.

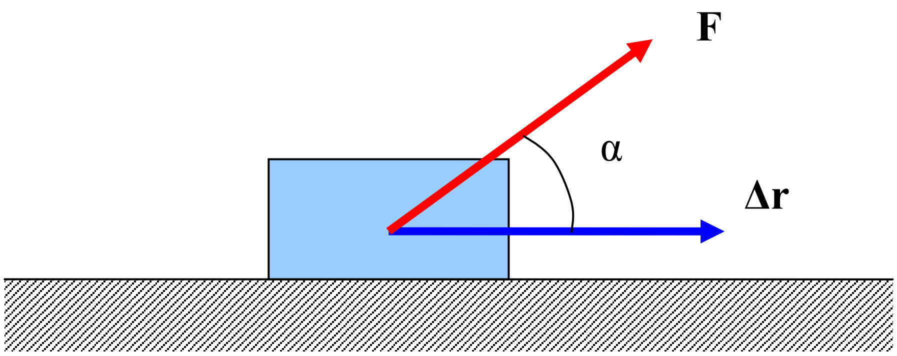
Пример – симметричный разрыв снаряда на множество осколков: Осколки летят по своим траекториям, но их ЦМ движется по траектории снаряда.

ЭНЕРГИЯ, РАБОТА И МОЩНОСТЬ

Механическая работа и мощность

При взаимодействии тел происходит изменение их способности совершать движение. Что является мерой этой способности? Какой величиной можно выразить эту способность? Эта величина называется **энергия,** а ее изменение – **работой (механической работой).**

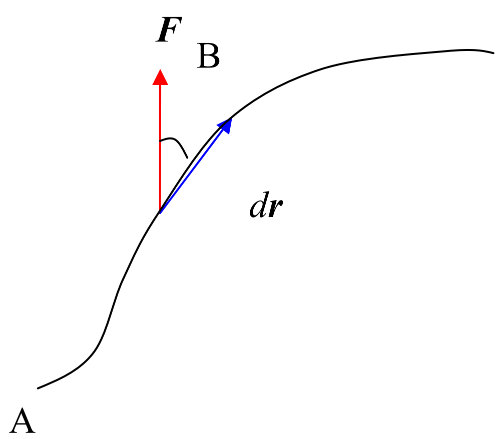
Представим, что тело под действием силы перемещается равномерно и прямолинейно, а векторы силы и перемещения образуют угол α:



● **Работа при равномерном прямолинейном движении -** скалярное произведение силы на перемещение $\Delta\overline{r}$:

$$\boxed{A = (\overline{F} \cdot \Delta\overline{r}) = F \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha}$$

Если движение непрямолинейное, то его можно представить как совокупность бесконечно малых отрезков, движение на каждом из которых равновмерное и прямолинейное.



● **Работа на бесконечно малом прямолинейном отрезке**:

$$dA = Fdr\cos\alpha = (\overline{F}, d\overline{r})$$

● **Работа на всем криволинейном участке** есть интеграл работ на бесконечно малых отрезках всей траектории:

$$A = \int_{\cup AB} F(x)\cos\alpha(x)dx$$

Таким образом, с математической точки зрения работа на произвольном участке движения есть криволинейный интеграл (интеграл по траектории), для вычисления которого в математике разработаны специальные методы.

Удобно использовать следующие формулы (криволинейный интеграл 2 рода):

$$A = \int\limits_{\cup AB} \overline{F} d\overline{r} = \int\limits_{AB} F_x dx + F_y dy + F_z dz =$$

$$= \int\limits_{x_A}^{x_B} F_x(x,y,z)dx + \int\limits_{y_A}^{y_B} F_y(x,y,z)dy + \int\limits_{z_A}^{z_B} F_z(x,y,z)dz$$

$$A = \int\limits_{t_A}^{t_B} \left(F_x(t)V_x(t) + F_y(t)V_y(t) + F_z(t)V_z(t)\right)dt$$

Если $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow A > 0$ – говорят, что работа совершается силой;

Если $\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \Rightarrow A < 0$ – работа совершается против действия силы.

Единицы измерения работы:

[A] = 1 Н·м =1 $\frac{кг \cdot м^2}{с^2}$ = 1 Джоуль = 1 Дж.

● Скорость совершения работы называется **механическая мощность (мощность).** Для равномерного движения (**средняя мощность**):

$$N = \frac{A}{\Delta t}$$

Для неравномерного или непрямолинейного движения **(мгновенная мощность):**

$$N = \frac{dA}{dt}$$

Выражение мощности через скорость:

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{\overline{F}d\overline{r}}{dt} = \left(\overline{F} \cdot d\overline{V}\right)$$ **(мгновенная)**

$$N = \overline{F} \cdot \overline{V}$$ **(средняя)**

Единицы измерения мощности:

[N]= 1 Джоуль/с = 1 Н·м/с = 1 кг·м^2/с^3 = 1 Ватт = 1 Вт

Кинетическая энергия

Пусть тело движется под действием силы **F** (которая может рассматриваться как равнодействующая всех сил) с ускорением **a.** Работа силы **F** равна:

$$dA = \overline{F}d\overline{r}$$

По второму закону Ньютона:

$$dA = m\overline{a}d\overline{r} = m\frac{d\overline{V}}{dt}d\overline{r} = md\overline{V}\frac{d\overline{r}}{dt} = m\overline{V}d\overline{V}$$

$$A = \int_{V_{нач}}^{V_{кон}} mVdV = \frac{mV_{кон}^2}{2} - \frac{mV_{нач}^2}{2} \qquad (1)$$

Определим:

● **Кинетическая энергия** тела массой *m*, движущегося со скоростью *V* есть половина произведения массы тела на квадрат модуля скорости:

$$\boxed{T = \frac{mV^2}{2}}$$

<u>Примечания:</u> 1. Кинетическая энергия всегда считается только положительной величиной;

2. В различных ИСО **V** различно (с точностью до постоянной $\mathbf{V}_{CO}$) → **<u>Кинетическая энергия зависит от выбора СО</u>**!

С учетом определения кинетической энергии из формулы (1) (т.е. из второго закона Ньютона) следует:

● **Теорема о кинетической энергии:** изменение кинетической энергии тела при изменении его скорости равно <u>работе</u> <u>равнодействующей всех сил</u>, действующих на тело.

$$\boxed{\Delta T = \Delta A}$$

Для бесконечно малых перемещений:

$$\boxed{dT = dA}$$

Изменение КЭ может быть как положительным, так и отрицательным.

Следствия: 1. Чтобы изменить скорость тела от V_1 до V_2 надо затратить работу:

$$\Delta A = \frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2}$$

2. При торможении тела, совершается работа против тормозящей силы (работа силы <0)

Примечание: 1. Теорема о кинетической энергии справедлива для любых сил, и для любых <u>инерциальных</u> СО.

2. Теорема о кинетической энергии имеет очень общий характер и помогает при решении многих задач – позволяет решить задачу об ускорении тела без решения уравнений Ньютона.

Из теоремы о кинетической энергии вытекает

● **Физический смысл кинетической энергии** – это способность совершать работу за счет изменения скорости движения.

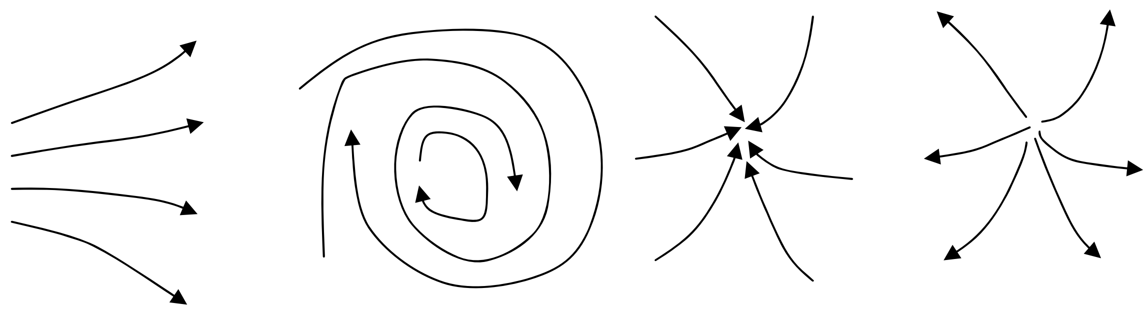
Потенциальная энергия

Для описания характера взаимодействия (силы взаимодействия) в различных точках пространства введем т.н. **поле сил**

● Если в каждой точке (x,y,z) пространственной области D действует сила **F**, то говорят, что в области D действует **поле сил** (силовое поле) **F**(x,y,z).

● **С математической точки зрения поле сил** – это однозначная векторная функция $F = \overline{F}(x, y, z)$, заданная в области определения D.

Геометрия поля сил может иметь различный характер, например:



Безвихревое *вихревое* *со стоком* *с источником*

Для описания силовых полей используется специальный математический аппарат (**математическая теория поля***,* или **векторный анализ**). Напомним основные определения этого математического аппарата:

● **Оператор «набла»** - оператор дифференцирования по координатам – определяется как вектор с тремя компонентами:

$$\overline{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial}{\partial z}\overline{k}$$

(Здесь $\frac{\partial}{\partial x}$ и т.д. – частные производные, т.е. производные, например, по *x* при фиксированных значениях координат *y, z*). Сам по себе такой вектор не имеет какого-либо геометрического смысла. Однако им можно действовать на функции или умножать на векторы по правилам скалярного или векторного произведения. Результаты таких действий будут иметь вполне определенный геометрический смысл.

● **Градиент скалярной функции Φ(***x,y,z***)** – <u>вектор</u> с компонентами

$$grad\Phi \equiv \overline{\nabla}\Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\overline{k}$$

● **Дивергенция** векторного поля **F**$(x,y,z)=(F_x,F_y,F_z)$ – <u>скаляр</u>, определяемый как скалярное произведение векторов ∇ и **F**:

$$div\overline{F}(x,y,z) \equiv (\overline{\nabla} \cdot \overline{F}) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

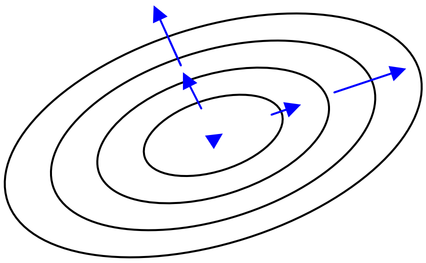
● **Ротор** векторного поля **F**$(x,y,z)=(F_x,F_y,F_z)$ – векторное произведение векторов ∇ и **F**, т.е. <u>вектор</u> с координатами:

$$rot\overline{F}(x,y,z) \equiv [\overline{\nabla} \times \overline{F}] = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) =$$

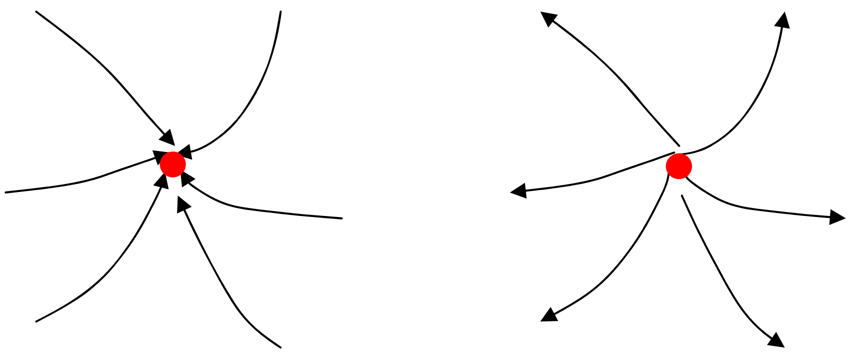
$$= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right)\overline{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right)\overline{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)\overline{k} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Геометрический смысл этих величин:

1. Градиент – это вектор, направление которого совпадает с направлением наискорейшего возрастания функции, а длина пропорциональна скорости этого возрастания. В точках минимумов и максимумов, а также седловинах градиент равен нулю.

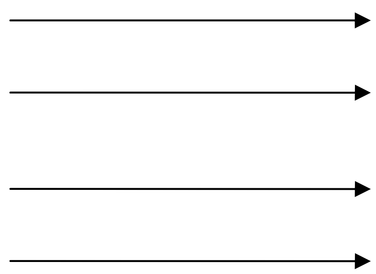


3. Дивергенция – это скалярная величина, показывающая наличие стоков или источников, т. е. точек поля, где заканчиваются или начинаются силовые линии поля:

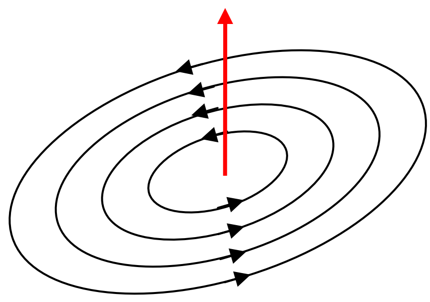


в красной точке $divF < 0$ в красной точке $div\,F > 0$

4. Ротор – это вектор, показывающий направление и степень «закрученности» силовых линий (по правилу правого винта):

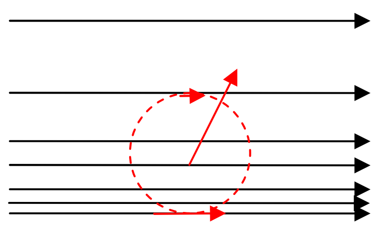


Безвихревое поле
(*rot***F**=0 во всех точках поля)



Вихревое поле
(*rot***F**>0 или *rot***F**>0 хотя бы в одной точке поля)

Обратите внимание, что иногда вихревой характер поля неочевиден, например:



Линейное неоднородное поле с ненулевым ротором (красный вектор, направленный на нас) в области, отмеченной пунктиром.

(самостоятельно проверить для поля $\mathbf{F} = (1 - y^2, 0, 0)$)

Особую роль в физике играют поля, в которых *rot* ***F*** = 0 во всей области определения. Такие поля называются **безвихревые.** Если безвихревое поле непрерывно и имеет непрерывные производные во всей области определения, оно называется **потенциальным**.

● **Потенциальное поле сил F***(x,y,z)* – поле, в любой точке которого существует *rot* **F**(*x,y,z*)=0.

<u>*Свойства потенциального поля:*</u>

1. В любой точке такого поля можно ввести скалярную функцию *U(x,y,z)*, такую что

$$\overline{F}(x,y,z) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right) \equiv -gradU(x,y,z)$$

2. В любой точке такого поля работа dA есть полный дифференциал, т.е.

$$dA \equiv \overline{F}(x,y,z)\cdot d\overline{r} \equiv F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right)$$

(где U – некая скалярная функция).

3. Работа при перемещении из точки 1 в точку 2 <u>не зависит от траектории перемещения</u> и равна разности U в т. 1 и 2:

$$A_{1->2} \equiv \int_1^2 \overline{F}(x,y,z)d\overline{r} = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

4. Работа при перемещении по замкнутому контуру равна нулю:

$$A_{1->1} \equiv \int_1^1 \overline{F}(x,y,z)d\overline{r} = 0$$

5. Поля любых центральных сил (т.е. сил, зависящих только от расстояния до некоторой точки) – потенциальные. Примеры: гравитационное поле точечной массы, электростатическое поле точечного заряда, поле силы упругости.

● **Потенциальная энергия (потенциал поля)** *U=U(x,y,z)* **-** скалярная характеристика векторного поля, которая от положения точки и природы сил поля, а <u>ее изменение при перемещении из т.1 в т.2 равно работе сил поля с обратным знаком</u>**.**

$$U_2 - U_1 = -A_{1->2}$$
$$\Delta A = U_1 - U_2 = -\Delta U\text{,}$$

(Здесь ΔA - работа сил поля по перемещению тела из т.1 в т.2)

Для бесконечно малых перемещений:

$$\boxed{dA = -dU}$$

● **Физический смысл потенциальной энергии**: ПЭ – это способность совершать механическую работу, за счет изменения взаимного расположения тел или характера их взаимодействия.

● Силы, образующие потенциальное поле называются **потенциальными или консервативными** (пример: силы упругости, электростатического взаимодействия, тяжести).

Непотенциальные поля: поля диссипативных и гироскопических сил

● В **поле диссипативных сил** работа A зависит не только от нач. и кон. положения, но и траектории перемещения. В таких полях работа по замкнутому контуру не равна нулю: работа силы отрицательна, т.к. сила всегда противонаправлена перемещению

$$A_{1->2} < 0$$
$$A_{1->1} < 0$$

(примеры: сила трения, сила сопротивления среды)

● **Поля гироскопических сил** – работа этих сил всегда равна нулю, независимо от начального и конечного положения и траектории, т.к. сила всегда перпендикулярна перемещению.

$$\boxed{A = 0}$$

(примеры: магнитная сила, действующая на движущийся заряд; сила Кориолиса)

Свойства потенциальной энергии

1. Введение потенциальной энергии возможно только для потенциальных полей.

2. Выражение силы через потенциал:

По определению потенциала:

$$dA = -dU$$
$$\overline{F}d\overline{r} = -dU(\overline{r})$$

Тогда выражение силы через потенциал:

$$\overline{F} = -\frac{dU(\overline{r})}{d\overline{r}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} F_x = -\dfrac{dU(x,y,z)}{dx} \\ F_y = -\dfrac{dU(x,y,z)}{dy} \\ F_z = -\dfrac{dU(x,y,z)}{dz} \end{array} \right.$$

Или: $$\overline{F}(x,y,z) = -gradU(x,y,z)$$

В других обозначениях: $$\boxed{\overline{F} = -\overline{\nabla}U}$$

3. Выражение потенциала через силу:

$$\Delta U = -\Delta A$$

$$\boxed{U_2 - U_1 = -\int_1^2 \overline{F}(\overline{r})d\overline{r}}\ -$$

● **Изменение ПЭ при перемещении из т.1 в т.2. равно работе сил потенциального поля, взятого с обратным знаком**

Если U_1 считать нулевым уровнем отсчета (U=0), то

$$U(r) = U_2 = -\int_{нулевойуровень}^{2} \overline{F}(\overline{r})d\overline{r}$$

$$\boxed{U(x,y,z) = -\int_{нулевойуровень}^{(x,y,z)} \overline{F}(\overline{r})d\overline{r}}$$

- определение потенциала в т. **(**x,y,z**)** по отношению к нулевому уровню.

● **Значение потенциальной энергии в данной точке зависит от выбора нулевого уровня отсчета *U*. Таким образом, ПЭ всегда определяется с точностью до постоянного слагаемого.**

4. Потенциальная энергия зависит от выбора ИСО. Причем как от выбора начала координат, так и от скорости СО (!).

$$U(x,y,z) = -\int_{нулевойуровень}^{(x,y,z)} \overline{F}(\overline{r})d\overline{r} = -\int_{нулевойуровень}^{(x,y,z)} \overline{F}(\overline{r})\frac{d\overline{r}}{dt}dt$$

$$U(x,y,z) = -\int_{t_{нач}}^{t_{кон}} \overline{F}(\overline{r}(t))\overline{V}(t)dt$$

(Поскольку **V** зависит от выбора ИСО, то U в общем случае зависит от $\mathbf{V}_{CO}$)

Примеры:

1. <u>Потенциальная энергия силы тяжести</u>

$$\overline{F}_m = m\overline{g}$$

$$U(h) = -\int_0^h mg\cos(F_m, dx)dx = \int_0^h mgdx = mgh$$

$$\boxed{U(h) = mgh}$$

Нарисовать график самостоятельно

2. Потенциальная энергия силы упругости

$$\overline{F}_{упр} = -k\overrightarrow{\Delta x} = -k\overline{(x - x_0)}$$

$$U(x) = -\int_0^x \overline{F}_{упр} d\overline{x} = \int_0^x kxdx = \frac{kx^2}{2} \quad (x_0 = 0)$$

$$\boxed{U(x) = \frac{kx^2}{2}}$$

Нарисовать график самостоятельно

3. Потенциальная энергия силы, пропорциональной r^{-2} (сила электростатического притяжения, сила гравитации точечной массы)

$$\overline{F} = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\frac{\overline{r}}{|r|}$$

$$U(r) = -\int_\infty^r \overline{F} d\overline{r} = -k\int_\infty^r \frac{Q_1 Q_2 \cos(\overline{F}, \overline{OX}) dr}{r^2} = -k\frac{Q_1 Q_2}{r}\bigg|_\infty^r = -k\frac{Q_1 Q_2}{r}$$

$$\boxed{U(r) = -k\frac{Q_1 Q_2}{r} \qquad (U(\infty) = 0)}$$

Нарисовать график самостоятельно

Закон сохранение полной механической энергии

● **Полная механическая энергия –** сумма кинетической и потенциальной энергии

$$E = T + U$$

По теореме о кинетической энергии изменение КЭ равно работе всех сил, действующих на тело:

$$dT = dA$$

Рассмотрим изолированную систему. Если на систему не действуют внешние силы (изолированная система), то равнодействующая всех сил:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{пот} + \mathbf{F}_{гир} + \mathbf{F}_{дисс}$$

Тогда:

$$dT = -dU + A_{gyr} + \overline{F}_{diss} d\overline{r}$$

Но $A_{гир}$=0 (**V** перпендикулярно перемещению). Тогда:

$$d(T+U) = \overline{F}_{diss} d\overline{r}$$

$$dE = \overline{F}_{diss} d\overline{r}$$

Если в системе присутствуют диссипативные силы, то:

$$dE = A_{diss}$$

Если в системе отсутствуют диссипативные силы, то:

$$\boxed{\begin{array}{l} dE = 0 \\ E = const \end{array}}$$

● **Закон сохранения полной механической энергии** – полная механическая энергия изолированной системы при отсутствии диссипативных сил сохраняется во времени.

Примечание 1. Действует только в ИСО (в НСО возникают дополнительные слагаемые).

2. Действует и для неизолированной системы, если внешние силы потенциальны и учтены в потенциальной энергии системы.

3. Является следствием важной симметрии нашего мира - однородности времени.

4. Позволяет решать физические задачи без явного рассмотрения уравнений Ньютона.

Примеры:

1. Вагон массой m начинает скатываться с горки высотой h без трения. Какую скорость V вагон имеет в нижней части горки?

2. На полу лежит кубический ящик со стороной a и массой m. Его надо переместить на расстояние a. Что легче: перетащить его или перекантовать? Коэффициент трения ящик/пол = 0.4.

3. Чему равна потенциальная энергия сжимаемой пружины, если начало отсчета ИСО находится на подвижном конце пружины (перемещения нет), а второй конец пружины закреплен?

4. Задача 1 рассматривается из поезда, движущегося в направлении движения вагона с той же скоростью V. Выполняется ли закон сохранения полной механической энергии?

УДАР УПРУГИХ И НЕУПРУГИХ ТЕЛ

● **Удар** – механическое взаимодействие (столкновение) двух или более тел, длящееся очень короткое время по сравнению с временем наблюдения.

● **Абсолютно упругий удар** – удар, при котором во взаимодействующих телах не остается никаких деформаций и вся первоначальная кинетическая энергия снова превращается в кинетическую энергию.

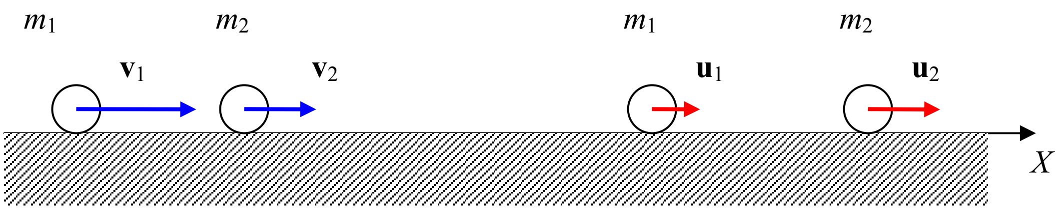
● **Абсолютно неупругий удар** – удар, при котором тела объединяются и далее двигаются как одно целое.

Абсолютно упругий удар

В замкнутой системе без диссипативных сил при абсолютно упругом ударе сохраняется кинетическая энергия (по определению) и импульс (по закону сохранения импульса):

$$\begin{cases} \overline{P} = const \\ T = const \end{cases}$$

Это позволяет решать задачи, связанные с изменением скорости движения после удара. Например:



До соударения

После соударения

Для этой системы сохранение импульса и кинетической энергии означает:

$$\begin{cases} m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2 \\ \dfrac{m_1\mathbf{v}_1^2}{2} + \dfrac{m_1\mathbf{v}_2^2}{2} = \dfrac{m_1\mathbf{u}_1^2}{2} + \dfrac{m_1\mathbf{u}_2^2}{2} \end{cases}$$

Проектирование на ось OX дает (после сокращения на 1/2):

$$\begin{cases} m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2 \\ m_1v_1^2 + m_2v_2^2 = m_1u_1^2 + m_2u_2^2 \end{cases}$$

Это два уравнения с шестью неизвестными. Поэтому для решения задачи должны быть заданы любые четыре величины. Оставшиеся две величины (любые) можно всегда найти, решая эту систему. Например, если массы тел известны, можно найти конечные скорости, если заданы начальные:

$$u_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_1 u_1}{m_2}$$

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 - \left(m_1 v_1 + m_2 v_2 - m_1 u_1\right)^2 = m_1 u_1^2$$

Это квадратное уравнение имеет два решения (проверить самостоятельно!):

$$\begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \dfrac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \\ u_2 = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_2 \end{cases}$$

Первое решение соответствует тривиальному случаю, когда тело 2 движется быстрее и тело 1 не может его догнать. В этом случае скорости тел остаются неизменными. Второе решение дает скорости после соударения.

Если $m_1=m_2$, то конечные скорости:

$$u_1 = v_2$$

$$u_2 = v_1$$

Тела «обмениваются» скоростями. Если тело 2 покоилось, оно начинает двигать со скоростью первого тела, а тело 1 останавливается. Такой случай наблюдается при игре в бильярд, когда движущийся шар (без закручивания!) ударяет в центр покоящегося шара. Этот же факт лежит в основе известной игрушки – ударного маятника, в котором два или несколько подвешенных на нитях стальных шариков сталкиваются в нижней точке подвеса. Первый шарик останавливается, второй начинает движение с той же скоростью, что была у первого.

Если $m_1>m_2$ (для простоты считаем $m_1=2m$, $2m_2=m$)

$$u_1 = \frac{1}{3}v_1 + \frac{2}{3}v_2$$

$$u_2 = \frac{4}{3}v_1 + \frac{1}{3}v_2$$

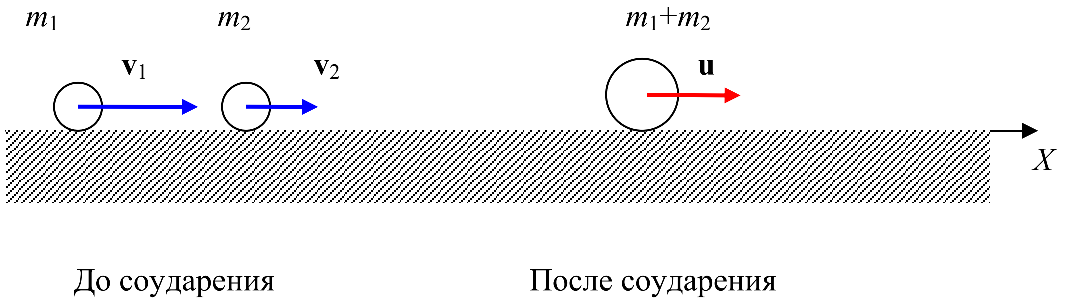
Если тело 2 покоилось, оно будет двигаться со скоростью 4/3 v_1,(т.е. отскочит быстрее, чем первое), а первое – замедлит движение до 1/3 v_1. Этот факт часто проявляется при столкновении автомобилей – легкий автомобиль при столкновении изменяет свою скорость сильнее и получает большие повреждения, чем тяжелый.

Абсолютно неупругий удар

В замкнутой системе без диссипативных сил при абсолютно неупругом ударе кинетическая энергия не сохраняется. Единственной сохраняющейся величиной (кроме массы) является импульс:

$$\overline{P} = const$$

Картина соударения выглядит следующим образом:



Закон сохранения импульса после проектирования на OX дает:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u$$

В этом уравнении 5 переменных. Таким образом, чтобы его решить, должны быть заданы 4 величины. Оставшаяся пятая величина находится решением этого уравнения. Например, если массы тел известны и заданы начальные скорости, то конечная скорость есть

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Кинетическая энергия изменяется на величину

$$\Delta T = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} - \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

$$\Delta T = \frac{m_1 + m_2}{2}\left(\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}\right)^2 - \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

Эта энергия затрачивается на деформацию тел, т.е превращается из механической в химическую энергию разрыва атомных и молекулярных связей, энергию нагрева тел, а иногда и световую энергию.

Если второе тело покоилось (v_2=0), предыдущая формула дает:

$$\Delta T = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\frac{m_1 v_1^2}{2} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}T_1$$

Если $m_2 >> m_1$ то $\Delta T = -T_1$. Это означает, что для большего эффективности воздействия 1 тела на второе (большей энергии деформации) тело 2 должно быть более массивным – «наковальня должна быть более массивной, чем молот». В этом случае вся энергия удара расходуется на деформацию тел.

Теория удара, изложенная здесь, лежит в основе важного метода исследования атомно-молекулярных процессов физической химии – метода рассеяния в скрещенных молекулярных (атомных) пучках. В этом методе, струя молекул газа в вакууме сталкивается с перпендикулярным потоком молекул другого газа. Рассеяние молекул по углам и скоростям анализируется специальными детекторами. Характер картины рассеяния, описывается более сложными выражениями, чем приведенные здесь, но по сути, основанными на тех же принципах. На основе этой картины удается получить важную информации о неупругом взаимодействии сталкивающихся молекул, например, о том, насколько прочные и долгоживущие молекулярные комплексы образуются между ними при Ван-дер-ваальсовом взаимодействии.

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

По закону движения ЦМ замкнутая система материальных точек движется так, что его ЦМ движется как МТ, на которую действует равнодействующая (векторная сумма) всех сил, действующих на систему.

Рассмотрим тело, для которого:

1) ЦМ движется равномерно и прямолинейно. Это означает, что равнодействующая внешних сил, приложенных к ЦМ равна нулю.
2) Расстояния между любыми точками тела в любой момент времени остается постоянным. Такое тело называется **абсолютно твердое тело.**

Выберем СО, совпадающую с ЦМ (O'X'Y'Z'). В этой системе отсчета свободное абсолютно твердое тело совершает **вращения** относительно ЦМ, а его точки описывают сложные траектории вокруг O'. Оказывается, что описание таких движений в общем случае очень сложно, аналитическое представление траекторий возможно лишь для некоторых простых случаев симметричных тел.

Вращение вокруг неподвижной оси

Более простой случай – вращение тела относительно неподвижной оси O_1O_2. В этом случае:

1) все точки на оси неподвижны

2) остальные точки совершают движение **по окружностям** с центрами на оси вращения, с постоянным радиусом вращения и <u>одной и той же угловой скоростью</u>.

Кинетическая энергия такого движения складывается из энергий отдельных точек:

$$T = \sum_i \frac{m_i V_i^2}{2} = \sum_i \frac{m_i r_i^2 \omega_i^2}{2} = \sum_i \frac{\left(m_i r_i^2\right)\omega^2}{2} = \frac{\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2}$$

Здесь m_i – массы точек, из которых состоит тело; $\overline{V}_i$ – их скорости относительно введенной системы координат; r_i – радиусы вращения точек вокруг оси O_1O_2; ω – угловая скорость вращения точек вокруг оси. Величина

$$I = \sum_i m r_i^2$$

называется <u>моментом инерции тела (системы точек) при вращении вокруг неподвижной оси.</u>

● **Момент инерции точки**, вращающейся относительно центра или оси

$$I = mr^2$$

Здесь m – масса точки, r – ее расстояние до оси (центра) вращения

● **Момент инерции системы точек**, вращающейся относительно неподвижной оси есть

$$I = \sum_i I_i = \sum_i m r_i^2$$

● **Момент инерции тела с постоянной плотностью** ρ, вращающейся относительно неподвижной оси,

$$I = \int m_i r^2 = \int_V r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV = \rho \int_V r^2 dV$$

Вычисление этой величины в декартовых координатах производится по формуле:

$$I = \rho \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} R(x,y,z)^2 \, dxdydz$$

Вычисление в сферических координатах – по формуле:

$$I = \rho \int_{r_1}^{r_2} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} R(r,\vartheta,\varphi)^2 r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi$$

В этих формулах $R(r,\theta,\varphi)$ - кратчайшее расстояние от точки, заданной координатами *(x,y,z)* или (r,θ,φ) до оси вращения.

● Кинетическая энергия тела, вращающегося относительно неподвижной оси

$$\boxed{T = \frac{I\omega^2}{2}}$$

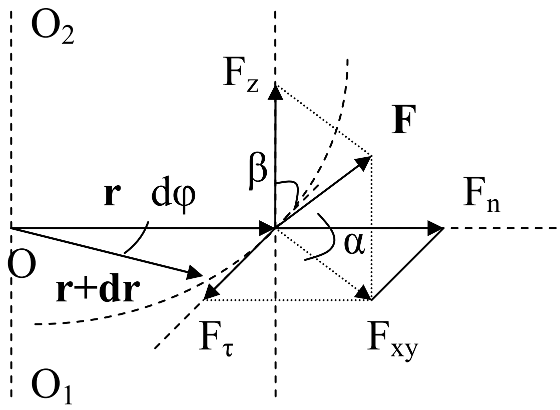
● Кинетическая энергия катящегося тела массой *M* (ЦМ совпадает с осью вращения и движется с постоянной скоростью *V*)

$$\boxed{T = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{MV^2}{2}}$$

Уравнение динамики вращения тела вокруг оси

Пусть тело состоит из точек, вращающихся вокруг оси O_1O_2. Каждая точка вращается по окружности радиусом *r*

Пусть на некоторую точку действует сила **F.** Разложим силу на компоненты F_n, F_τ, F_z, направленные по радиусу вращения, по касательной и параллельно оси, соответственно:



Из рисунка следуют математические выражения проекций силы:

$$F_\tau = F_{xy}\sin\alpha = F\sin\beta\sin\alpha$$

$$F_n = F_{xy}\cos\alpha = F\sin\beta\cos\alpha$$

$$F_z = F\cos\beta$$

F_n, F_z не изменяют скорости точки (ось неподвижна). Компонента F_τ, перемещая точку на элемент дуги ds, совершает работу:

$$dA = \left(\overline{F}_\tau, d\overline{s}\right) = F_\tau ds = F_\tau r d\varphi = F_{xy}\sin\alpha \cdot r d\varphi$$

● Определим величину, называемую **момент силы F относительно точки вращения** как векторное произведение:

$$\overline{M} = \left[\overline{r}, \overline{F}\right]$$

$$M = rF\sin\left(\overline{r}, \overline{F}\right)$$

Здесь r – вектор из точки вращения в точку приложения силы.

● Направление **M** – по правилу правого винта относительно **r** и **F**

В частном случае, когда **r** есть радиус вращения точки вокруг оси, а сила перпендикулярна оси, момент силы называется **моментом силы относительно оси вращения**:

● **Момент силы $\boldsymbol{F_{xy}}$ относительно оси вращения** O_1O_2 есть

$$\bar{M}_{xy} = [\bar{r}, \bar{F}_{xy}]$$

$$M_{xy} = F_{xy} r \sin\alpha = F_{xy} l_F$$

(величину $l_F = r\sin\alpha$ принято называть **плечом силы**).

● Направление $\mathbf{M}_{xy}$, как и в случае момента относительно точки, определяется, по правилу правого винта относительно **r** и $\mathbf{F}_{xy}$.

В соответствии с этим определением, работа, совершаемая силой F_{xy}:

$$dA = F_{xy} \sin\alpha \cdot r d\varphi = M_{xy} d\varphi$$

Здесь M_{xy} – модуль момента $\mathbf{M}_{xy}$, создаваемого силой $\mathbf{F}_{xy}$, т.е. момент силы относительно оси.

По теореме о кинетической энергии:

$$dT = dA$$

$$d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = M_{xy} d\varphi$$

$$I\omega d\omega = M_{xy} d\varphi$$

Разделим обе части на *dt:*

$$I\omega \frac{d\omega}{dt} = M_{xy} \frac{d\varphi}{dt}$$

$$I\omega\varepsilon = M_{xy}\omega$$

Поскольку $\mathbf{M}_{xy}$ совпадает по направлению с угловым ускорением ε, создаваемым силой, то можно записать в векторной форме:

$$\bar{M}_{xy} = I\bar{\varepsilon}$$

Для произвольной силы **F**, <u>действующей в плоскости, перпендикулярной оси вращения</u>

$$\boxed{\bar{M} = I\bar{\varepsilon}}$$

- второй закон Ньютона для вращения тела вокруг неподвижной оси.

● **2 закон Ньютона при вращении вокруг неподвижной оси –** момент силы, действующей на точку перпендикулярно оси вращения равен произведению ее момента инерции на угловое ускорение, возникающее под действием этой силы.

<u>Примечание:</u> 1. Это основное уравнение динамики вращательного движения при вращении вокруг неподвижной оси.
2. Это аналог второго закона Ньютона для поступательного движения.

Видна аналогия между вторым законом Ньютона для вращательного и поступательного движения

$$\bar{M} = I\bar{\varepsilon} \qquad \Leftrightarrow \qquad \bar{F} = m\bar{a}$$

Отсюда следует

● **Физический смысл момента инерции:**

- это аналог массы при вращательном движении;
- это мера инертности при вращательном движении;
- чем больше I, тем тело труднее раскрутить.

Единицы измерения моментов силы и инерции:

$[M]$ = 1 Н м

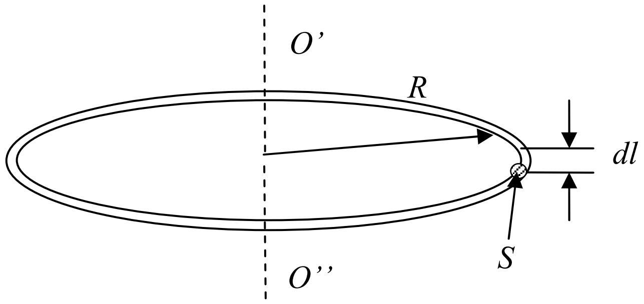
$[I]$ = 1 кг м^2

Расчет моментов инерции тел различной формы

1. Тело, состоящее из дискретных точек массами m_i, вращающихся вокруг общей оси по радиусам r_i

$$\boxed{I = \sum_i I_i = \sum_i m_i r_i^2}$$

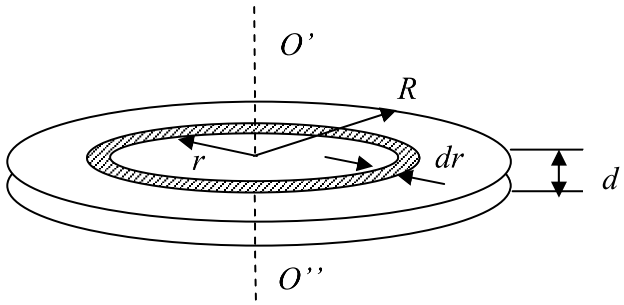
2. Тело с непрерывно распределенной постоянной плотностью
   - Кольцо массой m и радиусом R:



$$I = \int_0^{2\pi R} R^2 dm = \int_0^{2\pi R} R^2 \rho S dl = R^2 \underbrace{\rho 2\pi R S}_{m} = mR^2$$

$$\boxed{I_{кольца} = mR^2}$$

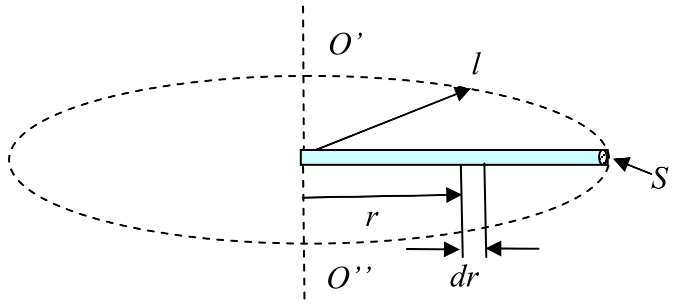
   - Диск (цилиндр) массой m и радиусом R



$$I = \int_0^R r^2 dm = \int_0^R r^2 \rho dV = \rho\int_0^R r^2 \cdot 2\pi r d \cdot dr = 2\pi\rho d\int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho d\,\frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}R^2\,\underbrace{\rho\,\underbrace{d\,\underbrace{\pi R^2}_{S}}_{V}}_{m} = \frac{1}{2}mR^2$$

$$\boxed{I_{цилиндр} = \frac{1}{2}mR^2}$$

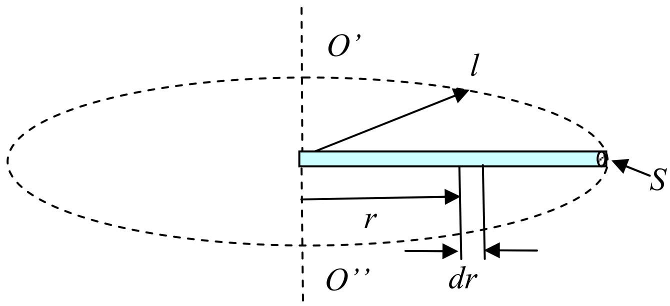
- Однородный стержень массой *m* и длиной *l*, вращающийся вокруг одного из своих концов



$$I=\int_0^l r^2dm=\int_0^l r^2\rho dV=\rho S\int_0^l r^2dr=\rho S\frac{l^3}{3}=\frac{1}{3}\underbrace{\rho Sl}_{m}\cdot l^2=\frac{1}{3}ml^2$$

$$\boxed{I_{стержня}=\frac{1}{3}ml^2}$$

- Однородный стержень массой *m* и длиной *l*, вращающийся вокруг центра масс (т.е. вокруг своей середины)



$$\boxed{I_{стержня}=\frac{1}{12}ml^2}$$

(вывести самостоятельно двумя способами)

- Шар массой *m* и радиуса *R*, вращающийся вокруг своего центра:

$$\boxed{I=\frac{2}{5}mR^2}$$

3. Теорема Штейнера

● **Теорема Штейнера** - Момент инерции тела относительно произвольной оси равен его моменту инерции относительно параллельной оси, проходящей через ЦМ, сложенный с произведением массы тела на расстояние между осями.

$$\boxed{I = I_{CM} + ma^2}$$

Момент импульса

Угловое ускорение есть

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Поскольку момент инерции не зависит от времени, можно записать:

$$I\overline{\varepsilon} = \frac{Id\overline{\omega}}{dt} = \frac{d(I\overline{\omega})}{dt} = \frac{d\overline{L}}{dt}$$

● Величина $\overline{L} = I\overline{\omega}$ называется **момент импульса**.

Для произвольной точки, вращающейся вокруг неподвижного центра по окружности радиусом *r* со скоростью *V:*

$$L = mr^2 \frac{V}{r} = mrV$$

● Таким образом, момент импульса точки есть:

$$\boxed{\overline{L} = m\left[\overline{r}, \overline{V}\right]}$$

Для системы из *n* точек:

$$\boxed{\overline{L} = \sum_{i=1}^{n} m\left[\overline{r}, \overline{V}\right]}$$

Используя определение момента импульса, второй закон Ньютона для вращательного движения можно записать как

$$\boxed{\overline{M} = \frac{d\overline{L}}{dt}}\text{-}$$

Это выражения есть аналог второго закона Ньютона для поступательного движения в форме $\overline{F} = \dfrac{d\overline{P}}{dt}$.

Если система замкнутая, то внешние моменты отсутствуют (M=0), тогда:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{d\overline{L}}{dt} = 0 \\ \overline{L} = const \end{array}}$$

● **Закон сохранения момента импульса –** момент импульса замкнутой системы в отсутствии диссипативных сил не изменяется со временем.

Примечания:

1. Этот закон справедлив в ИСО (в НСО появляются дополнительные слагаемые).
2. Как и закон сохранения импульса, он справедлив даже для квантовых систем и систем, в которых происходит переход энергии в другие формы. Таким образом, это более фундаментальная закономерность, чем законы Ньютона.
5. Как и законы сохранения энергии и импульса, он является следствием определенной симметрии нашего мира - изотропности пространства, т.е. его инвариантности при поворотах.

Примеры проявления законов сохранения момента импульса

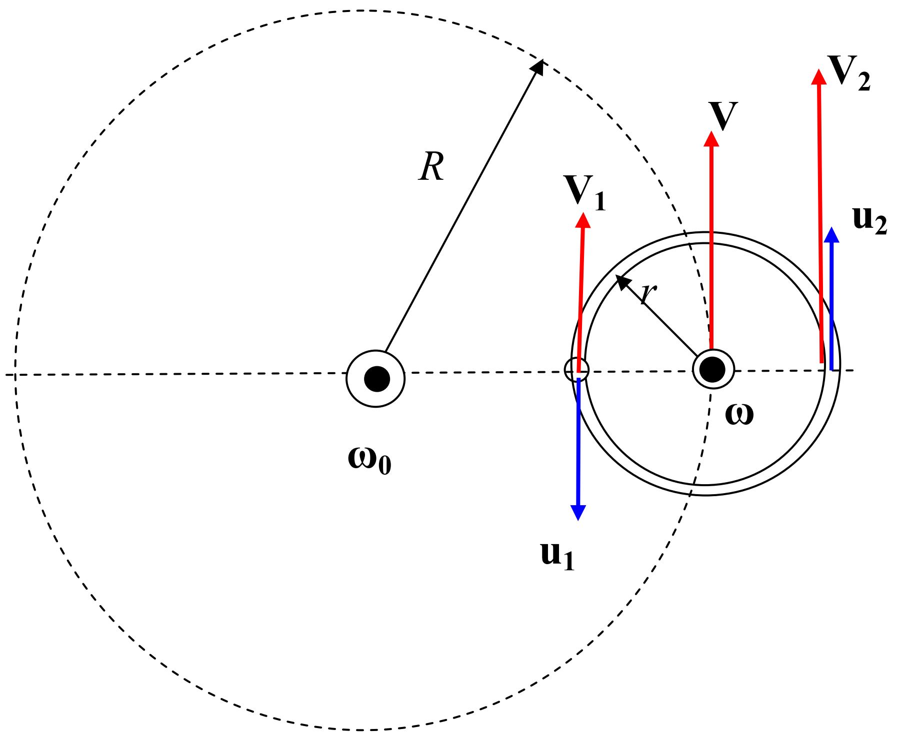
Привести самостоятельно, например:
-фигурист
-скамья Жуковского
- пуля или снаряд вращаются в полете, сохраняя направление
- гироскоп – позволяет сохранять и изменять ориентацию космического корабля, является основой гирокомпаса.

Сложение моментов импульса. Модель спин-орбитального взаимодействия

Рассмотрим тело массой m_0, движущееся вокруг неподвижной оси по окружности радиуса R с постоянной угловой скоростью ω_0. Если тело – материальная точка, энергия такого движения:

$$T_0 = \frac{m_0 V^2}{2} = \frac{m_0(\omega_0 R)^2}{2} = \frac{m_0 R^2 \omega_0^2}{2} = \frac{I_0 \omega_0{}^2}{2} = \frac{(I_0 \omega_0)^2}{2I} = \frac{L_0^2}{2I}$$

Здесь I_0 – момент инерции вращения точки вокруг оси, а $L_0 = I_0 \omega_0$ – соответствующий момент импульса. Представим сейчас, что тело не является точечным, а имеет конечные размеры, причем оно само вращается вокруг своей собственной оси с постоянной угловой скоростью ω подобно планете на орбите вокруг солнца. Чему равна энергия такой системы? Для простоты будем считать, что тело представляет собой тонкое кольцо радиуса r, и рассмотрим только две точки на этом кольце – самую ближнюю и самую дальнюю к центру орбиты:



Кинетическая энергия такой системы складывается из кинетических энергий двух точек, массы которых примем за $m=m_0/2$. Остальные точки кольца также дают вклады, которые мы здесь не учитываем. Но эта энергия зависит от взаимного направления векторов двух угловых скоростей – орбитальной угловой скорости $\boldsymbol{\omega}_0$ и угловой скорости собственного вращения $\boldsymbol{\omega}$. Если они сонаправлены (например, на рисунке оба вектора направлены к нам), линейные скорости орбитального и собственного движения точки 1 V_1 и u_1 вычитаются, а точки 2 – складываются. Соответствующая кинетическая энергия есть:

$$\begin{aligned}
2T_1 &= m(V_1 - u_1)^2 + m(V_2 + u_2)^2 = \\
&= m(\omega_0(R-r) - \omega r)^2 + m(\omega_0(R+r) + \omega r)^2 = \\
&= 2mR^2\omega_0^2 + 2mr^2(\omega_0 + \omega)^2
\end{aligned}$$

$$T_1 = T_0 + \frac{2mr^2(\omega_0+\omega)^2}{2} = T_0 + T + mr^2\omega_0^2 + 2mr^2\omega_0\omega$$

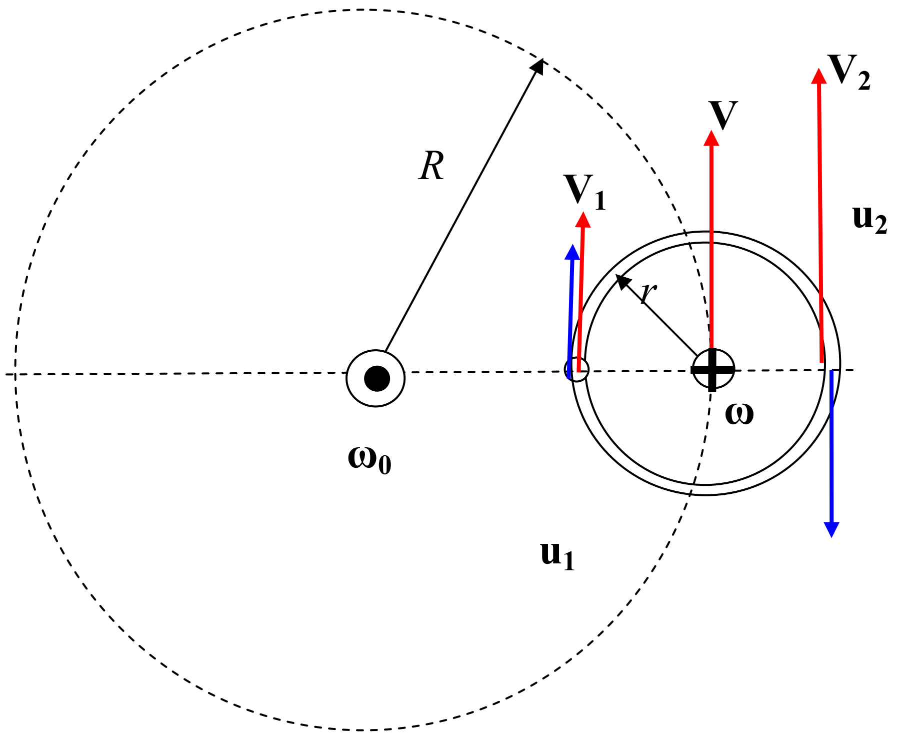
Здесь T – энергия собственного вращения тела, которую бы тело имело, вращаясь вокруг своей оси без перемещения по орбите:

$$T = \frac{2mr^2\omega^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{(I\omega)^2}{2I} = \frac{L^2}{2I}$$

Здесь $I = 2mr^2$ – момент инерции вращения двух точек вокруг собственной оси, а $L = I\omega = 2mr^2\omega$ – собственный момент импульса тела. С учетом этих обозначений,

$$T_1 = \frac{L_0^2}{2I_0}\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right) + \frac{L^2}{2I} + \frac{L_0 L}{2I}$$

Рассмотрим противоположный случай, когда скорость $\boldsymbol{\omega}$ направлена против $\boldsymbol{\omega}_0$ (от нас). В этом случае линейные скорости точки 1 V_1 и u_1 будут складываться, а точки 2 – вычитаться:



Соответствующая кинетическая энергия такого вращения:

$$2T_2 = m(V_1 + u_1)^2 + m(V_2 - u_2)^2 = 2mR^2\omega_0^2 + 2mr^2(\omega_0 - \omega)^2$$

$$T_2 = T_0 + \frac{2mr^2(\omega_0 + \omega)^2}{2} = T_0 + T + mr^2\omega_0^2 - 2mr^2\omega_0\omega$$

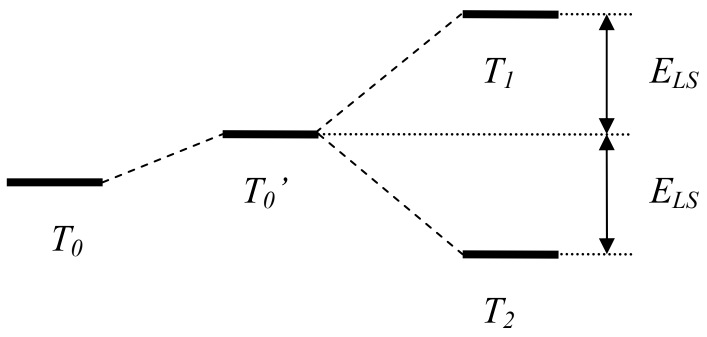
Эту величину можно также записать через моменты импульса:

$$T_2 = \frac{L_0^2}{2I_0}\left(1 + \frac{r^2}{R^2}\right) + \frac{L^2}{2I} - \frac{L_0 L}{2I} = T_0' + T - \frac{L_0 L}{2I}$$

Легко видеть, что энергии T_1 и T_2 включают сумму энергий орбитального вращения (несколько увеличенный на кожффициент $(1+r^2/R^2)$ и собственного вращения, а также добавочный член, включающий произведение орбитального и собственного момента.

$$E_{LS} = \frac{L_0 L}{2I}$$

● Это слагаемое называется **энергия спин-орбитального взаимодействия.** Она имеет большое значение в теории атома и атомных спектров, расщепляя уровни электронов в атоме в зависимости от взаимного направления спина (собственного момента импульса) электрона и момента его орбитального движения вокруг ядра. Его физический смысл состоит в том, что кинетическая энергия системы с противоположными моментами орбитального и собственного вращения ниже, чем энергии системы с сонаправленными моментами. Соотношения между кинетическими энергиями можно представить в виде диаграммы



Здесь T_0' – энергия орбитального движения, увеличенная на коэффициент $(1+r^2/R^2)$

Аналогия между вращательным и поступательным движением

На основе материала, изложенного выше, можно заметить важную аналогию между физическими величинами и законами, описывающими поступательное и вращательное движение:

m	I
r	φ
$V=\dfrac{dr}{dt}$	$\omega=\dfrac{d\varphi}{dt}$
$a=\dfrac{dV}{dt}$	$\varepsilon=\dfrac{d\omega}{dt}$
$p=mV$	$L=I\omega$
F	M
$A=Fdr$	$A=Md\varphi$
$T=\dfrac{mV^2}{2}$	$T=\dfrac{I\omega^2}{2}$
$F=ma$	$M=I\varepsilon$

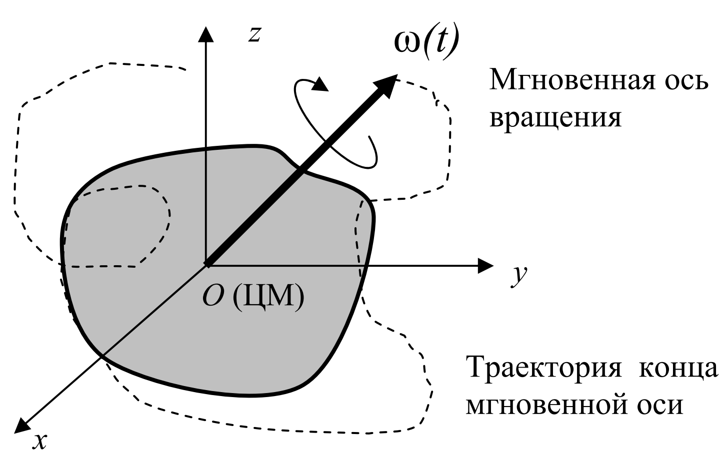
Вращение тела вокруг неподвижной точки

Для науки и техники, в том числе и для химии, большое значение имеет случай вращения вокруг неподвижной точки, в частности вокруг своего центра масс. Например:

- тело, подброшенное в воздух
- космический корабль
- гироскоп (Тяжелый волчок. Важный частный случай: неподвижная точка может не совпадать с ЦМ)
- молекулы, движущиеся в разреженном газе.

Особенности вращения тела вокруг неподвижной точки:

1. ЦМ движется независимо (вращение и поступательное движение полностью разделены);
2. Каждая точка тела перемещается по поверхности сферы с центром в ЦМ;
3. Каждая точка описывает сложную траекторию на этой сфере (в общем случае ее невозможно выразить в аналитическом виде).
4. Если представить тело закрепленным (связанным с OXYZ) движение может быть описано **мгновенным вектором угловой скорости** ω, который меняет свое модуль и направление внутри тела в каждый момент времени и его конец описывает сложную кривую в пространстве:



6. В каждый момент времени для изолированной системы без диссипативных сил сохраняется (1) кинетическая энергия и (2) момент импульса – произведение момента инерции относительно мгновенной оси на мгновенную скорость:

$$T = const$$
$$\overline{L} \equiv I(t)\overline{\omega}(t) = const$$

Выразим мгновенную скорость как вектор из трех компонент – проекций на оси неподвижной декартовой системы координат:

$$\overline{\omega}(t) = \begin{pmatrix} \omega_1(t) \\ \omega_2(t) \\ \omega_3(t) \end{pmatrix}$$

Можно показать, что кинетическую энергию можно представить в виде:

$$T = \frac{1}{2}(I_{11}\omega_1\omega_1 + 2I_{12}\omega_1\omega_2 + I_{22}\omega_2\omega_2 + 2I_{31}\omega_3\omega_1 + 2I_{32}\omega_3\omega_2 + I_{33}\omega_3\omega_3)$$

Или в матричной записи

$$2T = \begin{pmatrix} \omega_1 & \omega_1 & \omega_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{11} & I_{21} & I_{31} \\ I_{21} & I_{22} & I_{32} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

Здесь <u>симметричная</u> матрица I называется **тензором инерции**. Ее элементы равны ($I_{ij}=I_{ji}$):

$$I = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} m_i(y_i^2 + z_i^2) & I_{12} & I_{31} \\ -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i y_i & \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + z_i^2) & I_{32} \\ -\sum_{i=1}^{n} m_i x_i z_i & -\sum_{i=1}^{n} m_i y_i z_i & \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}$$

Т.к. элементы I зависят от выбора системы координат OXYZ, то **поворотом системы координат можно добиться, что недиагональные элементы этой матрицы станут равными нулю** (диагональные при этом изменяться):

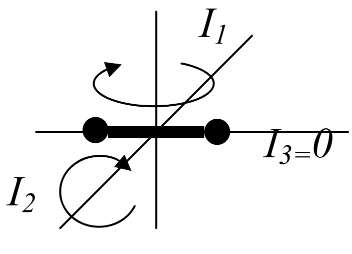
$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

● Значения диагональных элементов I_1, I_2, I_3, в такой диагонализированной матрице называются **главными моментами инерции (ГМИ)**.

Соотношения величин ГМИ определяют характер вращения свободного твердого тела.

Случай А. **Жесткий ротатор** – тело, у которого

$$I_1 = I_2 \neq 0, \quad I_3 = 0$$

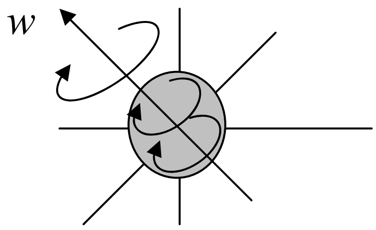


Пример: молекулы HCl, HF, H_2, O_2, CO, CO_2

Вращение происходит вокруг оси, перпендикулярной оси молекулы, <u>направление оси вращения и угловая скорость не изменяются со временем</u>.

Случай Б. **Сферический волчок** – тело, у которого

$$I_1 = I_2 = I_3$$

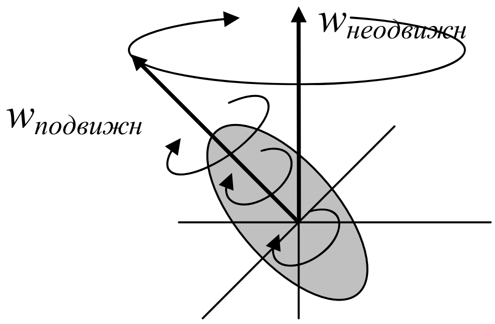


Пример: высокосимметричные молекулы CH_4, SiH_4, SF_6, C_{60}

Вращение происходит вокруг постоянной оси вращения. <u>Ее направление и угловая скорость не изменяются со временем</u> (определяются нач. условиями).

<u>Случай В</u>. **Вытянутый симметричный волчок**

$$I_1 = I_2 > I_3$$

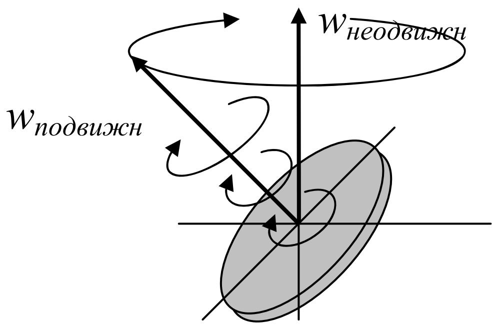


Пример: молекулы C_2H_6, Si_2H_6, $CH_2{=}C{=}O$

Вращение складывается из вращения вокруг оси волчка (подвижный вектор скорости w_1), которая сама вращается вокруг некого неподвижного направления со скоростью w_2. <u>Подвижный вектор скорости описывает конус вокруг w_2</u>

Случай Г. **Сплюснутый симметричный волчок**

$$I_1 = I_2 < I_3$$



Пример: молекулы C_6H_6, C_6H_{12}, BMe_3

Вращение происходит так же, как и в случае вытянутого волчка, но с другим расположением тела (подвижная ось соответствует короткой оси тела).

Случай Д. **Асимметричный волчок**

$$I_1 \neq I_2 \neq I_3$$

Пример: большинство низкосимметричных и асимметричных молекул, в т.ч. H_2O, NH_3, CH_3OH, C_2H_5OH,

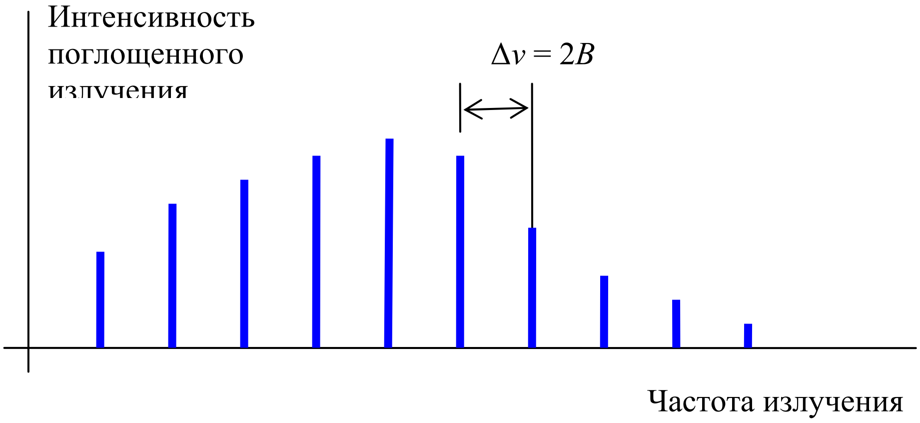
Очень сложный характер движения, чаще всего без возможности аналитического описания. В ряде случаев вращение устойчиво (вращение вокруг большой или малой оси может продолжаться неограниченно долго), в других – нет (начальное вращение вокруг средней оси переходит в неупорядоченное «кувыркание»).

Приложения теории вращения твердого тела в химии

Определение геометрии молекул и длин связи методом микроволновой спектроскопии.

Метод микроволновой спектроскопии (МВС) основан на поглощении энергии электромагнитного излучения молекулами газа. Электромагнитная волна, т.е. изменяющееся электрическое и магнитное поле с частотой 1 ГГц-300 ГГц вызывает вращение молекул газа. Вращение возникает из-за того, что в неоднородном электрическом поле атомы с различным зарядом приводятся в движение под действием электрической силы. За счет «раскручивания» молекул газа энергия электромагнитной волны поглощается. Поглощение происходит дискретно, за счет квантовых переходов между дискретными уровнями энергии вращения. Зависимость доли поглощенной энергии от частоты излучения называется микроволновым спектром (МВ-спектром).

Для молекулы типа жесткого ротатора, обладающего дипольным моментом, МВ-спектр есть последовательность равноотстоящих пиков:



Расстояние между пиками (вращательная постоянная B) определяется моментом инерции I молекулы:

$$B = \frac{h}{8\pi cI} = \frac{h}{8\pi c\mu r^2}$$

$$\mu = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}$$

Отсюда, зная массы атомов, легко определить межатомное расстояние с большой точностью (до 10^{-5} нм). Для двухатомных молекул большинство справочных данных о длинах связи определено по методу МВС.

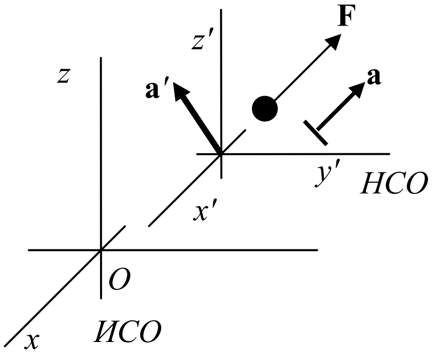
ДВИЖЕНИЕ В НЕИНЕРЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ ОТСЧЕТА

● Системы отсчета, движущиеся относительно ИСО с ускорением, называются **неинерциальными СО (НСО)**.

Принято условно различать (хотя это не значит, что для них действуют разные законы):

1. СО, движущиеся относительно ИСО поступательно;
2. Вращающиеся СО.

Силы инерции в НСО, движущихся поступательно



$$\boxed{\begin{aligned} \overline{F} &= m(\overline{a} + \overline{a}\,') \\ \overline{F} &= m\overline{a} + m\overline{a}\,' \end{aligned}}$$

- описание движения из ИСО

Чтобы это выражение выполнялось и в ИСО, и в НСО, надо в НСО записать дополнительную силу:

$$\underbrace{\bar{F} - m\bar{a}'}_{\bar{F}_и} = m\bar{a}$$ - рассмотрение в НСО.

Т.е., при описании движения в НСО, второй закон Ньютона следует записать как

$$\boxed{\bar{F} + \bar{F}_и = m\bar{a}},$$

где $\bar{F}_и = -m\bar{a}'$ – **сила инерции.**

● **<u>Принцип Даламбера</u>** – движение в НСО происходит так, как если бы на все тела системы действовала дополнительная сила (**сила инерции**), равная по модулю и противоположная по направлению произведению массы тела на ускорение НСО.

$$\boxed{\bar{F}_и = -m\bar{a}'}$$

Жан Леро́н Д’Аламбе́р (д’Аламбер, Даламбер; фр. Jean Le Rond d'Alembert, D'Alembert; 16 ноября 1717 — 29 октября 1783) — французский учёный-энциклопедист. Широко известен как философ, математик и механик. Член Парижской академии наук (1740), Французской Академии (1754), Петербургской (1764) и других академий.

<u>Особенности сил инерции:</u>

1. Для них нельзя указать тела, являющегося их источником, движение с их участием происходит так, как если бы тело находилась во внешнем поле.
2. Для них не выполняется третий закон Ньютона (поскольку нет тела, являющегося источником силы).
3. Они неинвариантны относительно перехода между СО (за исключением перехода между ИСО).

<u>Реальны ли эти силы? Существуют две точки зрения:</u>

1. Силы инерции фиктивны, не являются реальными, а являются следствием разных свойств описания в ИСО и НСО.

2. Силы инерции реальны, они являются проявлением влияния особого поля сил инерции, обладающего общими свойствами, связанными с геометрией нашего мира.

Независимо от ответа на эти вопросы, в механике выработаны методы учета сил инерции, излагаемые ниже

2 способа рассмотрения механики в НСО:

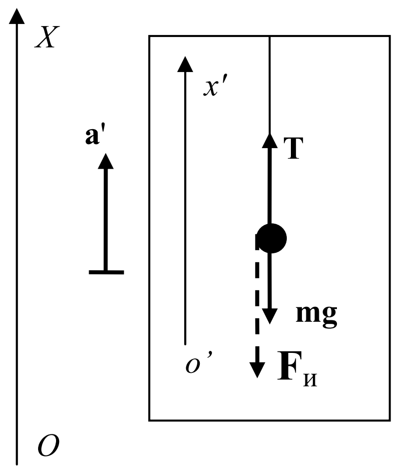
1. Введём дополнительную ИСО, в которую НСО движется с ускорением **а**’. Записываем 2 ЗН в ИСО, прибавляя ускорение **а**’:

$$\boxed{\overline{F} = m\overline{a} + m\overline{a}\,'}$$

2. Рассматриваем взаимодействие в НСО. Прибавляем ко всем силам дополнительную (фиктивную) силу

$$\boxed{\overline{F}_и = -m\overline{a}\,'}$$

Примеры:



1. Лифт, движущийся с ускорением вверх.

В покое (a = 0) сила упругости

$$\overline{T} + m\overline{g} = 0$$

$$\overline{T} = -m\overline{g}$$

$$\overline{P} = m\overline{g}$$

При движении вверх с ускорением **а**’:

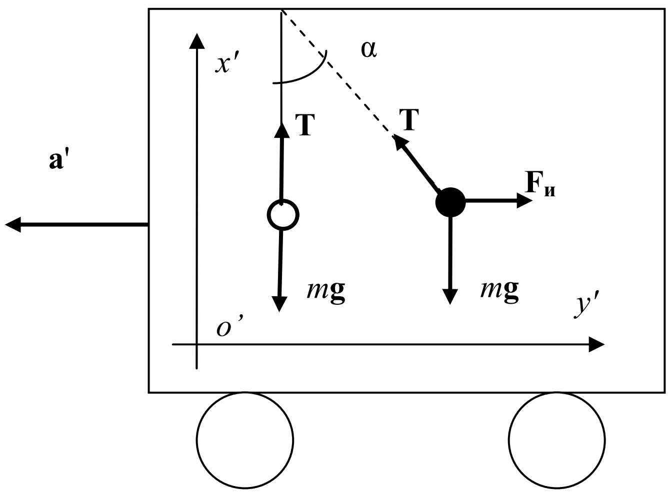
в ИСО (на лестничной площадке)	**В НСО** (внутри лифта)
$\overline{T} + m\overline{g} = m\overline{a}\,'$ $\overline{T} = m(\overline{a}\,' - \overline{g})$ $OX: T = m(g + a')$ $P = m(g + a')$	$\overline{T} + m\overline{g} + F_и = 0$ $\overline{T} + m\overline{g} - m\overline{a}\,' = 0$ $o'x': T - mg - ma' = 0$ $T = m(g + a')$ $P = m(g + a')$

<u>2. Лифт, движущийся с ускорением вниз.</u>

<u>(разобрать самостоятельно)</u>

$$\boxed{P = m(g - a')}$$

<u>3. Автобус, начинающий движение.</u>



в НСО:

$$\overline{T} + m\overline{g} + F_и = 0$$

$$\overline{T} + m\overline{g} - m\overline{a}\,' = 0$$

$$\begin{cases} o'y': T\cos\alpha - mg = 0 \\ o'x': -T\sin\alpha + ma' = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T = \dfrac{mg}{\cos\alpha} \\ T = \dfrac{ma'}{\sin\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{ma'}{\sin\alpha}$$

$$tg\alpha = \frac{a'}{g}$$

<u>*Примеры действия сил инерции:*</u>

1. Пассажиры автобуса при начале движения и остановке

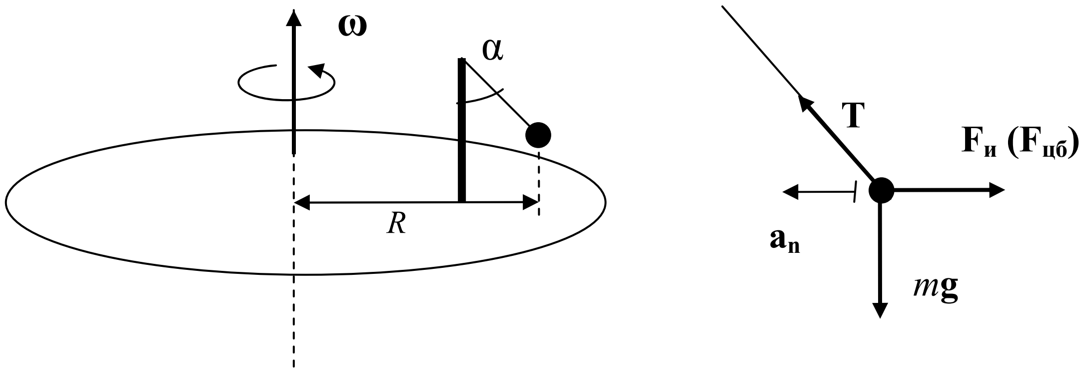
2. Пассажиры лифта
3. Космонавты при старте и посадке

   При старте и посадке 4-8 g

   При нештатной посадке до 12 g

Силы инерции, действующие на вращающееся тело

Рассмотрим тело, покоящееся во вращающейся СО.



● Сила, действующая на тело во вращающейся системе отсчета, независящая от движения тела в ней, называется **центробежной силой.** Центробежная сила направлена по радиусу вращения, от центра (оси) вращения и равна $-m\mathbf{a}_n$:

$$\bar{F}_и = -m\bar{a}_n$$

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R$$

$$F_и = m\frac{V^2}{R} = m\omega^2 R$$

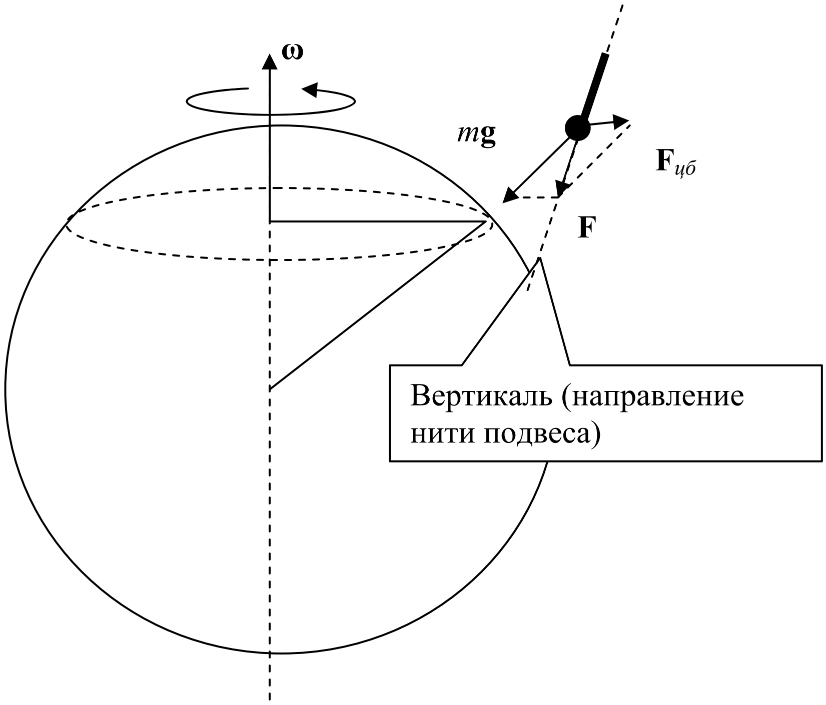
Примеры действия центробежной силы:

1. Пассажиры автобуса на повороте

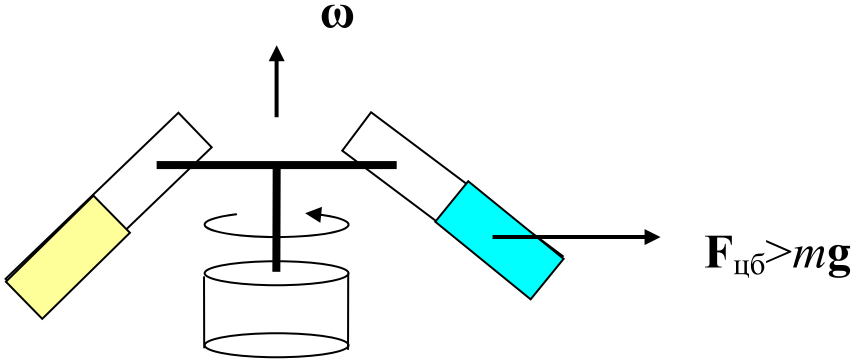
2. Летчики во время выполнения фигур пилотажа

   (Пилот в истребителе испытывает перегрузку в 7-8 g)

3. Направление силы тяжести на поверхности Земли отклоняется от вертикали:



4. На действии центробежной силы основано действие центрифуги, широко применяемой в химии и биологии:



- Если представить $F_{цб}$ в виде mg' ($F_{цб} = mg'$), то отношение $F_{цб}$ и mg определяется величиной кажущегося g'.

- $g' = \omega^2 R$

- Поскольку скорость осаждения ~ g', а современные центрифуги позволяют получить $g' \sim 10^5 g$, то скорость осаждения можно увеличить в тысячи раз.

Например:

Чтобы достичь $g' = 10^4 g = 10^5$ м/с^2 нужна скорость вращения:

$$g' = \omega^2 R$$

$$\omega = \sqrt{g'/R} = \sqrt{1000 g / R}$$

$$n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{10^4 g / R}}{2\pi} = \frac{\sqrt{10^4 \cdot 9.8 \frac{м}{c^2}}}{2 \cdot 3.14 \sqrt{0.5 м}} = 71.2 \frac{(об.)}{c} = 4270.6 \frac{об.}{мин}$$

(Современная стандартная лабораторная центрифуга дает 4000 об/мин, более дорогостоящие – до 100000 об/мин)

Силы инерции, действующие на тело, движущееся во вращающейся НСО

Чтобы выполнялся закон сохранения момента импульса, должна существовать сила, которая тормозит человека на скамье Жуковского, когда он разводит руки и ускоряет его, когда он прижимает руки к телу.

Какая сила тормозит человека на скамье Жуковского?

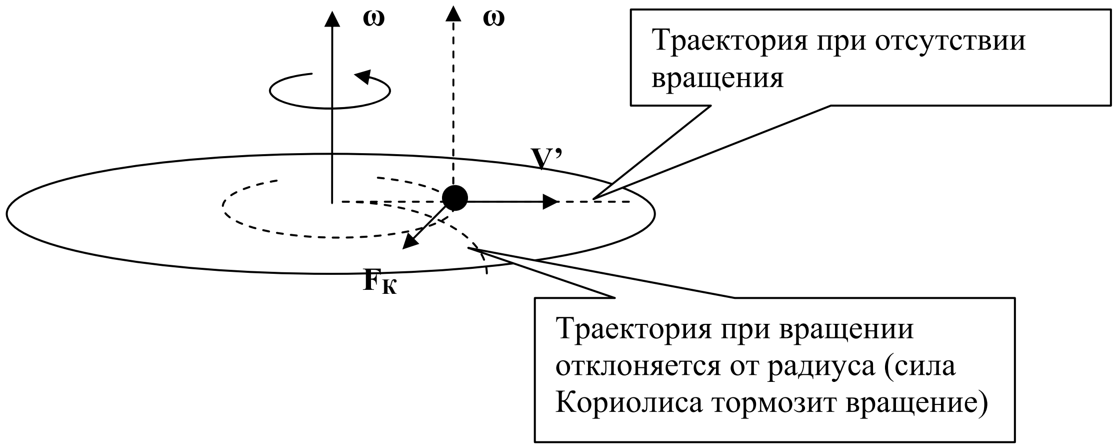
Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо признать, что существует сила, ускоряющая или тормозящая вращение тела, движущегося от центра вращения или к центру вращения в радиальном направлении.

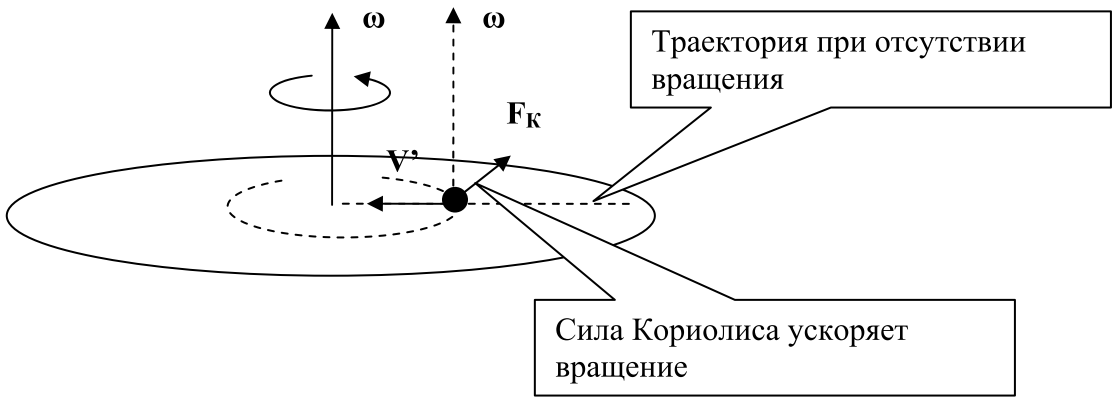
Эта сила называется **силой Кориоли́са** (*ударение соответствует «Физической энциклопедии»*) *(Гюстав Гаспар Кориолис 1792-1843 гг –*

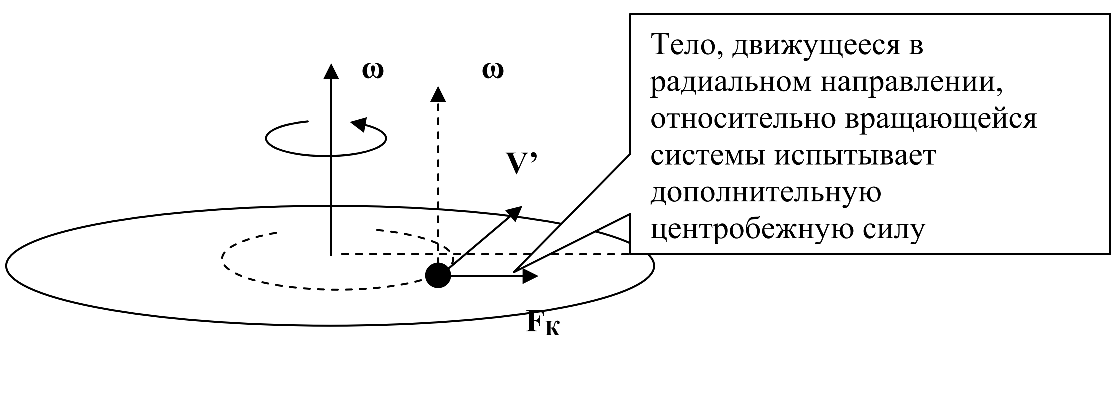
французский физик греческого происхождения). Кориолис доказал теорему (которая сейчас носит его имя), одно из следствий которой:

● Если тело движется со скоростью **V’** в системе, вращающейся с угловой скоростью **ω (**относительно неподвижной ИСО), на него действует дополнительная сила (**сила Кориолиса**), равная

$$\boxed{\bar{F}_K = 2m\left[\bar{V}',\bar{\omega}\right]}$$







● Этой силе соответствует т.н. **Кориолисово ускорение**:

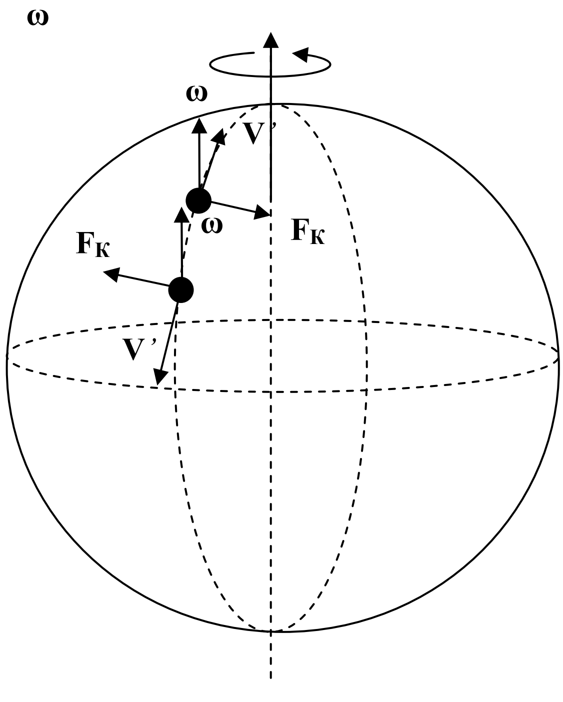
$$\boxed{\bar{a}_K = 2\left[\bar{V}', \bar{\omega}\right]}$$

Сила Кориолиса – перпендикулярна скорости движения V' – это пример **гироскопической силы.**

Примеры действия силы Кориолиса

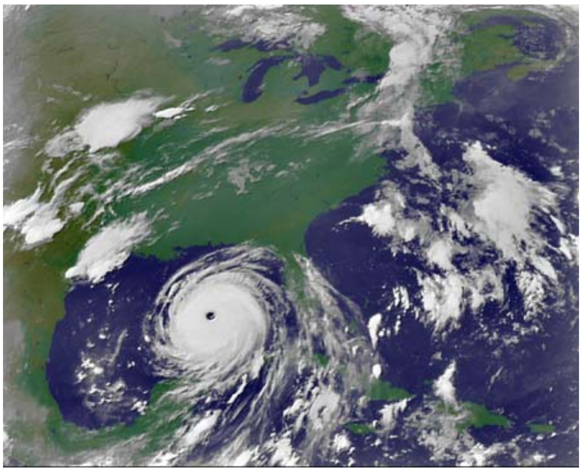
1. Падающее на поверхность Земли тело отклоняется к востоку (1 см с высоты 100 м)

2. Реки, текущие в Сев. Полушарии подмывают правый берег, в Южном – левый (пример – р. Волга).



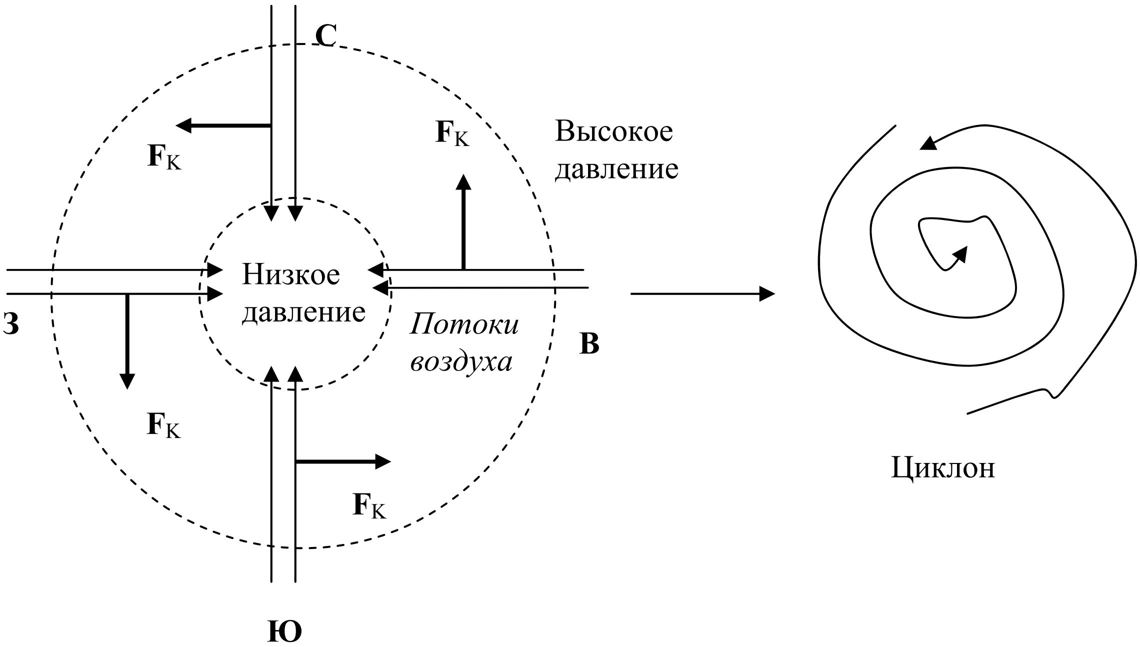
3. Циклоны и ураганы в Северном полушарии закручены против часовой стрелки, в Южном – по часовой:

(ураган Эндрю над США, 1992 г.)

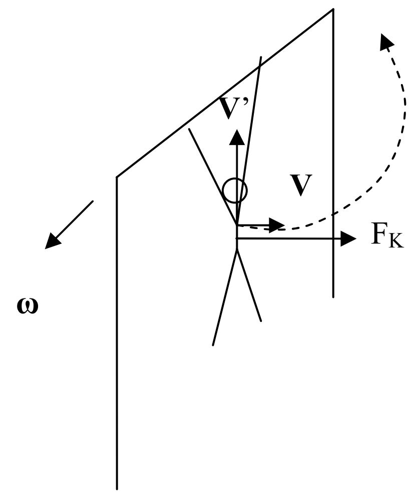


(ураган Катрина над США, 2005 г.)

Объяснение этого явления дает рисунок:



4. Гимнаст, выполняющий «солнце» на турнике.



5. *В какую сторону закручивается вода в ванне?*

(проделать опыт самостоятельно, варьируя количество воды. Можно ли объяснить результаты этих опытов только Кориолисовой силой?)

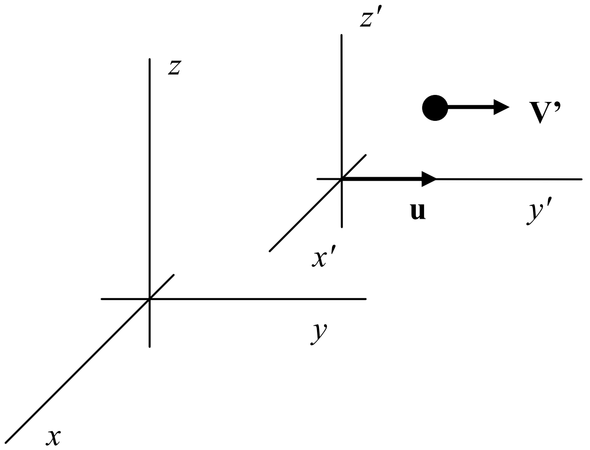
6. В химии **центробежная сила и сила Кориолиса** приводят к погрешностям при установлении длин связей, определяемых методом МВС. Поэтому при определении длин связей методом МВС всегда оценивают центробежные поправки, вызванные эти фактом.

СПЕЦИАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Переход между различными ИСО в Ньютоновской механике

Как связаны между собой явления в разных СО (ИСО)?

● **Принцип относительности Галилея -** во всех ИСО все законы механики протекают одинаково (Галилей, XVI в, Ньютон XVII в)



Связь между двумя ИСО *K* и *K'* (*K'* движется отн. *K* со скоростью **u**) дается выражениями, называемыми **преобразования Галилея**:

$$\begin{cases} x = x' + u_x t \\ y = y' + u_y t \\ z = z' + u_z t \\ t = t' \end{cases} \qquad (1)$$

<u>*Дополнительно полагается:*</u>

1. Массы не зависят от выбора СО:

$$m = m'$$

2. Изменение сил выражается через зависимость координат и скоростей.

$$F(r, V) = F(r', V')$$

3. Пространство не зависит от времени или объектов в нем.

4. Расстояние между объектами выражается **эвклидовой метрикой**:

$$l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

В геометрии такое пространство называется трехмерным Эвклидовым (плоским) пространством.

5. Все взаимодействия передаются на любые расстояния мгновенно.

Следствия преобразований Галилея:

1. После дифференцирования (1) получаем:

$\overline{V} = \overline{V}' + \overline{u}$ - т.н. **классический закон сложения скоростей**

$\overline{a} = \overline{a}'$ - ускорение инвариантно относительно смены ИСО

2. Промежутки времени между событиями не зависят от СО:

$$(t_2 - t_1) = (t_2' - t_1')$$
$$\tau = \tau'$$

3. Длина объектов не зависит от ИСО

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} =$$
$$= \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2}$$
$$l = l'$$

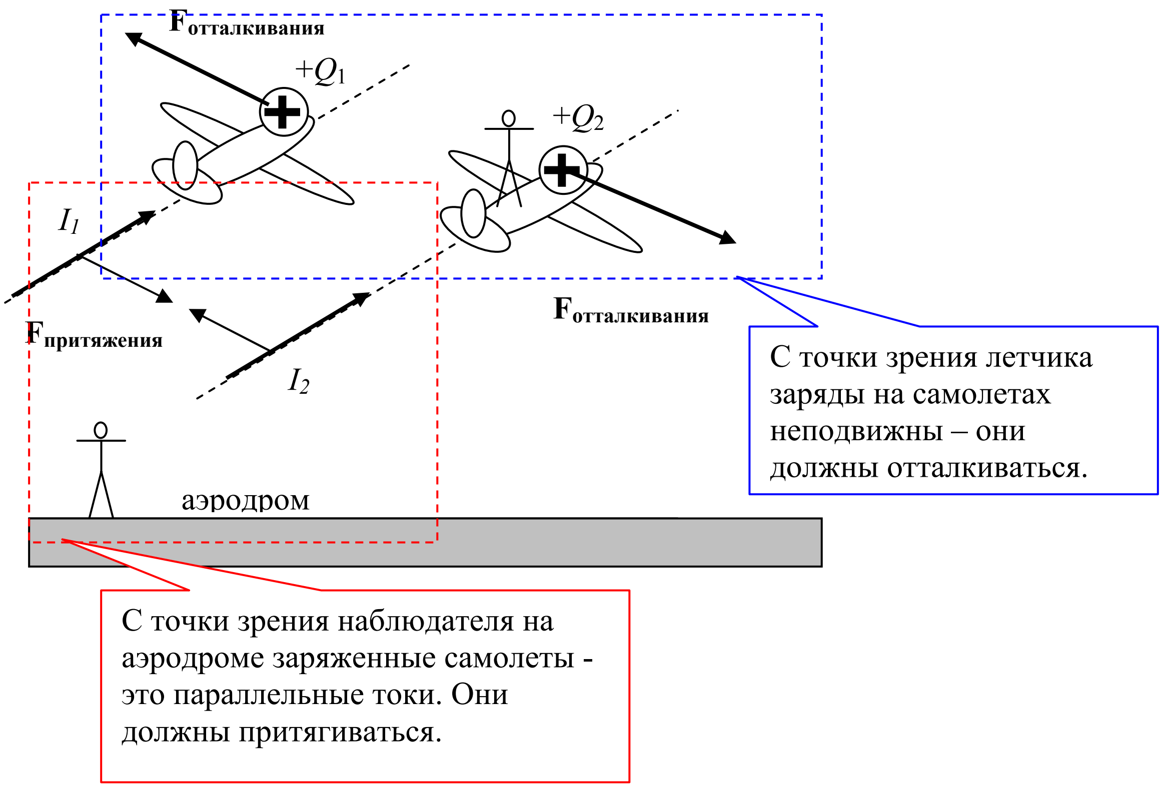
Суммируя эти факты, приходим к выводу:

Уравнения движения не изменяются при переходе от одной ИСО к другой. (Уравнения динамики инвариантны относительно преобразований Галилея)

Основные положения специальной теории относительности

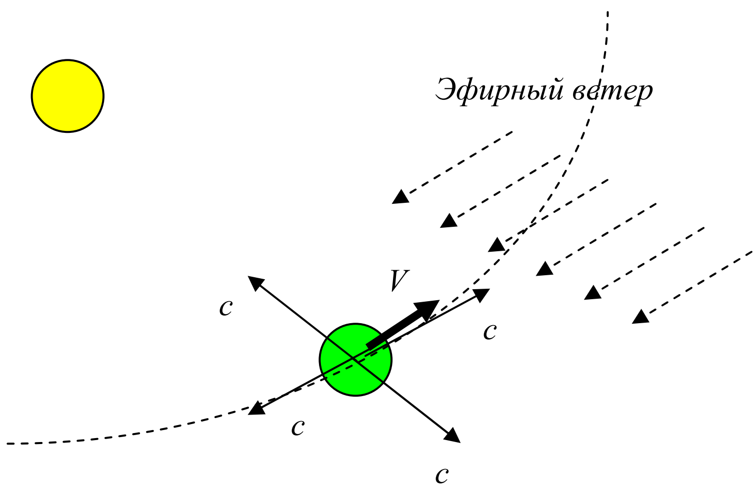
На протяжении 200 лет эти принципы не подвергались сомнению. Однако в конце XIX в. возникли новые экспериментальные данные, поднявшие ряд фундаментальных вопросов.

1. Неэквивалентность уравнений ЭМ поля относительно ИСО. В классической электродинамике взаимодействие зарядов зависит от того, движутся они или покоятся:

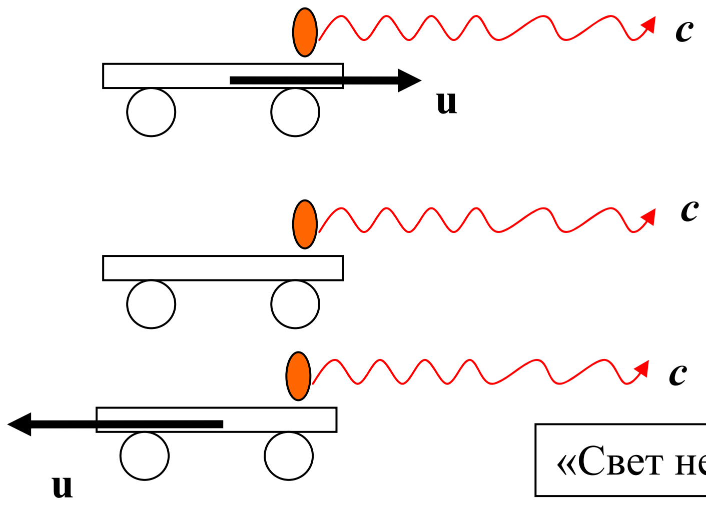


2. Опыт Майкельсона-Морли (1881) (попытка поиска «эфирного ветра», изменяющего скорость света в различных направлениях): скорость света не зависит от направления (т.е. от скорости источника).

В этом опыте изучалась возможность отклонения в скорости света в зависимости от того, испущен ли он в направлении движения Земли по орбите или в противоположном направлении:



Опыт показывает, что **скорость света не зависит от скорости источника**:



«Свет не может обогнать свет»

Кроме того, **скорость света не должна зависеть и от системы координат** – иначе можно было бы передавать сигналы с помощью света в одной ИСО быстрее, чем в другой.

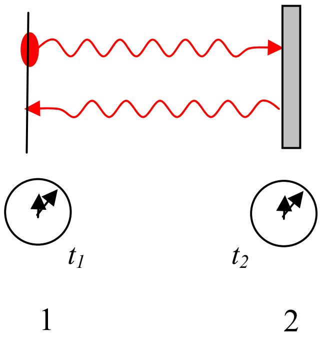
Эйнштейн (1905 г.) **(постулаты Эйнштейна)**

1. Все законы природы инвариантны относительно перехода от одной ИСО к другой. Никакие опыты не позволяют обнаружить, движется ИСО или покоится.
2. Скорость света в вакууме не зависит от скорости источника света и одинакова во всех СО.

Это приводит к «странным» следствиям:

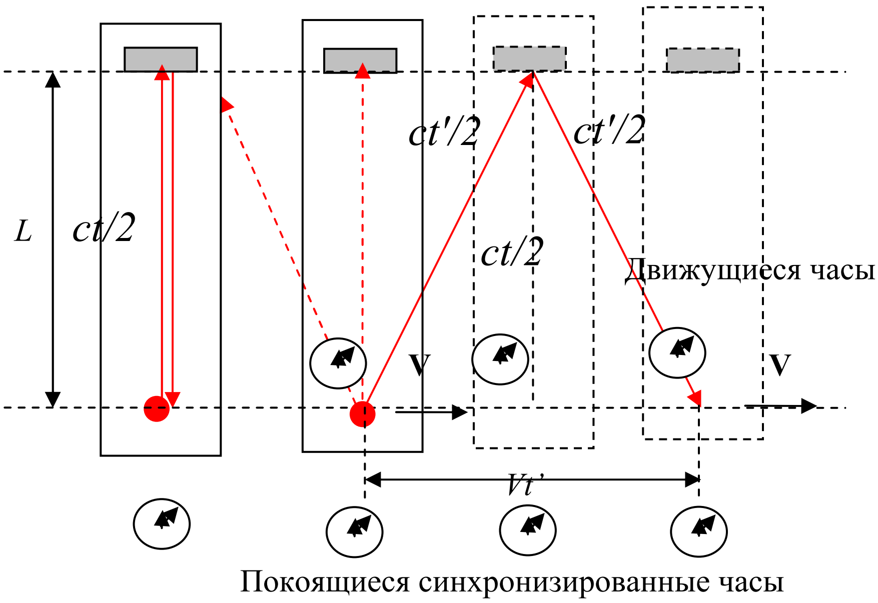
1. Длительность одного и того же события разная в разных ИСО.

Предположим, что у нас имеется набор синхронизированных часов в разных точках пространства. Синхронизированные часы – это часы, которые показывают одно и то же время, находясь в разных точках пр-ва. Синхронизировать часы можно, посылая в эти точки свет и сообщая им, сколько времени прошло от посылки сигнала до принятия отклика от зеркала.



Время прихода отклика - это поправка, которую можно сообщить в точку 2, одновременно с сигналом в условленный момент времени. С учетом этой поправки, два наблюдателя в точках 1 и 2 могут установить часы на одинаковое время.

Создадим набор синхронизированных часов в разных точках пространства и поставим около них наблюдателей. Предположим, что вдоль этого ряда наблюдателей равномерно и прямолинейно движется «вагон поезда» или «космический корабль», внутри которого еще один наблюдатель посылает световой сигнал перепендикулярно направлению движения и ловит «зайчик» от зеркала на противоположной стене:



Для наблюдателей «на перроне» и «в вагоне» расстояние, прошедшее светом будет разным:

По теореме Пифагора: $\left(\frac{ct'}{2}\right)^2 = \left(\frac{ct}{2}\right)^2 + \left(\frac{Vt'}{2}\right)^2$

Но по 2-му постулату Эйнштейна скорость света одинакова во всех ИСО. Значит, время отклика от зеркала в движущейся системе меньше, чем в покоящейся:

$$t = t'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} < t \quad -$$

Движущиеся часы покажут *ct*

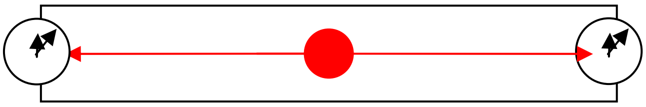
Покоящиеся часы покажут $t = t'\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} < t$

Любое событие, связанное с распространением сигналов (света) в движущейся системе **по часам покоящейся системы** будет длительнее, чем в покоящейся.

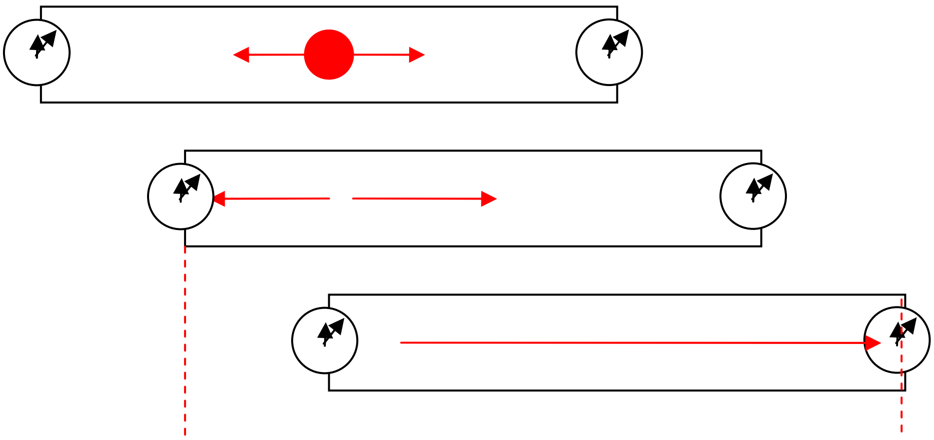
И наоборот, длительность интервала времени в покоящейся системе будет казаться длиннее по **часам в движущейся системе**.

2. События, одновременные в одной ИСО, будут не одновременны в другой.

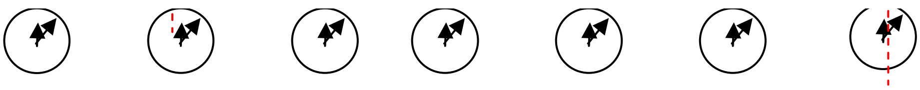
Синхронизированные часы в движущейся системе показывают время, отличающееся от покоящейся.



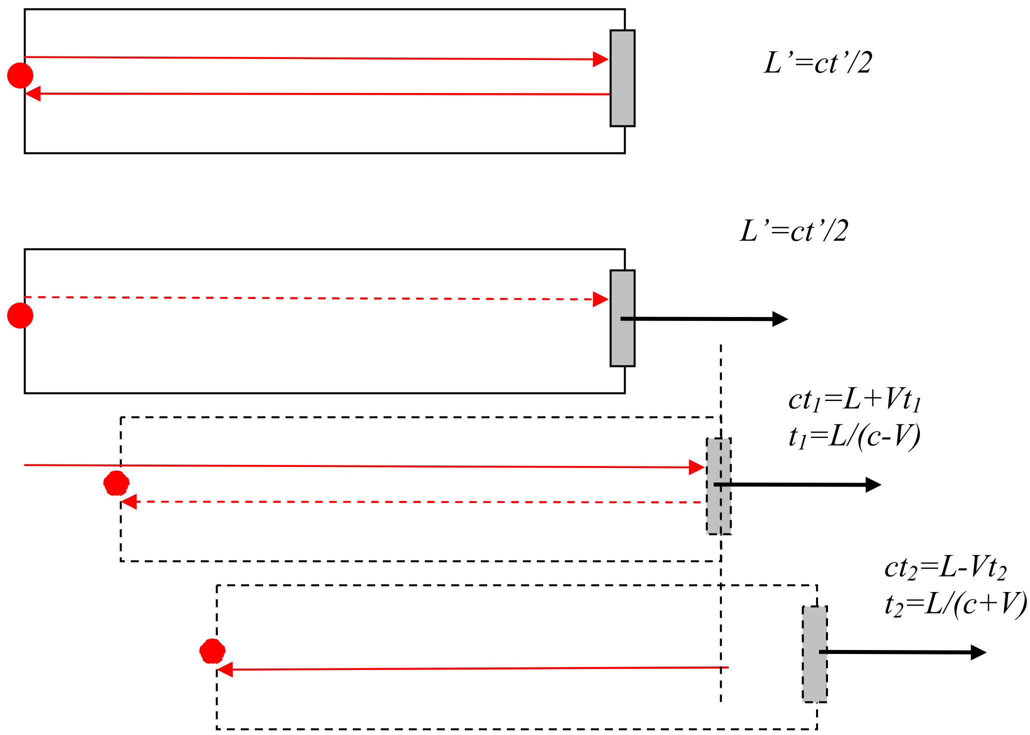
Синхронизирванные часы в движущейся ИСО показывают одно и то же время



Синхронизированные часы в покоящейся ИСО покажут разное время достижения светом границ корабля



3. Длины, **одновременно** измеренные в движущейся и покоящейся ИСО, различны.



$$t = t_1 + t_2 = \frac{L}{c-V} + \frac{L}{c+V} = \frac{Lc + LV + Lc - LV}{c^2 - V^2} = \frac{2Lc}{c^2 - V^2}$$

$$L' = \frac{ct'}{2} = \frac{ct\sqrt{1 - V^2/c^2}}{2}$$

$$L' = \frac{Lc^2\sqrt{1 - V^2/c^2}}{c^2 - V^2}$$

$$L' = \frac{L}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} > L$$

Результат измерения длины движущегося тела меньше в покоящейся ИСО, чем в ИСО, связанной с движущимся телом.

● Эти соображения могут быть формализованы: координаты и время должны преобразовываться при переходе от одной ИСО к другой по формулам **преобразования Лоренца**

$K \to K'$	$K' \to K$
$\begin{cases} x' = \dfrac{x - Vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$ $(\beta = V/c)$	$\begin{cases} x = \dfrac{x' - Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$ $(\beta = V/c)$

Следствия из преобразований Лоренца:

1. События, одновременные в одной ИСО, могут быть неинвариантными в другой ИСО (**относительность одновременности**)
2. Длительность события, происходящего в некоторой т. наименьшая в той ИСО, относительно которой эта точка покоится (**относительность времени**).
3. Линейные размеры тела наибольшие в ИСО, относительно которой тело покоится (**относительность линейных размеров**)
4. При переходе от одной ИСО к другой сохраняется не длина и промежуток времени, а величина, называемая **интервал:**

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

Еще одним важным следствием СТО является увеличение массы m движущегося тела по сравнению с массой покоя m_0

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Такую массу принято называть **релятивистской массой**. В настоящее время этот эффект принято включать в изменение импульса движущегося тела (релятивистский импульс), полагая массу тела всегда равной массе покоя. Однако независимо от этого, эффект увеличения инертности тела при повышении его скорости является физически наблюдаемым фактом: в ускорителях заряженных частиц при достижении субсветовых скоростей резко возрастают энергетические затраты на разгон частиц за счет увеличения их релятивистской массы.

Геометрическая интерпретация СТО

С точки зрения геометрии, **интервал** – это расстоянием между двумя точками отрезка в особом четырехмерном пространстве, в котором координаты выражаются как (x,y,z,ct), а одна из осей (ось времени) – мнимая величина, т.е. длина ее единичного орта – мнимая единица i.
Такое пространство называется **четырехмерным псевдоэвклидовым пространством** (**пространством Минковского**). Преобразования Лоренца соответствуют поворотам четырехмерных объектов в этом пространстве.

Таким образом, согласно СТО:

Наши пространство и время не являются независимыми.

Они представляют собой 4 координаты нашего мира, геометрия которого – псевдоэвклидова. Все объекты вокруг нас – 4-мерные тела, изменение скорости которых – поворот в 4-мерном пространстве-времени.

Длина объектов и длительность процессов – это проекции реального 4-мерного объекта на трехмерное подпространство длин и одномерное подпространство времени.

Сокращение длины и увеличение времени в движущейся СО происходит за счет того, что мы измеряем размеры проекций 4-мерных объектов на 3-мерное пространство и 1-мерное время. Размеры проекций различны, они зависят от угла поворота (т.е. от скорости движения тела в трехмерном пространстве). Истинные размеры самих 4-мерных тел не изменяются.

Несмотря на «странность» следствий и выводов СТО, они находят экспериментальное подтверждение:

1. **Опыт Майкельсона-Морли** (отсутствие «эфирного ветра», подтверждающее справедливость 2-ого постулата)
2. **Опыт Физо** (зависимость скорости света в жидкой среде от скорости движения жидкости – доказывает справедливость релятивистского закона сложения скоростей)
3. **Неизменность скорости света, испускаемого движущимися объектами** (двойные звезды, планеты, испускающие свет элементарные частицы, движущиеся в том числе и с субсветовыми скоростями);
4. **Увеличение инертности частиц в ускорителях при достижении субсветовых скоростей.**
5. **Удлинение времени жизни короткоживущих частиц - мезонов** (мезоны, рождающиеся в лаборатории движутся медленно и живут доли секунды, успевая пролететь 10-50 см). Мезоны, рождающиеся в атмосфере, движутся с околосветовой скоростью. Их время жизни замедляется настолько, что они успевают долететь до поверхности Земли с высоты 30 км).

Как и в случае с проверкой законов Ньютона, подтверждение СТО не может быть получено в результате какого-либо одного эксперимента. Наиболее серьезное подтверждение ее справедливости – инженерная и научная практика на протяжении более 100 лет, в течение которой

1) проводилась экспериментальная проверка отдельных следствий;
2) строились инженерные установки (ускорители заряженных частиц, атомные реакторы, ядерные силовые установки), основанные на предсказаниях СТО;
3) на основе математического аппарата СТО проводилась интерпретация экспериментальных данных ядерной физики, физики элементарных частиц, астрономии и астрофизики.

Вся совокупность полученных за это время данных позволяет утверждать, что до настоящего времени не обнаружено каких-либо достоверных результатов, противоречащих СТО.

Это, однако, не означает, что СТО не имеет пределов, ограничивающих ее применение. Так, инвариантность интервала подразумевает, что пространство-время «плоское», не имеет существенной кривизны. Это свойство перестает выполняться вблизи больших гравитационных масс и на расстояниях порядка размеров Вселенной. В этих областях выражения СТО перестают быть хорошим приближением и требуют модификации. Одним из возможных способов такой модификации (возможно, не наилучшим, поскольку существуют несколько подходов, описывающих подобные явления) является использование уравнений т.н. **общей теории относительности** (ОТО) – более общей теории, учитывающей кривизну пространства-времени и ее связь с энергией и массой тел в локальной области пространства. Выводы ОТО, однако, несовместимы с выводами квантовой механики при размерах объектов меньше 10^{-16} м.

МЕХАНИКА.
КУРС ЛЕКЦИЙ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ХИМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Станислав Константинович **Игнатов**

Электронное учебное пособие

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского».
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23