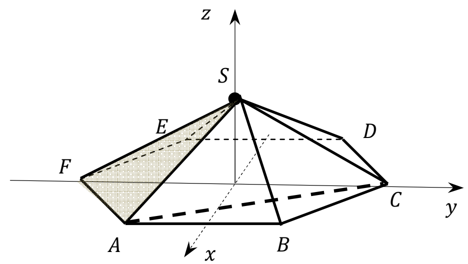
Интернет –лекция

Решение задачи С2 координатным методом



Асс. Кафедры «ДУиМА» мехмата ННГУ

Чубаров Георгий Владимирович

Знакомство

Знакомство и общие цели. Здравствуйте уважаемые абитуриенты городов Арзамаса, Дзержинска и Павлово. Здравствуйте уважаемые коллеги учителя.

Меня зовут Чубаров Георгий Владимирович. Я преподаватель мех-мата ННГУ. Кроме того я член той самой комиссии которая в этом году проверяет ЕГЭ по математике.

ЕГЭ по математике скоро. Менее чем через 2 месяца вы все будите сдавать этот важный для вас экзамен. Цель моей лекции - помочь вам в сдаче ЕГЭ. Что бы оказать помощь как можно большему числу учащихся, мы проводим лекцию в формате интернет конференции. Это очень современная форма.

В отличии от учебного фильма она позволяет вам принимать в ней участие. Как?? Задавая интересующие именно вас вопросы. Поэтому пользуйтесь этой возможностью. Я со своей стороны так же буду задавать вам тестовые вопросы, что бы почувствовать скорость и уровень вашего понимания. Для этого у нас будет служить вопросная пауза. Она начинается с появлением такого символа.

Вопросная ??? пауза

Итак вопрос первый. Хорошо ли вы меня слышите??? Я не быстро говорю? Павлово, Арзамас, Дзержинстк. Отлично. Мы слышим и понимаем друг друга.

Ещё одним преимуществом интернет лекции является то, что для вас доступна, как я понимаю, электронная версия моей презентации. Это вас избавляет от писанины и позволяет сосредоточится на понимании. А мне это даёт возможность придерживаться высокого темпа в изложении учебного материала. И в ключать в этот материал красочные иллюстрации.

Где есть плюсы там есть и минусы. Интернет лекция совершенно новая для меня форма, поэтому заранее прошу прощение за возможные технические и психологические накладки.

Выбор самой актуальной темы.

Когда меня попросили прочитать для вас лекцию, я задумался о том, что же может быть для вас наиболее полезным и актуальным. На сайте ФИПИ fipi.ru я нашёл удивившую меня информацию. В «Аналитическом отчете о результатах ЕГЭ 2011 г» который составляет ФИПИ приводятся такие данные о выполнении заданий части С школьниками по всей стране.

	C1	C2	C3
Приступили в %	65,3	**35,1**	43,4
Положительный результат в %	41,8	**13,9**	19,5

Чем меня задели цифры в столбце С2. Судя по баллам, задание С2 считается равносложным с заданием С1 и в полтора раза более простым чем С3. Но к С1 приступают почти в два раза чаще и решают в 3 раза лучше чем С2. А к более сложной С3 приступает на почти на четверть чаще и решают на 40% !! лучше чем С2. О чём это говорит?

Это говорит о том, что геометрией в сравнении с алгеброй у нас пренебрегают. И даже начальники образования, которые любят рапортовать о повышении уровня образования в том же публичном отчёте пишут:

«Отдельно следует отметить, что при определенном росте все еще остается на низком уровнепроцент выполнения заданий по стереометрии. Так задание С2 попробовали решить треть участников экзамена, а полностью выполнили лишь 8,8% экзаменуемых».

«Аналитический отчет о результатах ЕГЭ 2011 г. fipi.ru

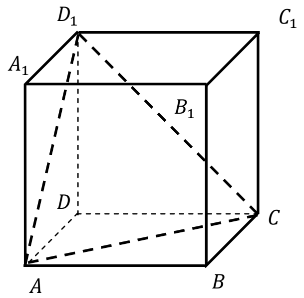
Что такое задача С2?

В подавляющем большинстве задач С2 требуется вычислить либо расстояние или угол между элементами многогранника. Это вот какие задачи.

<table>
<tr><th>Задача на расстояние</th><th>Задача на угол</th></tr>
<tr>
<td>

Дано
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб
с ребром 1.

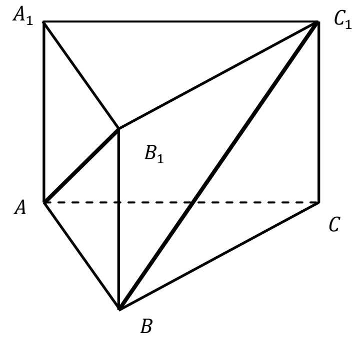
Найти
Расстояние от вершины
A_1 до плоскости $A\ D_1C$



</td>
<td>

Дано
$ABCA_1B_1C_1$ - правильная
треугольная призма.
Все рёбра равны 1.

Найти
Угол между прямой
AB_1 и BC_1



</td>
</tr>
</table>

Такие задачи будем называть метрическими
А вы как оцениваете свою готовность к решению С2? Павлово, Дзержинск, Арзамас??

Вопросная ??? пауза

Причина трудностей

Почему же задачи С2 вызывают непропорциональные трудности?

Я не удовлетворился лежащими на поверхности объяснениями и заинтересовался вопросос о глубинных причинах этого явления.

Я провёл эксперимент на двух знакомых одиннадцатиклассниках с уровнем подготовки выше среднего.

Я попросил их обоих решить 3 задачи типа С1, С2, С3. И что вы думаете? Они решили задачи С1, почти решили С3, но С2 решить не смогли.

Но самое удивительное состояло в том, что когда я им объяснил как же решать эти задания и как обосновывать ответ, а потом попросил воспроизвести решение самостоятельно, они воспроизвели решение, но не смогли воспроизвести обоснование. Ни в какую. Потом я попросил объяснить решения их задач С1 и С3. То же самое. Сделали, но не поняли что сделали. Ведь ЕГЭ экзамен письменный и никого не интересует понимание учащихся элементарных вопросов.

После этого эксперимента я понял, что

1) С2 действительно самое узкое место в стандартной подготовке к ЕГЭ.
2) Причины этого лежат глубже чем простое не знание геометрии. В геометрии они ярче всего проявляются. Современных старшекласников учат быстро решать и совершенно не учат понимать, объяснять и обосновывать.
3) Неотрефлексированность сознания и является глубинной причиной повсеместной невосприимчивости сознаня к стереометрии уровня С2.

Цель и метод.

Моя цель, за одну лекцию рассказать вам о такой технологии решения С2, которая бы позволила каждому из вас гарантированно решить задачу С2 на ЕГЭ. При этом не просто научить решать, но решать по возможности осмысленно и чётко.

Вы скажете, что это невозможно. Вы скажите, что научить вас классической стереометрии за столь короткий срок нельзя. Нельзя научить быстро научить математическому рассуждению, необходимому для осбоснования вычислений. Я с вами соглашусь.

Но мы пойдём другим путём.

Но для решения метрических задач гораздо эффективнее использовать не евклидову стереометрию, а декартову стереометрию. Ту самую которую в школе называют координатным методом решения задач.

Поднимите пожалуйста руки те кто более менее знаком с этим методом. У кого слова не вызывают культурный шок.

Вопросная ??? пауза

Итак тема нашего урока

Решение задач типа С2 координатным методом.

Достоинства и недостатки метода

Метод координат и должен по моей мысли стать тем чудодейственным лекарством от проблем с задачей С2. Он почти не требует пространственного воображения, знания теорем стереометрии и математических рассуждений. Здесь не нужно применять теорему о трёх перпендикулярах или доказывать, что 4 нужные точки лежат в одной плоскости. То что вы особенно не любите

Зато он позволяет построить схему решения все мыслимых типов задач, которую вам останется только освоить! Этот метод даст вам удочку, на которую вы сможете поймать решение любой задачи типа С2.

К тому же жизнь не заканчивается со сдачей ЕГЭ. Вам это кажется странным, но это так. Многие из вас поступят в ВУЗ, например в филиал ННГУ, который нахоится в вашем городе. И в ВУЗе вы столкнётесь с аналитической геометрией, основы которой я сейчас изложу. Поэтому лишним понимание аналитической геометрии не будет. И вообще, настоящее знание лишним никогда не бывает.

К недостатам метода можно отнести то, что вам придётся усвоить новый алгебраический материал связвнный с определителями. И вообще придётся привыкат к новой реальности.

Методом координат можно овладеть как чисто техническим приёмом. Не думая не о чём. Но я, помня о глубинной проблеме системности ваших знаний, я попытаюсь, в меру своих способностей, не только показать вам новый подход к решению задач. Я попробую объяснить внутреннюю кухню метода, вскрыть его глубинную идею.

Особенность.

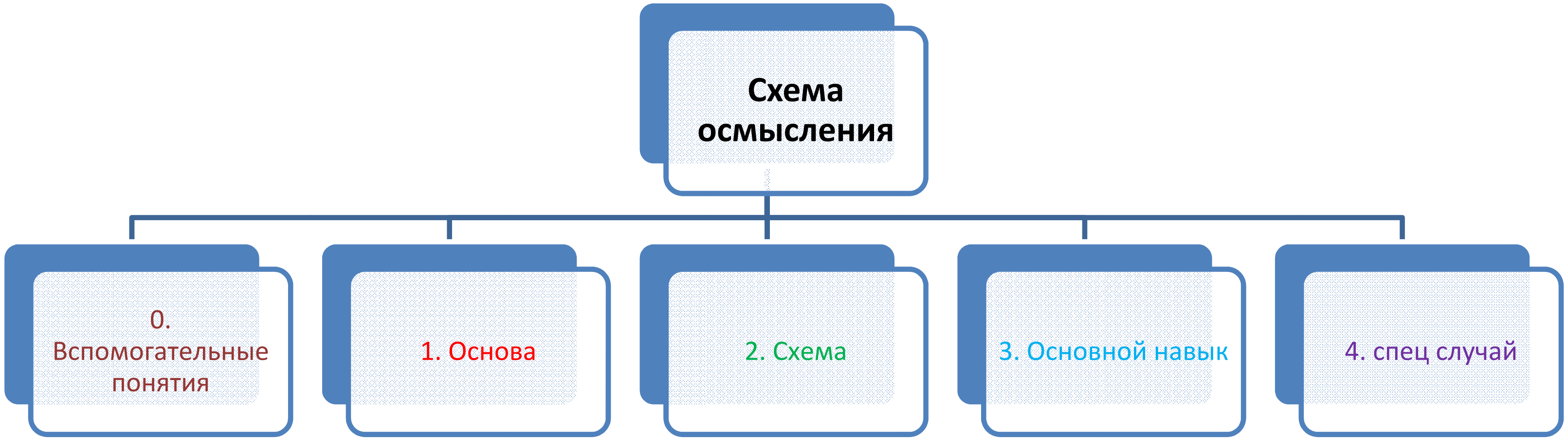
Мне предстоит вам передать разово огромный объем информации. Причём не только передать, но и объяснить. Для того, что бы у вас в головах не получилось хаоса, я буду прибегну к помощи двух своих помошников: 1) схемы осмысления и 2) интуитивной базы.

Познание состоит из мышления и понимания. Мышление = усвоение новых конструкций, Понимание - связывание нового со старым. Для того, что бы вы лучше мыслили, я буду использовать 4 ступенчатую схему осмысления. А для того, что вы ещё и понимали довольно абстрактный материал лекции зримо, я буду опираться на известный большинству из вас фильм «Матрица» 1999 года.

4 схема осмысления

Все сведения, я буду передавать вам не в мешке и не кучей, а зараенее упакованными в 4-ю схему осмысления. Это такая система полок, или файлов по которой информация будет постоянно раскладываться. Смысл как и дневной свет можно разложить в спектр. И все идеи идеи которые мне нужно вам передать, я предварительно буду раскладыать в спектр и сообщать отдельными смысловыми пакетами.

Что бы легче ориентироваться в схеме я присвоил каждому пункту определённый цвет.



Пояснения

0) Вспомогательные понятия (что нужно знать прежде и базовые интутции)
1) Основа (базовые понятия и утверждения)
2) Схема (общее описание алгоритма)
3) Основные навыки (необходимые для работы по схеме)
4) Специальные случаи (когда всё проще или сложнее)

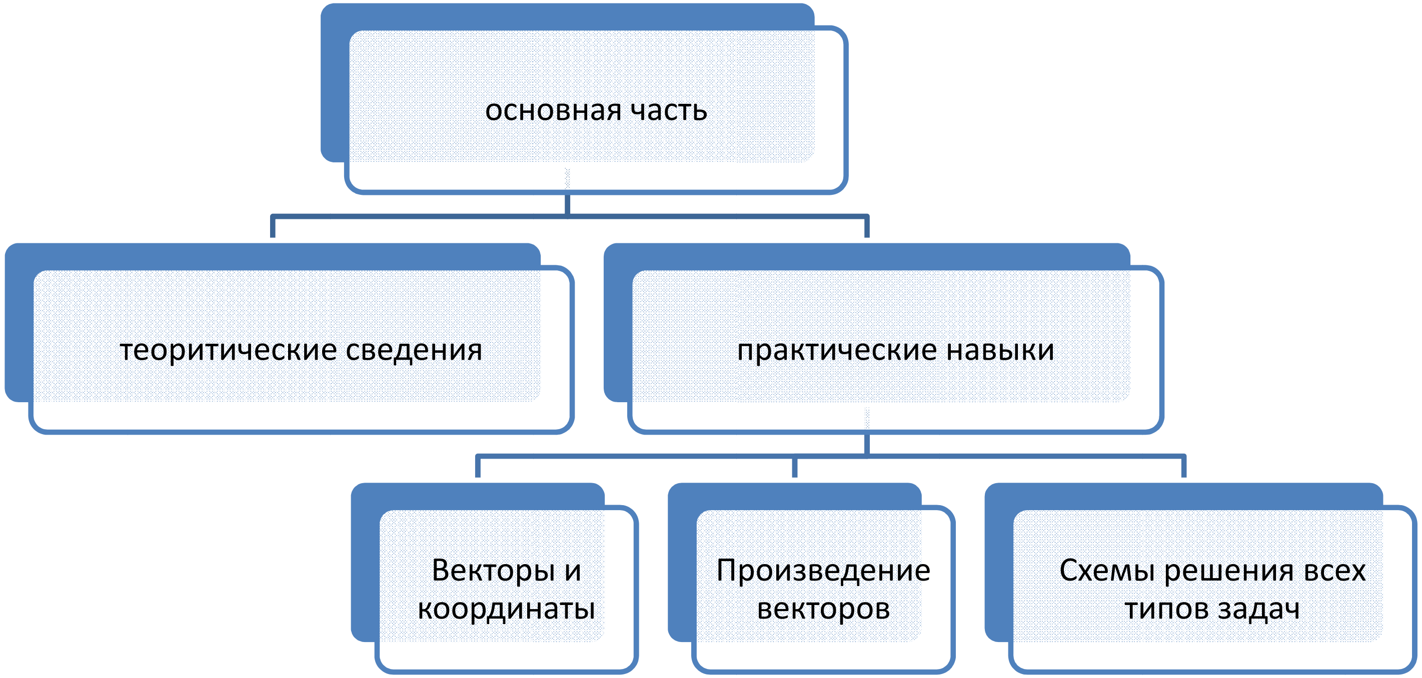
0 и 4 пункта может и не быть. Основные полки это 1. основа и 2. схема.

Я буду стараться всю информацию упорядочивать по такой схеме. Когда вы к ней привыкните, вы почувствуетена сколько эта схема систематизирует ваши знание и мышление, облегчает вам запоминание, хранение и передачу знаний другим людям.

Итак вы теперь знаете, кто я, чему и почему хочу вас научить. А так же знаете мои педагогические средства. Появились ли вопросы на этой стадии.

Вопросная ??? пауза

Коль мы покончили со знакомством Теперь перейдём к основной части нашей лекции. Она будет иметь следующую структуру

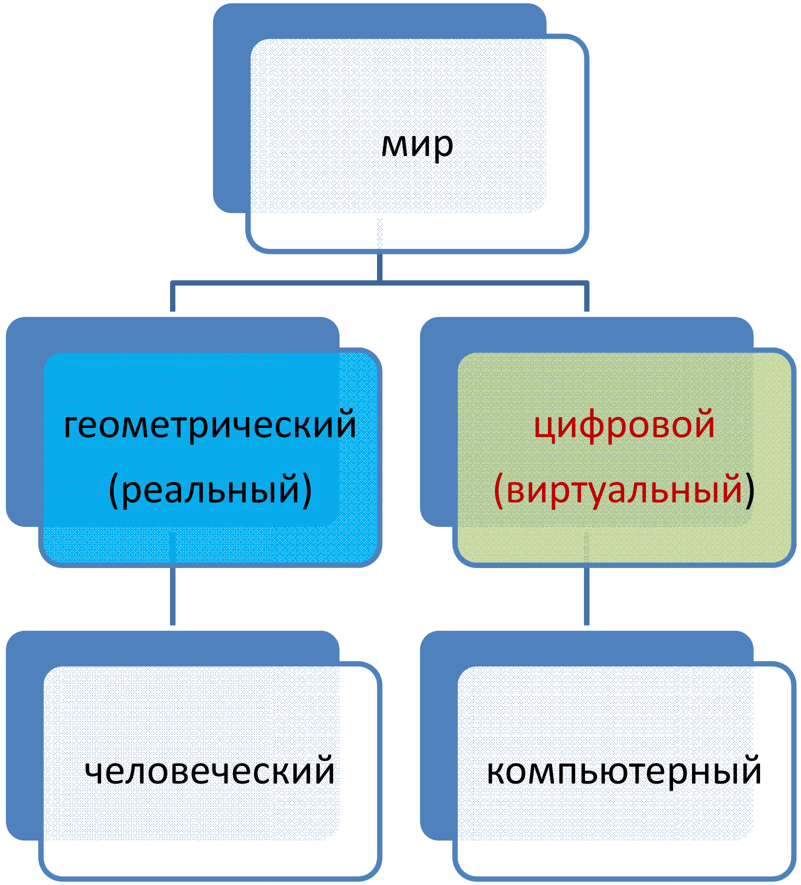


Часть 1. Теоретические сведения

0. Вспомогательные понятия.

Для создания базовых интуиций обратимся в фильму «Матрица».

Что там показано? В фильме предельно выразительно показано параллельное существование и взаимодействие двух миров геометрического и цифрового.



Геометрический мир

Цветовая гамма: тёмно-сине-голубая

Цифровой мир

Цветовая гамма: зелёно-чёрно-красная

Совершенно аналогично тому, с чем мы сталкиваемся в фильме школьная математика состоит из двух основных, крайне несходных друг с другом частей или миров. Алгебры и Геометрии. Это чрезвычайно различные миры. Это различие иллюстрирует таблица.

Составляющие	**Геометрия**	**Алгебра**
Элементарные объекты	Точка, прямая, плоскость.	Число, операции, функции.
Отношения	Равенство, параллельность, перпендикулярность, принадлежность прямой или плоскости, угол, расстояния	Равно, больше, меньше, во сколько больше, на сколько меньше.
Операции	Пересечение, объединение, построение	Сложение, вычитание умножение, деление
Объекты	Отрезок, треугольник, многоугольники, многогранники	Уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств, матрицы.
Характеристики объектов	Длина, угол, площадь, объём	Модуль, знак, Множество решений

Вдумайтесь в это различие. Даже удивительно, что это две части одной науки.

Об этом разделении нужно всегда помнить, что бы не заблудится в лабиринтах координатного метода.

Теперь поймире следующее. Алгебра занимается не только числами.

Алгебра занимается любыми объектами, над которыми можно производить операции. Числа – просто самые простые из них.

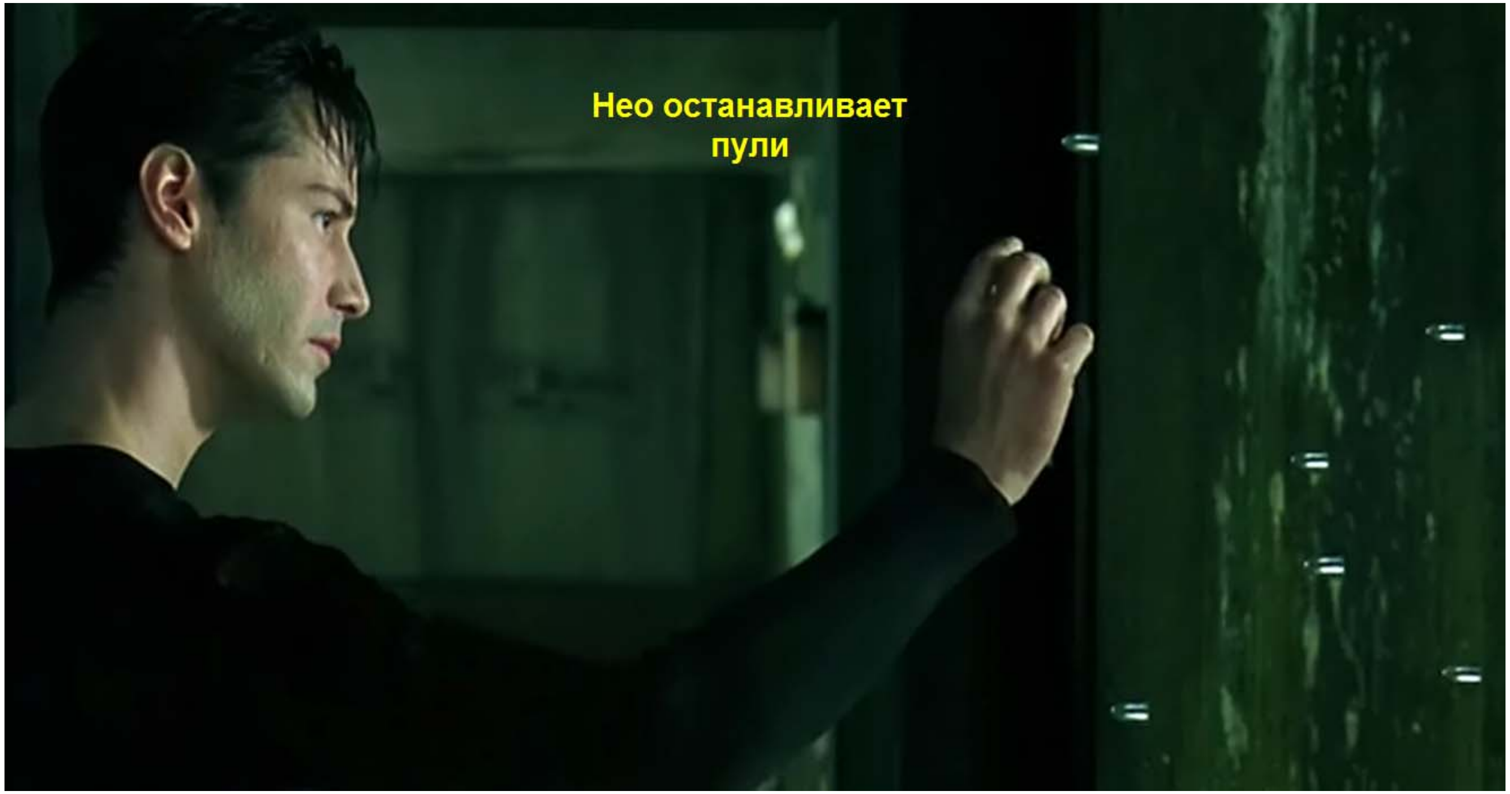
Алгабра изучает не числа и не из свойства, а операции сами по себе и свойства операци. Поэтому наука изучающая операции над векторами будет называться векторной алгеброй, а наука которая изучает операции над матрицами будет называться матричной алгеброй.

Геометрия тоже занимается изучением гораздо более сложных вещей, чем это нам кажется по школе. Но этого нам знать пока необязательно.

1. *Основа.*

Давайте вспомним в чём состоял сюжет фильма Матрица? Герои переносились из геометрического мира в цифровой мир с целью освободить людей от диктата машин. Важно что

1) оставаясь тольков геометрическом мире реальности они свою задачу решить не могли
2) в цифровом мире они могли творить такое, о чём и мечтать не могли в реальности



Координатный метод позволит нам уподобиться героями фильма Матрицы Нео, Морфиусу и Тринити. Потому что мы так же благодаря ему мы сможем проникать в мир алгебры и легко творить там такие чудеса, котрые нам и не снились в геометрическом мире.

Я не шучу, потому, что **Аналитическая геометрия это решение геометрических задач методами элементарной алгебры.**

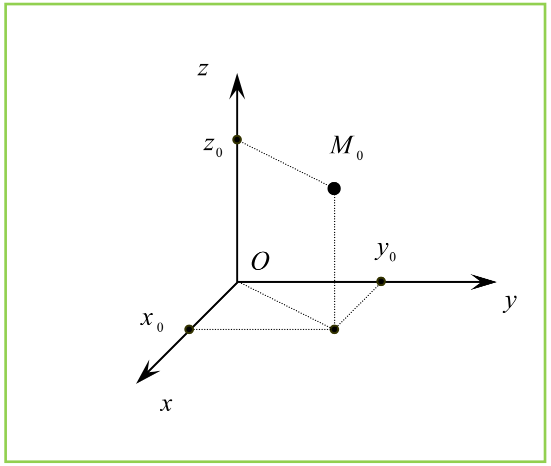
Мост между мирами

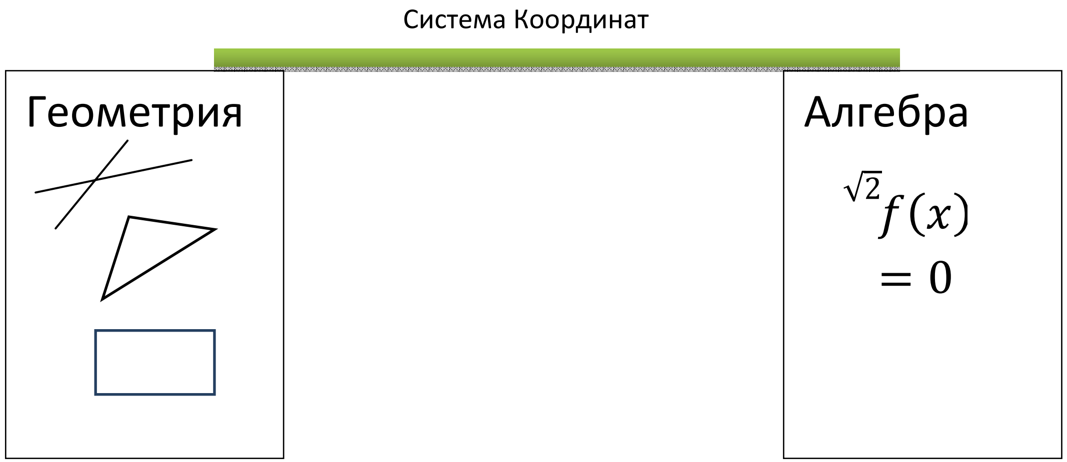
Что бы решать геометрические задачи методом алгебры нужно как-то алгебраизировать геометрию, то есть её отцифровать.

В фильме отцифровка героев и их материализация происходит при помощи специальных устройств

А с помощью чего происходит оцифровка геометрии в координатном методе?

Что позволяет кодировать геометрические объекты и делать из них объекты цифровые, то есть алгебраические?? Вот он наш скромный труженник. Координатная система





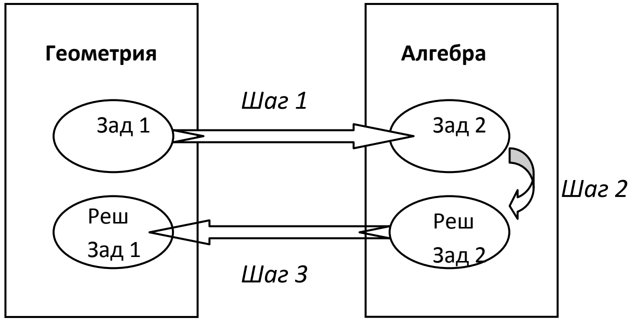
Система координат, придуманна Рене Декартом в 1637 году. Именно она является мостом между мирами.

Поэтому создав декартову СК Декарт стал отцом АГ.

Кстати этот же приём он использовал, для того что бы впервые закодировать кресла в королевском театре по стандартному теперь методу «ряд - место».

Базовая схема Аналитической геометрии

СК позволяет кодировать геометрические объекты, а значит позволяет решать Геометрические задачи по следующей трёх шаговой схеме.



Особенно эта схема работает в метрических задачах, где конечным результатом служит число.

Сложность.

Мы дошли до той точки в которой становится заметным разница между тем, что вы проходили в школе и тем, чему буду учит вас я.

Оказывается одной СК мало для полноценного решения геометрических задач. Отцифровать это половина дела. Нужно ещё уметь все геометрические отношения и операции переводить в алгебраические. СК сама по себе этого не позволяет.

СК узкая доска, перекинутая над пропастью. А мир геометрии и алгебры настолько далеки и отличны, что пройти по досточке это расстояние очень трудно.

Что делать? Мы должны сделать мост более удобным и широким. Для этого можно построить дополнительные опоры.

Вспомним, как обстояли дела в фильме. Разве герои непосредственно взаимодействовали воевали с машинами?? Машины и люди слишком далеки друг от друга. Герои взаимодействовали с миром цифр посредством определённого интерфейса, того самого пресловутого как бы реального мира матрицы отрисованного в зеленовато красной цветовой гамме.

Реальный человеческий мир	**Мир внутри матрицы**	**Реальный мир матрицы**
		

При этом, каждый объект в этом мире матрицы имеет одновременно геометрический и цифровой образ.

Геометрический образ	Цифровой образ
	

В нашем методе так же вощзникнет мир, аналогичный миру матрицы. Мир цифровой и геометрический одновременно.

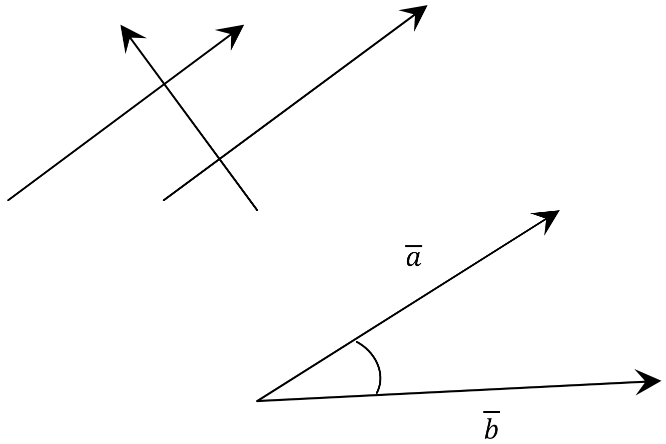
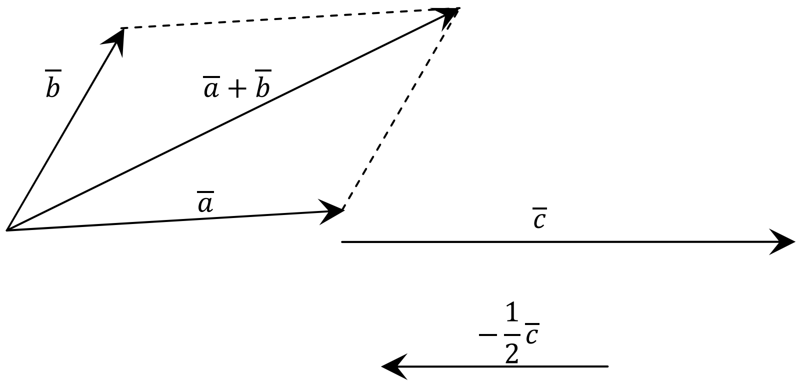
Это будет мир векторов. Мир векторов это наша с вами Матрица, к которой мы будем подключаться и спомощью которой будем решать свои задачи.

Мы свами так же будем преобладание геометрии отображать в синих оттенках, а преодладние цифрового элемента в оттенках зелёного

Геометрия			**Алгебра**

Векторы

КАЗАЛОСЬ БЫ мы с вами хорошо знаем что такое векторы. Это направленные отрезки. Но посмотрите на них в контексте противопоставления алгебры и геометрии. И вы увидите, что это существа имеют две природы. Это как бы земноводные.

Геометрическая природа	Алгебраическая природа
	

Более подробно эта двойственность векторов иллюстрируется таблицей.

Двуприродность вектора			
Геометрическая природа вектора		**Алгебраическая природа вектора**	
название	**обозначение**	**название**	**обозначение**
Длина $\bar{a}$	$\lvert\bar{a}\rvert$	Сумма $\bar{a}$ и $\bar{b}$	$\bar{a}+\bar{b}$
Угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$	$\widehat{\bar{a}\bar{b}}$	Произведение β на $\bar{a}$	$\beta\bar{a}$
Параллельность $\bar{a}$ и $\bar{b}$	$\bar{a}\,\vert\vert\,\bar{b}$	Векторное уравнение	$\bar{a}=t\bar{b}$
Перпендикулярность $\bar{a}$ и $\bar{b}$	$\bar{a}\perp\bar{b}$	Скалярное произведение	$(\bar{a},\bar{b})$

Две расы векторов

В мире векторов живёт две расы существ. Первая, низшая раса – это геометрические вектора. То есть направленные отрезки. Они прибиты к своей точке пространства. А есть другие векторы. Они выглядят так же, но они свободны, они могут плавать. Они не привязаны к точке.

Вспомните, в мире матрицы схожая ситуация. Там также живут сущности двух видов.

Проекции людей	Агенты
	

Первая – виртуальные проекции обычных людей. А вторая – агенты, автономные модули. У них ключи от всех дверей. Они могут воплотиться в любом теле.

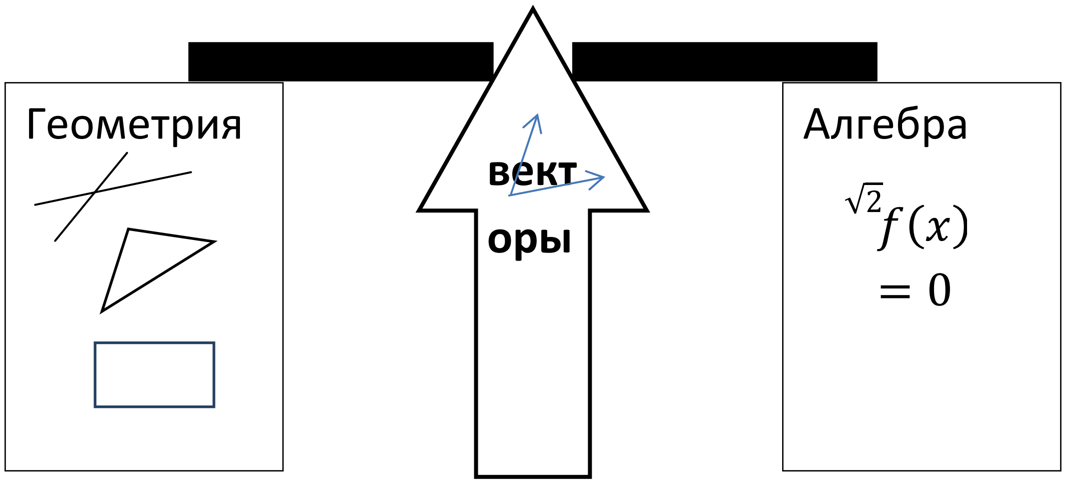
Люоди живущие в матрице похожи на это рабски прибитых к одному месту геометрических векторов,то свободные вектора подобны агентам Смиту, Брауну и Джонсу.

И вот этих то агентов мы приручим и заставим себе служить. И они будут делать за нас всю тяжелую работу. Здорово?? Мы заставим работать матрицу, то есть мир векторов на себя.

Диспозиция

ИТАК , мы поняли, что наша первичная задача не только отцифровывывать но и комфортно переходить из одного мира в другой.

Основой комфортной жизни между мирами и дополнительной опорой сдужит мир векторов. В котором есть своя алгебраическая и геометрическая сторона



Далее, алгебраическая сторона векторов позволяет создать совсем уж алгебраический образ вектора – координаты вектора. Тем самым окончательно перейти в алгебру. Самое смешное, что координаты вектора на математическом языке называются матрицей.

Сталкивались ли вы где то ещё в математике с подобной схемой. Сталкивались, но не осознавали этого.

Просто вместо векторного мира был мир тригонометрии. И когда вы решали треугольники, в переводили геометрический вопрос о величине угла в алгебраическое уравнение с помощью теорем тригонометрии.

И тригонометрические функции имели два лица.

Ведь синус с геометрической стороны – отношение противолежащего катета к гипотенузе, а с другой - ордината некоторой точки.

2. Схема.

Усложнённая концепция.

Векторы будут легко проникать в геометрические задачи, создавать их параллельное векторно-геометрическое описание, которое уже будет легко перевести сначала в векторно-алгебраический, а потом и в чисто алгебраический сюжет, то есть в координаты. Координаты вектора – это набор чисел, то есть алгебраический объект.

Аналогом мира векторов в фильме служит матрица, где у всех объектов есть два представления геометрическое и цифровое. Таким образом от алгебры к геометрии мы будем переходить не в один, а в 3 этапа.

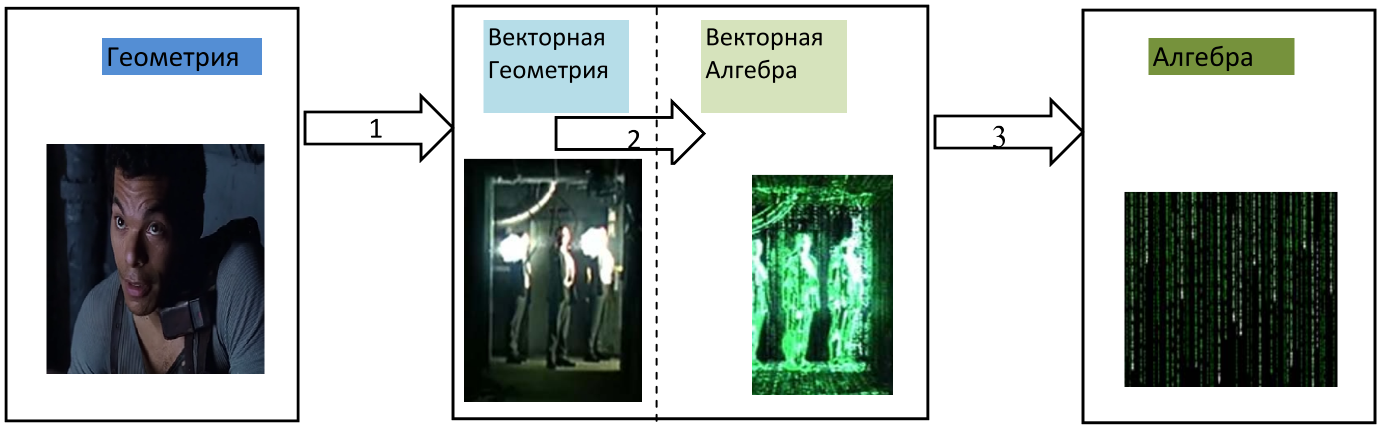


Схема решения задач с помощью векторов.

1) Геометрическое векторное описание.

В геометрическом чертеже мы воплощаем вектора и переформулирум исходную геометрическую задачу в задачу для векторов.

2) Алгебраическое векторное описание

Пользуясь геометрическим смыслом векторных операций, мы переформулируем задачу уже в алгебраическом виде, но ещё пока для векторов

3) Алгебраическое описание.

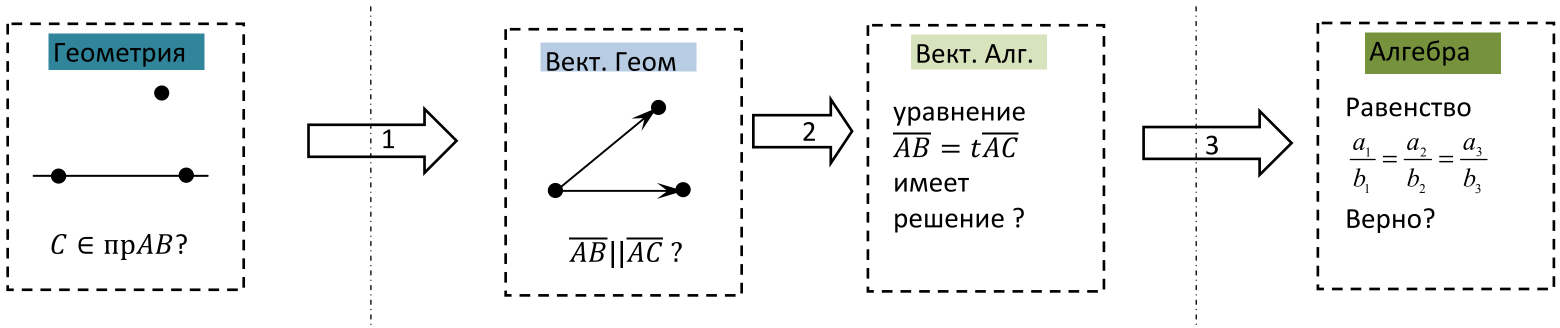
Перевод задачи в числовой алгебраический вид.

Для лучшего понимания технологического процесса приведём пример

Пример

Геометрическая задача. Лежат ли точки A, B, C на одной прямой?

Модельный пример решения геометрической задачи по векторной схеме



Итоги раздела

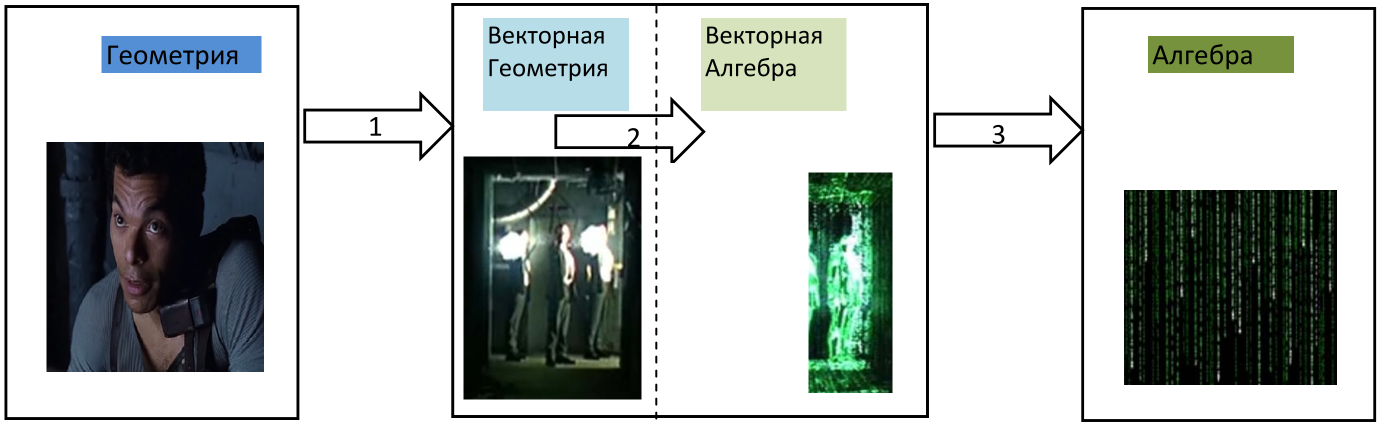
Основные усилия мы затратили в этом разделе на то, что бы неформально почувствовать, что же такое векторы и зачем они нужны. пункт 3 и 4 будет СХЕМЫ станут содержанием в практической части, которая в свою очередь упакована в 3 пакета.

Говоря кратко с их помощью мы переходим пропасть отделяющую алгебру от геометрии не сразу (что практически невозможно), а постепенно. За 3 шага. Мы не пытаемся развивать бурную деятельность в геометрии, делая дополнительные построения или что-то доказывая. Мы постепенно растворяем используемые объекты, пока они не превратятся в чисто цифровую субстванцию. И после этого одним щелчком добиваемся результата. Подчёркиваю, этот опыт постепенной трансформации объектов – новый для вас опыт. Что бы обратить на это внимание, мы использовали хужожественные аналогии.

Вопросная ??? пауза

Часть 2. Практические навыки

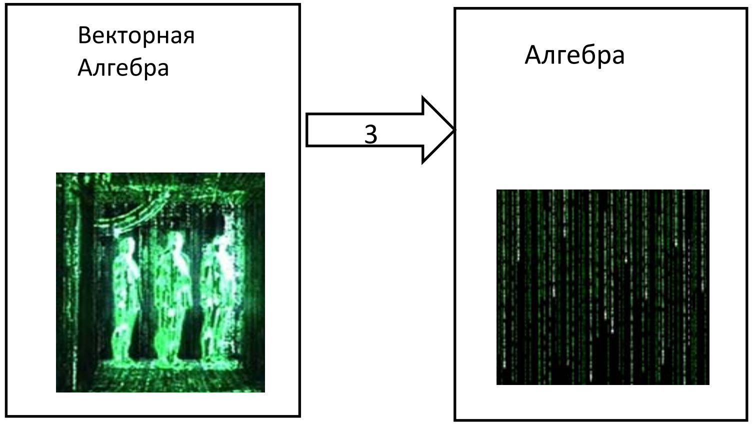
Структура практической части определяется нашей основной векторной схемой



Мы должны научиться проделовать каждый из шагов. Начнём с конца.

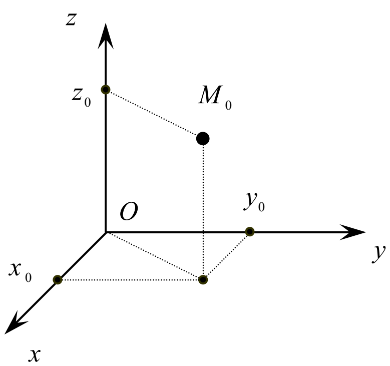
Раздел I:	Шаг 3
Раздел II	Шаг 2
Раздел III	Шаг 1 + отработка всей схемы.

I. Векторы и координаты



0. Вспомогательные понятия

Декартова система координат три взаимно перпендикулярные оси проходящие через выделенную точку, называемую началом координат.



<u>Опр</u> { (x_0, y_0, z_0) *– координаты точки* $M_0 \in E^3$ *в системе* $Oxyz$ } $\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = Пр_{Ox}^{A} M_0 \\ y_0 = Пр_{Oy}^{A} M_0 \\ z_0 = Пр_{Oz}^{A} M_0 \end{cases}$

[При этом пишут $M_0(x_0, y_0, z_0)$ или $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$]

С помощью СК мы кодируем точки пространства, то есть каждой из них сопоставляем упорядоченную тройку чисел по правилу. Но это не всё. Геометрические объекты такие как прямые плоскости кривые поверхности - это же ГМТ. Поэтому умея кодировать точку, мы умеем кодировать и все геометрические объекты.

Мы переводим геометрические объекты из юрисдикции геометрии под юрисдикцию алгебры. После оцифровки, они становятся доступнымидля алгебраических методов.

1. **Основа** (Координаты вектора)

У нас два основных объекта – точки и векторы. Если известны координаты концов, то координаты вектора кодируем по правилу:

Утв Пусть $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$,

Тогда $\overline{AB} = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ «из конца начало»

Это будем записывать так $\overline{AB} = B - A$.

Пр. $A(3,4,4)$, $B(5,2,7)$. Тогда $\overline{AB} = (5,2,7) - (3,4,4) = (2, -2,3)$

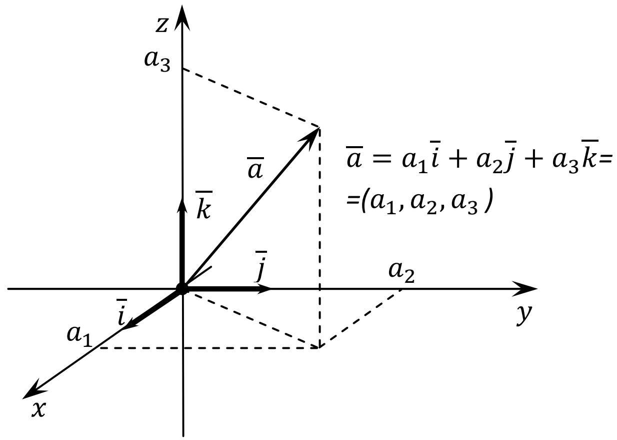
Зам. Вектор можно отложить от точки и получить другую точку. Будем это записывать так: $A + \overline{AB} = B$.

Альтернативный способ определения координат вектора.

Обозначим $\bar{\imath} = (1,0,0)$, $\bar{\jmath} = (0,1,0)$, $\bar{k} = (0,0,1)$. Представлять их живущими на координатных осях.

То те самые агенты Смит, Браун и Джонс из матрицы

Тогда $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$означает, что $\bar{a} = a_1\bar{\imath} + \ a_2\bar{\jmath} + \ a_3\bar{k}$ и наоборот.



Договоримся

Если точки мы всегда будем обозначать иролько большими латинскими уквами, то вектора – как большими так и малыми буквами.

Будем обозначать координаты вектора теми же маленькими буквами, что и вектор.

Пример. $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ $\overline{N} = (n_1, n_2, n_3)$

2. **Схема** (координаты вектора в моногограннике)

Нам придётся определять координаты векторов вообще, а векторов заданных с помощью многогранника.

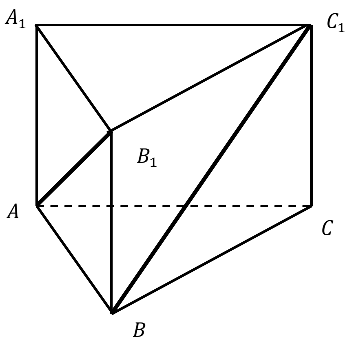
В этом случае нужно жействовать по следующей схеме.

Схема

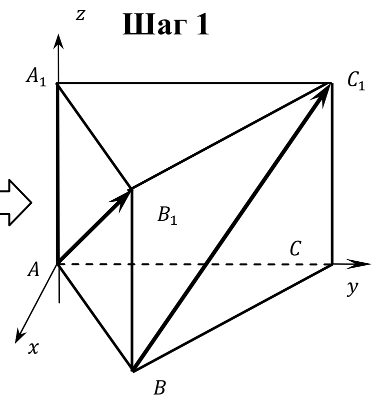
1) Ввводим удобную СК определяем нужные вектора
2) Определяем координаты нужных точек
3) Вычисляем координаты нужных векторов (вычитанием из координат конца координаты начала)

Пр

Исходный чертёж



Шаг 1



Шаг 2

$$A(0,0,0),$$
$$B_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right),$$
$$B\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$$
$$\mathrm{C}(0,1,1)$$

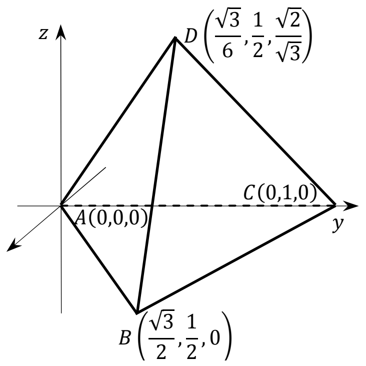
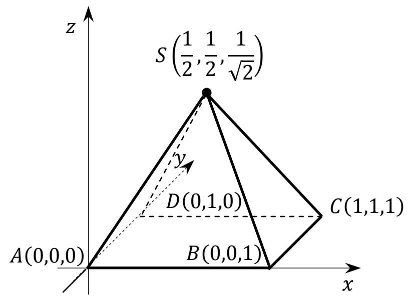
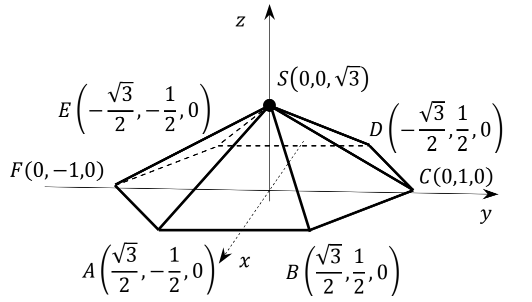
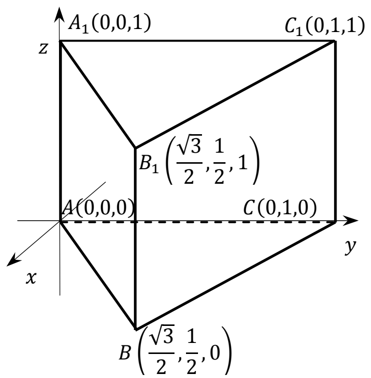
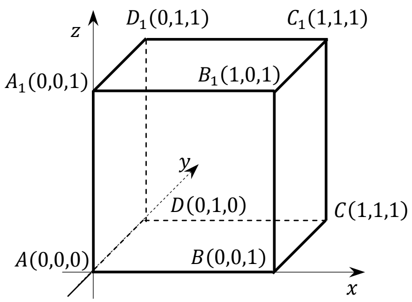
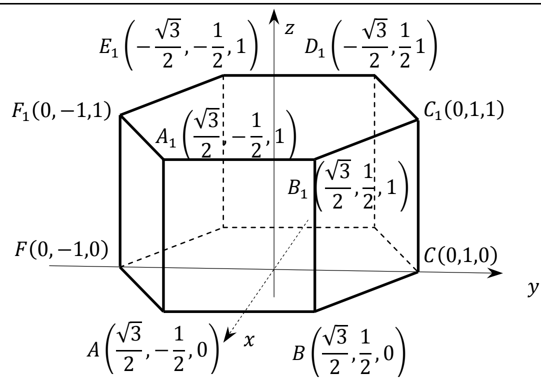
Шаг 3

$$\overline{AB_1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right) - (0,0,0) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right)$$
$$\overline{BC_1} = (0,1,1) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right) = \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},1\right)$$

3. **Основной навык** (Определение координат вершин различных многогранников)

В задачах С2 как правило используют многогранники нескольких стандартных типов. Это различные пирамидыа и призмы. Реже фигуры вращения такие как конус и цилиндр.

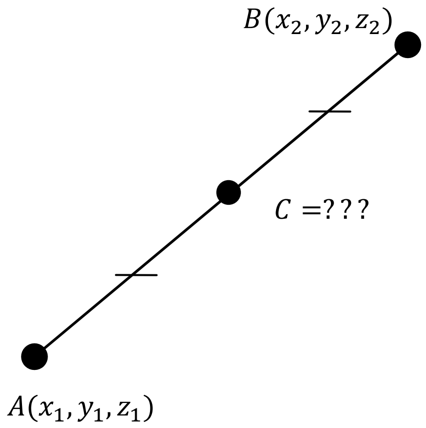
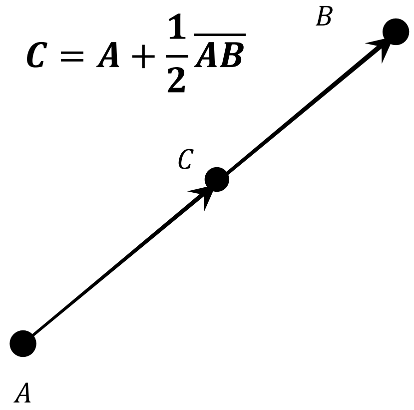
Проще всего заранее проработать их и запомнить то как вводить СК и какие при таком введении будут координаты вершин.
Я предлагаю следующий вариант кодировки вершин.

<table>
<tr><th>Координаты точек</th><th>треугольник</th><th>квадрат</th><th>шестиугольник</th></tr>
<tr><td>пирамида</td><td></td><td></td><td>$AS = 2, AB = 1$
</td></tr>
<tr><td>призма</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

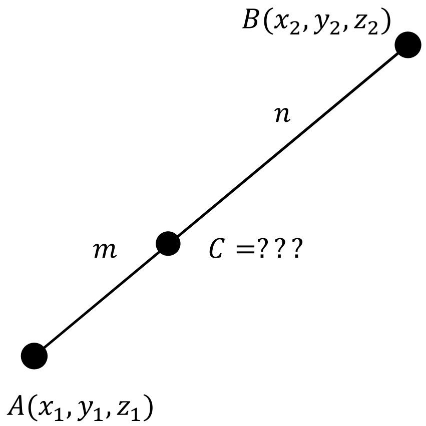
4. Специальный случай (деление отрезка в данном отношении)

Иногда требуется провести прямую или плоскость не через вершину, а через точку, которая делит ребро в отношении 2:3 или 3:1.

Для нахождения координат этих точек существуют специальные формулы, которые легко выводятся с помощью оперирования с векторами а) простейший случай

Середина отрезка	Векторная формула	Координаты середины отрезка
	$\boldsymbol{C = A + \frac{1}{2}\overline{AB}}$ 	$C = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$

Б) общий случай

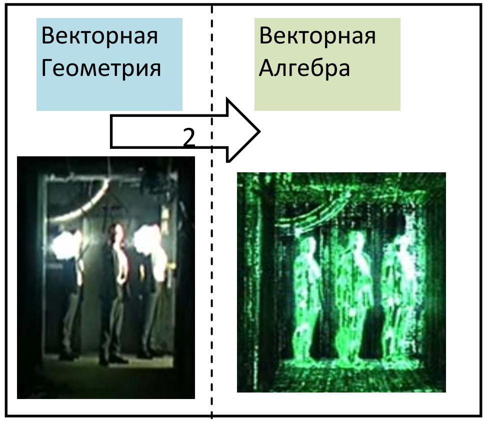
Деление отрезка в отношении $\boldsymbol{m}:\boldsymbol{n}$ считая от начала	Векторная формула	Координаты точки С
	$\boldsymbol{C = A + \frac{m}{m+n}\overline{AB}}$	$C = \left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n}, \frac{nz_1 + mz_2}{m+n}\right)$

Итоги раздела

В этом разделе мы выяснили как вычислять координаты вектора вообще и в многограннике в частности. Кроме того, мы теперь знаем не толко координаты вершин, но способны узнать координаты любой точки на любом ребре.

Вопросная ??? пауза

II. Вычисления с помощью произведений векторов.



Как перейти из зоны векторной геометрии в векторную алгебру?
Для этого мы изучим жизнь алгебраическую жизнь векторов более подробно.
Вектора оказывается могут не только складываться и умножаться, но и умножаться друг на друга. Причём умножаться двумя способами. И эти умножения имеют прямое отношение к тем геометрическим отношениям и характеристикам, которые мы бы хотели закодировать, но пока не можем. То есть к векторной геометрии.

0. Вспомогательные понятия (Определители)

Возможно, вы их изучали при знакомстве с системами. Кто изучал определители???

Опр { матрица - прямоугольная таблица чисел}

Если в матрице m строу и n столбцов, то она называется матрицей m на n.

Пр

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ - матрица 1 на 4 б) $B=\begin{pmatrix} 2 & -3 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ - квадратная матрица 3 порядка

в) Координаты вектора $\overline{a}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ – это матрица 1 на 3.

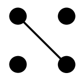
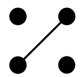
У любой квадратной матрицы есть числовая характеристика. Определитель. Обозначается он как модуль прямыми скобками, но берётся не от числа, а от матрицы.

Вычисляется опредлитель по формуле.

Определитель 2 порядка

Формула и геометрическое правило

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

(+)  **(-)** 

<u>Пр</u>

а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = 1 \cdot 10 - 3 \cdot 5 = 10 - 15 = -5$

б) $\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & -7 \end{vmatrix} = (-2)(-7) - 3(-4) = 14 + 12 = 26$

Определитель 3 порядка

Вычисление определителя 3 порядка сводится к вычислению определителя 2 порядка.

Зам (Формула для $\left|A_{3\times3}\right|$)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Пр

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1(3-7) - 2(-1-2) = -4 + 6 = 2$

б) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -4 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3(-1+6) + 2(4-3) - 1(-8+1) = 15 + 2 + 7 = 24$

1. Основа (Скалярное и векторное произведение)

Опр. Пусть

1) $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3), \bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$

Тогда

1) Скалярное произведение $(\bar{a}, \bar{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ (*)
2) Векторное произведение $[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \bar{\imath}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \bar{\jmath}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$ (**)

Договоримся

а) $(\bar{a}, \bar{a}) = \bar{a}^2$

б) $(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Пр

Пусть $\bar{a} = (2,1,-1), \bar{b} = (-1,0,3)$

тогда

$(\bar{a}, \bar{b}) = (2,1,-1) \cdot (-1,0,3) = -2 + 0 - 3 = -5$

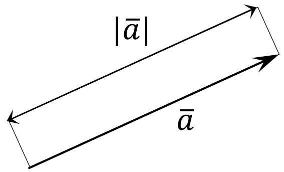
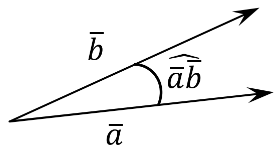
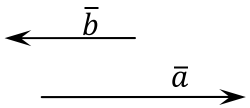
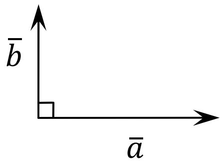
$\bar{a}^2 = (2,1,-1) \cdot (2,1,-1) = 4 + 1 + 1 = 6$

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \bar{i}(3-0) - \bar{j}(6-1) + \bar{k}(0+1) = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k} = (3,-5,1)$$

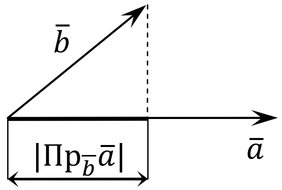
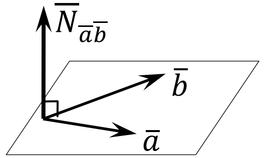
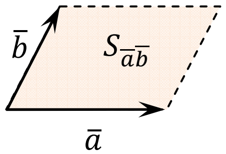
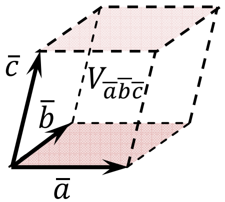
2. Схема (Геометрический смысл произведений)

Здесь мы наконец закодируем геометрические свойства и отношения, которые не поддавались кодировке. Слева стоят геометрические понятия, а справа те же понятия, но записанные через произведение векторов скалярное и векторное. А это значит, что с помощью формул $(*)$ и $(**)$ мы их можем закодировать уже в чисто цифровом виде.

Перевод векторной геометрии на язык векторной алгебры. Элементарные понятия.

№	Геометрическая ВА (характеристики, отношения)				Алгебраическая ВА
	название	обозначение	Язык геометрии		Язык операций
1.	Длина вектора $\bar{a}$	$\lvert\bar{a}\rvert$		=	$\lvert\bar{a}\rvert = \sqrt{(\bar{a},\bar{a})} = \sqrt{\bar{a}^2}$
2	Угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.	$\widehat{\bar{a}\bar{b}}$		=	$\widehat{\bar{a}\bar{b}} = \arccos\frac{(\bar{a},\bar{b})}{\sqrt{\bar{a}^2}\sqrt{\bar{b}^2}}$
3	Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ параллельны	$\bar{a}\vert\vert\bar{b}$		=	$[\bar{a},\bar{b}] = \bar{0}$
4	Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны	$\bar{a}\perp\bar{b}$		=	$(\bar{a},\bar{b}) = 0$

Перевод векторной геометрии на язык векторной алгебры. Простые понятия.

№	Векторная геометрия				Векиторная алгебра
	название	обозначение	Язык геометрии		Язык операций
5.	Длина проекции вектора $\bar{a}$ на $\bar{b}$.	$\lvert Пр_{\bar{b}}\bar{a}\rvert$		$=$	$\lvert Пр_{\bar{b}}\bar{a}\rvert = \dfrac{(\bar{a},\bar{b})}{\sqrt{\bar{a}^2}}$
6.	Вектор перпендикулярный векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$.	$\bar{N}_{\bar{a}\bar{b}}$		$=$	$\bar{N}_{\bar{a}\bar{b}} = t[\bar{a},\bar{b}]$
7.	Площадь параллелограмма построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.	$S_{\bar{a}\bar{b}}$		$=$	$S_{\bar{a}\bar{b}} = \sqrt{[\bar{a},\bar{b}]^2}$
8.	Объём параллелепиреда натянутого на векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$	$V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}$		$=$	$V_{\bar{a}\bar{b}\bar{c}} = \lvert([\bar{a},\bar{b}],\bar{c})\rvert =$ $= \lvert(\bar{a},\bar{b},\bar{c})\rvert$

3. Основной навык

а) Не путать модуль числа и модуль вектора.

Модуль числа – это число, которое вычисляется путём отбрасывания знака.

Модуль вектора – это его длина, то есть тоже число, которое вычисляется как корень из суммы квадратов координат.

б) проверка правильности вычисления векторного произведения.

Нужно результат скалярно умножать на 2 и 3 строчку. В обоих случаях должен получиться 0.

Пр

Пусть $\bar{a} = (2,1,-1), \bar{b} = (-1,0,3)$

тогда

$$[\bar{a},\bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \bar{i}(3-0) - \bar{j}(6-1) + \bar{k}(0+1) = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k} = (3,-5,1)$$

$(2,1,-1)(3,-5,1) = 6 - 5 - 1 = 0$

$(-1,0,3)(3,-5,1) = -3 + 0 + 3 = 0$

следовательно, $[\bar{a},\bar{b}]$ вычислили верно.

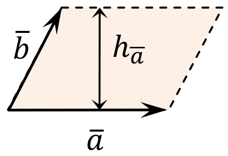
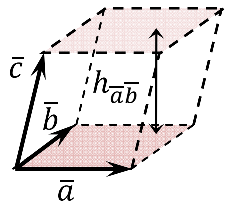
4. Специальные случаи

а) Для определения параллельности проще использовать другой критерий нежели $[\bar a, \bar b] = \bar 0$. А именно

$$\{\bar a = (a_1, a_2, a_3) \,||\, \bar b = (b_1, b_2, b_3) \neq \bar 0\} \Leftrightarrow \{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}\}$$

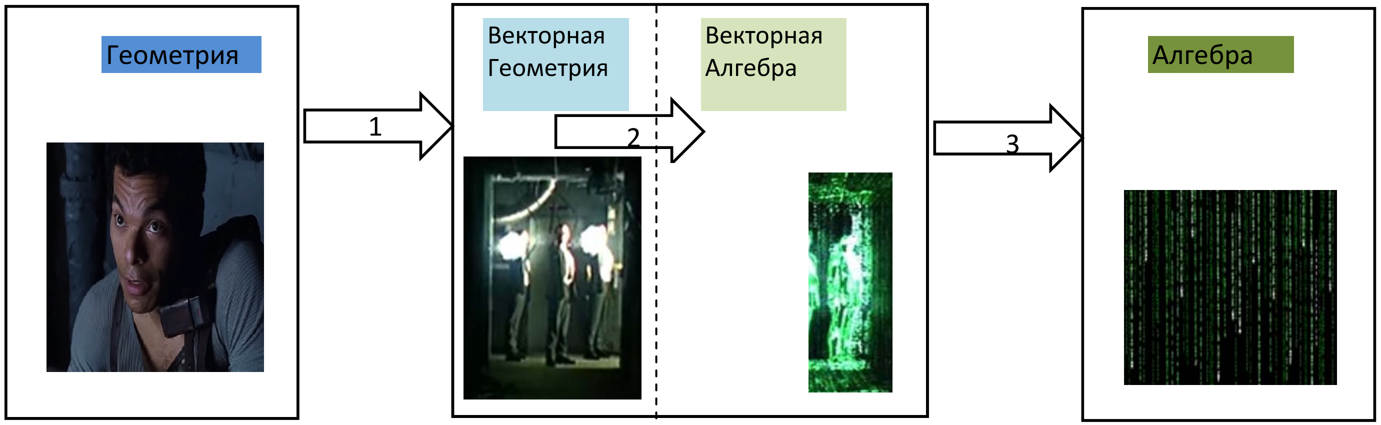
б) С помощью формулы 2 мы вычисляем $x = \cos\ \varphi$. Сам угол вычисляется по формуле $\varphi = \arccos x$. Если в задаче требуется вычислить $\sin\varphi$ или $\operatorname{tg}\varphi$, то используем тригонометрические формулы. Поэтому считаем, что для нас знание $\cos\ \varphi$ равноценно знанию самого угла φ и всех тригонометрических функции от φ.

в) Перевод векторной геометрии на язык векторной алгебры. Специальные понятия.

№	Векторная геометрия				Векторная алгебра
	название	обозначение	Язык геометрии		Язык операций
9.	Высота параллелограмма построенного на векторах $\bar a$ и $\bar b$ проведённая к $\bar a$.	$h_{\bar a}$		=	$h_{\bar a} = \frac{S_{\bar a \bar b}}{\lvert\bar a\rvert} = \frac{\lvert[\bar a, \bar b]\rvert}{\lvert\bar a\rvert}$
10.	Высота параллелепипеда натянутого на векторы $\bar a$, $\bar b$ и $\bar c$, проведённая к плоскости векторов $\bar a$, $\bar b$.	$h_{\bar a \bar b}$		=	$h^{\bar c}_{\bar a \bar b} = \frac{V_{\bar a \bar b \bar c}}{S_{\bar a \bar b}} = \frac{\lvert(\bar a, \bar b, \bar c)\rvert}{\lvert[\bar a, \bar b]\rvert}$

III. Решение метрических задач.

Вспомним нашу основную схему.



Мы изучили переход 3 и переход 2.

Теперь осталось сделать самое последнее научится делать переход, а с ним и всю цепочку действий.

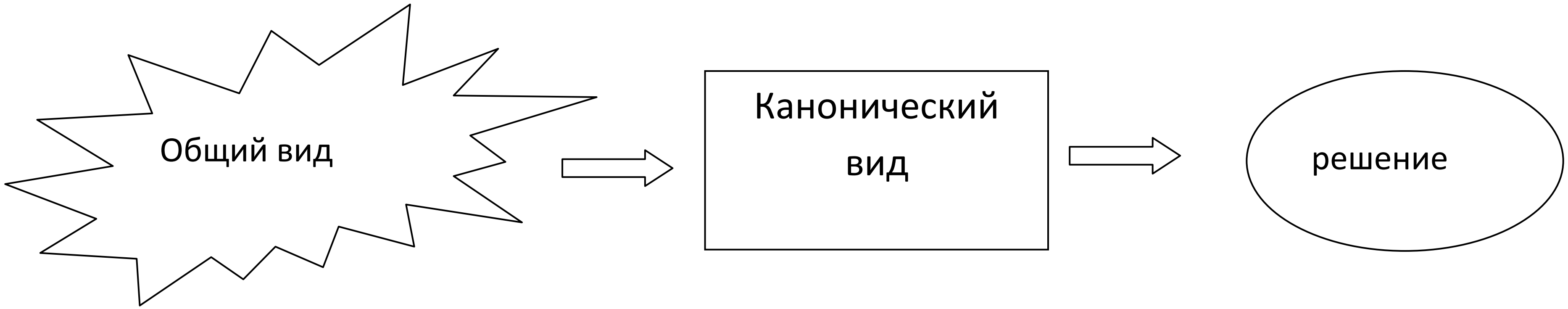
0. Вспомогательные понятия

а) **Каноническая задача.** Практически невозможно классифицировать все типы даже простейших задач. Слишком разнообразным способом можно задавать геометрические объекты. Но если фиксировать некоторый канонический способ задания входных данных, то решение задач всех типов вполне можно описать.

Для алгебры это обычная практика. Ведь вы изучаете формулу решения квадратного уравнения только для вида $ax^2 + bx + c = 0$. А если вам попался другой вид, то вы его преобразовываете к каноническому, а потом решаете. Более того, использование практически любой схемы или формулы подразумевает решение в два этапа.

1этап. Приведение данных в канонический вид

2 этап. Применение схемы.



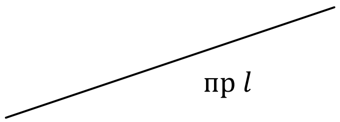
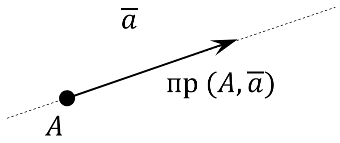
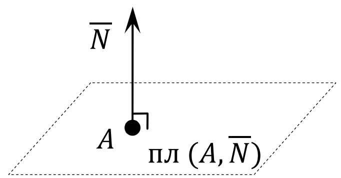
Поэтому мы держа в уме эту схему, будем писать формулы не для всевозможные задачи всевозможных типов, а только канонические видов всевозможных задач.

б) **Каноническое представление прямой и плоскости**

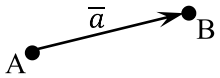
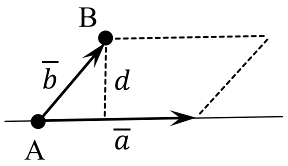
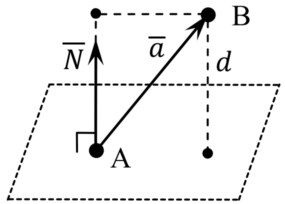
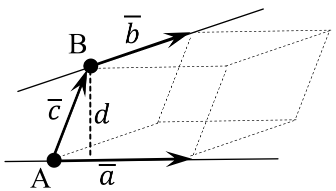
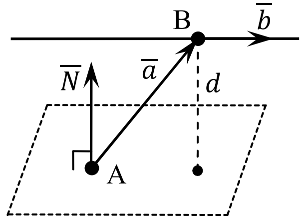
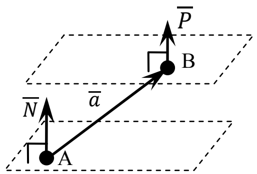
Если в геометрии прямая и плоскость неопределяемые понятия и элементарные объекты, то в мире векторов это комбинированные объекты.

Прямая = точка + направляющий вектор

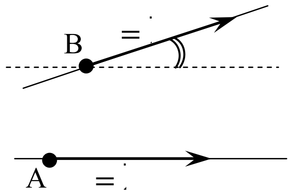
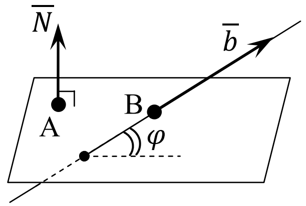
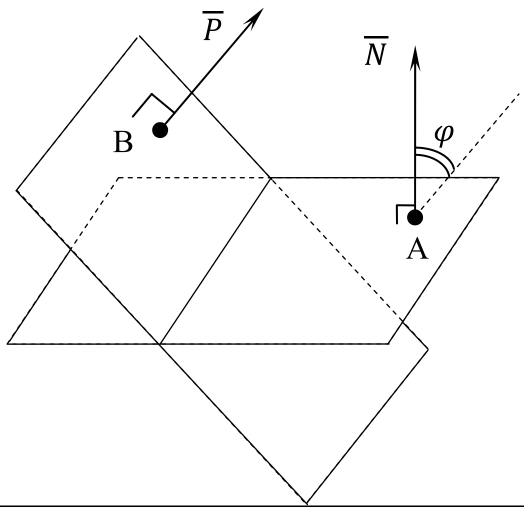
Плоскость = точка + нормальный вектор.

Объект	В геометрии	В векторном мире
Прямая		
Плоскость		

1. **Основа** (Таблицы канонических задач на расстояние)

d	**Точка A**	***пр*** $(\boldsymbol{A}, \bar{\boldsymbol{a}})$	***пл*** $(\boldsymbol{A}, \bar{\boldsymbol{N}})$
точка B	**I.** $d = d(A,B)$  1) $\bar a = B - A$ 2) $d = \lvert\bar a\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$	**II**. $d = d(\text{пр}\ (A,\bar a), B)$  1) $\bar b = B - A$, 2) $\lvert\bar a\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ 3) $[\bar a, \bar b] = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \bar s$ 4) $S_{\bar a \bar b} = \lvert\bar s\rvert = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}$ 5) $d = h_{\bar a} = \frac{S_{\bar a \bar b}}{\lvert\bar a\rvert}$	**III**. $d = d(\text{пл}\ (A, \bar N), B)$  1) $\bar a = B - A$, 2) $(\bar N, \bar a) = n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3$ 3) $\lvert\bar N\rvert = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$ 4) $d = \lvert\text{Пр}_{\bar N} \bar a\rvert = \frac{\lvert(\bar N, \bar a)\rvert}{\lvert\bar N\rvert}$
пр $(\boldsymbol{B}, \bar{\boldsymbol{b}})$		**IV**. $d = d(\text{пр}\ (A, \bar a), \text{пр}\ (B, \bar b))$ **Случай 1.** $\bar a \parallel \bar b$ $\left(\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}\right)$ $d = d(\text{пр}\ (A, \bar a), B)$ см. **II** **Случай 2.** $\bar a \nparallel \bar b$  1) $\bar c = B - A$ 2) $[\bar a, \bar b] = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \bar s$ 3) $S_{\bar a \bar b} = \lvert\bar s\rvert = \sqrt{s_1^2 + s_2^2 + s_3^2}$ 4) $V_{\bar a \bar b \bar c} = \lvert(\bar s, \bar c)\rvert = \lvert s_1 c_1 + s_2 c_2 + s_3 c_3\rvert$ 5) $d = h^{\bar c}_{\bar a \bar b} = \frac{V_{\bar a \bar b \bar c}}{S_{\bar a \bar b}}$	**V.** $d = d(\text{пл}\ (A, \bar N), \text{пр}\ (B, \bar b))$ **Случай 1.** $\bar N \perp \bar b (n_1 b_1 + n_2 b_3 + n_3 b_3 = 0)$  $d = d(\text{пл}\ (A, \bar N), B)$ см. III 1) $\bar a = B - A$ 2) $d = \lvert\text{Пр}_{\bar N} \bar a\rvert = \frac{\lvert(\bar N, \bar a)\rvert}{\lvert\bar N\rvert}$ **Случай 2.** $\widehat{\bar a \bar b} \neq \frac{\pi}{2}$, $d = 0$
пл $(\boldsymbol{B}, \bar{\boldsymbol{P}})$			**VI.** $d = d(\text{пл}(A, \bar N), \text{пл}\ (B, \bar P))$ **Случай 1.** $\bar N \parallel \bar P$ $\left(\frac{n_1}{p_1} = \frac{n_2}{p_2} = \frac{n_3}{p_3}\right)$  $d = d(\text{пл}\ (A, \bar N), B)$ см. **III** 1) $\bar a = B - A$ 2) $d = \lvert\text{Пр}_{\bar N} \bar a\rvert = \frac{\lvert(\bar N, \bar a)\rvert}{\lvert\bar N\rvert}$ **Случай 2.** $\bar N \nparallel \bar P$, тогда $d = 0$

Канонические задачи на вычисление углов.

$\boldsymbol{\varphi}$	***пр*** $(\boldsymbol{A},\overline{\boldsymbol{a}})$	***пл*** $(\boldsymbol{A},\overline{\boldsymbol{N}})$
пр $(\boldsymbol{B},\overline{\boldsymbol{b}})$	**I.** $\varphi = \varphi(\boldsymbol{np}(\boldsymbol{A},\overline{\boldsymbol{a}}), \text{пр}\left(\boldsymbol{B},\overline{\boldsymbol{b}}\right))$.  1) $\lvert\overline{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, $\lvert\overline{b}\rvert = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$, 2) $\lvert(\overline{a},\ \overline{b})\rvert = \lvert a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\rvert$ 3)$\cos\varphi = \left\lvert\cos\widehat{\overline{a}\overline{b}}\right\rvert = \frac{\lvert(\overline{a},\overline{b})\rvert}{\lvert\overline{a}\rvert\lvert\overline{b}\rvert}$	**II.** $\varphi = \varphi(\boldsymbol{пл}\left(\boldsymbol{A},\overline{\boldsymbol{N}}\right), \text{пр}\ (\boldsymbol{B},\overline{\boldsymbol{b}}))$  1) $\lvert\overline{b}\rvert = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$, $\lvert\overline{N}\rvert = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$, 2) $\lvert(\overline{b},\ \overline{N})\rvert = \lvert b_1n_1 + b_2n_2 + b_3n_3\rvert$ 3) $\sin\varphi = \left\lvert\cos\widehat{\overline{b}\overline{N}}\right\rvert = \frac{\lvert(\overline{b},\overline{N})\rvert}{\lvert\overline{b}\rvert\lvert\overline{N}\rvert}$
пл $(\boldsymbol{B},\overline{\boldsymbol{P}})$		**II.** $\varphi = \varphi(\boldsymbol{пл}\left(\boldsymbol{A},\overline{\boldsymbol{N}}\right), \text{пл}\ (\boldsymbol{B},\overline{\boldsymbol{P}}))$  1) $\lvert\overline{P}\rvert = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$, $\lvert\overline{N}\rvert = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$, 2) $\lvert(\overline{P},\ \overline{N})\rvert = \lvert p_1n_1 + p_2n_2 + p_3n_3\rvert$ 3) $\cos\varphi = \left\lvert\cos\widehat{\overline{P},\overline{N}}\right\rvert = \frac{\lvert(\overline{P},\overline{N})\rvert}{\lvert\overline{P}\rvert\lvert\overline{N}\rvert}$

2. Схема (Решение метрических задач)

Мы получаем данные в чисто геометрическом виде и движемся к их отцифровке, что бы в итоге вставить в одну из конечных формул Движение к оцифровке происходи шаг за шагом.

0) Условия, чертёж и СК
1) тип задачи, рисунки и необходимые данные (всё что нужно, что бы забыть о чертеже)
2) Канонические данные (данные необходимые для подствновки в окончательную формулу. Забываем о данных п1).
3) Формула, подстановка в формулу, ответ.

Решение удобно предстваить в виде таблицы. Это даст одну из возможных шаблонов оформления задачи. Ведь наверняка у вас с оформлением проблемы. Эту таблицу будем называть протоколом. Верхняя строчка относится к дано, а нижняя к найти.

Протокол решения метрических задач

Текст задачи	0. Условия, чертёж и СК	
	Дано **Найти**	Чертёж
1. Тип задачи, рисунок и необходимые данные	2. Канонические данные	3. Формула, подстановка, ответ
Тип Геометрический вид | Канонический вид Исходные данные		ОСНОВНАЯ ФОРМУЛА ПОДСТАНОВКА **Ответ:**

3. Основные навыки

Вычисление ортогонального вектора для плоскости заданной тремя точками

Дано

пл ABC

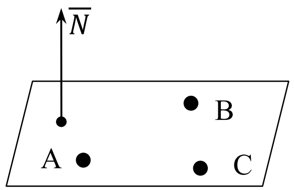
$A(x_1, y_1, z_1)$,

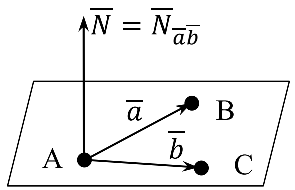
$B(x_2, y_2, z_2)$

$C(x_3, y_3, z_3)$

Найти

Координаты нормального вектор $\overline{N}$ пл ABC





Решение

1) $\overline{a} = \overline{AB} = B - A,\ \overline{b} = \overline{AC} = C - A$
2) $\overline{N} = \overline{N}_{\overline{a}\overline{b}} = t[\overline{a}, \overline{b}]$, например при $t = 1$

$$\overline{N} = [\overline{a}, \overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \overline{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$$

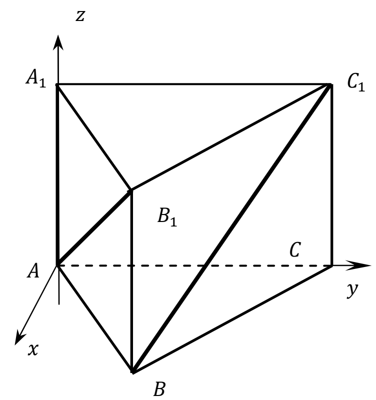
(n_1, n_2, n_3)

4. Специальные случай

а) В задачах на вычислении углов, координаты опорных точек не используются, поэтому в канонические данные их не включают.

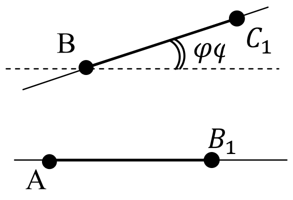
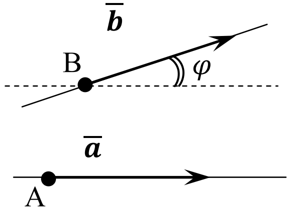
б) Если вы подозреваете, что данный вектор $\overline{N}$ перпендикулярен к плоскости ABC, то для доказательства этого достаточно проверить, два равенства. $\begin{cases} (\overline{N}, \overline{AB}) = 0 \\ (\overline{N}, \overline{AC}) = 0 \end{cases}$.

Пример 1

Текст задачи	0. Условия, чертёж и СК
В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.	**Дано** $ABCA_1B_1C_1$ - правильная треугольная призма. Все рёбра равны 1. **Найти** $\cos\varphi(\text{пр } AB_1, \text{пр} BC_1)$ 

1. Тип задачи, рисунок и необходимые данные

Тип $\boldsymbol{\varphi}$.I

Геометрический вид	Канонический вид
	

Исходные данные

$A = (0,0,0)$, $B = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

$B_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ $C_1 = (0,1,1)$

2. Канонические данные

$\overline{a} = \overline{AB_1} = B_1 - A =$

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) - (0,0,0) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$

$\overline{b} = \overline{BC_1} = C_1 - B =$

$(0,1,1) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$

3. Формула, подстановка, ответ

$$\cos\varphi = \frac{\left|(\overline{a},\ \overline{b})\right|}{|\overline{a}||\overline{b}|}$$

$|\overline{a}| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{2}$

$|\overline{b}| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{2}$

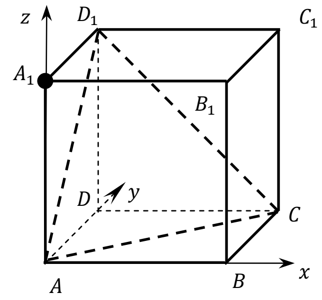
$|(\overline{a}, \overline{b})| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot 1\right| =$

$= \left|-\frac{3}{2} + \frac{1}{4} + 1\right| = \frac{1}{2}$

$\cos\varphi = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{4}$

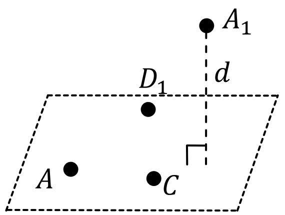
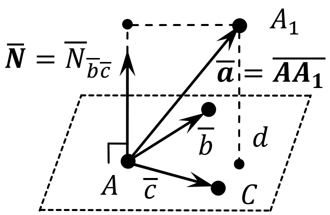
Ответ: $\cos\varphi = \frac{1}{4}$

Пример 2.

Текст задачи	0. Условия, чертёж и СК
В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, с ребром найдите расстояние от вершины A_1 до плоскости $A\,D_1C$.	**Дано** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб с ребром 1. **Найти** $d(A_1\,, \text{пл}AD_1C\,)$ 

1. Тип задачи, рисунок и необходимые данные

Тип $\boldsymbol{d}$.III

Геометрический вид	Канонический вид
	

Исходные данные

$A = (0{,}0{,}0)$, $\quad C = (1{,}1{,}0)$

$D_1 = (0{,}1{,}1)$ $\quad A_1 = (0{,}0{,}1)$

2. Канонические данные

$\boldsymbol{\overline{a}} = \overline{AA_1} = A_1 - B = (0{,}0{,}1) - (0{,}0{,}0) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$

$\overline{b} = \overline{AD_1} = D_1 - A = (0{,}1{,}1) - (0{,}0{,}0) = (0{,}1{,}1)$

$\overline{c} = \overline{AC} = C - A = (1{,}1{,}0) - (0{,}0{,}0) = (1{,}1{,}0)$

$\boldsymbol{\overline{N}} = \overline{N}_{\overline{b}\overline{c}} = t[\overline{b}, \overline{c}]$

$[\overline{b}, \overline{c}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \overline{i}(0-1) - \overline{j}(0-1) + \overline{k}(0-1) =$
$-\overline{i} + \overline{j} - \overline{k} = (-1{,}1,-1)$

$\boldsymbol{\overline{N}} = (\mathbf{1}, -\mathbf{1}, \mathbf{1})$

Зам *Нетрудно доказать, что* $\overline{N} = \overline{DB_1}$. *Это избавляет нас от вычисления* $[\overline{b}, \overline{c}]$.

3. Формула, подстановка, ответ

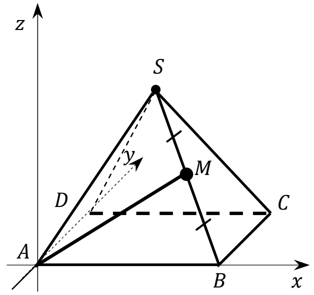
$$d = |\text{Пр}_{\overline{N}}\overline{a}| = \frac{|(\overline{N}\,, \overline{a})|}{|\overline{N}|}$$

$|(\,\overline{N}, \overline{a})| = |(1,-1{,}1)\cdot(0{,}0{,}1)| =$
$|0+0+1| = 1$
$|\overline{N}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

$$d = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

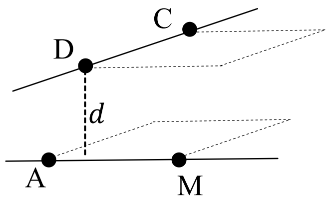
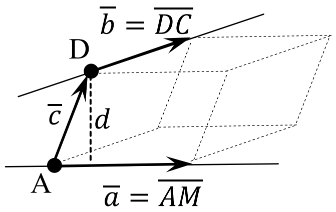
Ответ: $d = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Пример 3

Текст задачи	0. Условия, чертёж и СК
В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, все рёбра которой равны 1, точка M делит ребро SB пополам. Найти расстояние между прямой AM и.	**Дано** $SABCD$ пирамида со всеми рёбрами 1. M середина SB **Найти** $d(\text{пр}AM, \text{пр}CD)$ 

1. Тип задачи, рисунок и необходимые данные

Тип $\boldsymbol{d}$.IV

Геометрический вид	Канонический вид
	

Исходные данные

$A = (0,0,0)$, $B = (1,0,0)$

$C = (1,1,0)$

$D = (0,1,0)$

$$S = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$M = \frac{B+S}{2} = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

2. Канонические данные

$\boldsymbol{\overline{a}} = \overline{AM} = M - A = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) - (0,0,0) = \left(\boldsymbol{\frac{3}{4}}, \boldsymbol{\frac{1}{4}}, \boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\right)$

$\boldsymbol{\overline{b}} = \overline{DC} = C - D = (1,1,0) - (0,1,0) = (\boldsymbol{1}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$

$\boldsymbol{\overline{c}} = \overline{AD} = D - A = (0,1,0) - (0,0,0) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}, \boldsymbol{0})$

3. Формула, подстановка, ответ

$$d = h_{\overline{a}\overline{b}}^{\overline{c}} = \frac{V_{\overline{a}\overline{b}\overline{c}}}{S_{\overline{a}\overline{b}}} = \frac{\left|\left([\overline{a}, \overline{b}], \overline{c}\right)\right|}{\left|[\overline{a}, \overline{b}]\right|}$$

$$[\overline{a}, \overline{b}] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \overline{i}(0-0) - \overline{j}\left(0 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \overline{k}\left(0 - \frac{1}{4}\right) = 0 \cdot \overline{i} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\overline{j} - \frac{1}{4}\overline{k} = \left(0, \frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{4}\right)$$

$$\left|[\overline{a}, \overline{b}]\right| = \sqrt{0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\left|\left([\overline{a}, \overline{b}], \overline{c}\right)\right| = \left|\left(0, \frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{4}\right) \cdot (0,1,0)\right| = \left|0 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + 0\right| = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$d = \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \div \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Ответ: $d = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

Пример 4

Текст задачи

В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, боковые рёбра которой равны 2, а стороны основания 1, найдите косинус угла между прямой AC и плоскостью SAF.

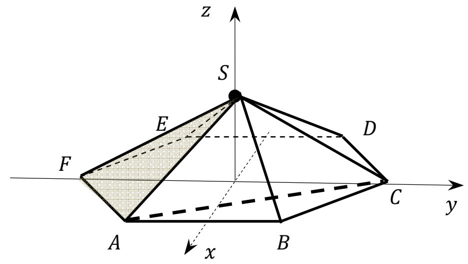
1. Условия, чертёж и СК

Дано

$SABCDEF$ - правильная треугольная прамида.
Стороны основания равны 1.
Боковые рёбра равны 2.

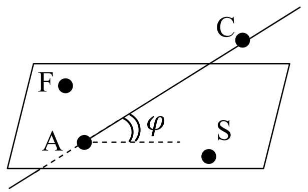
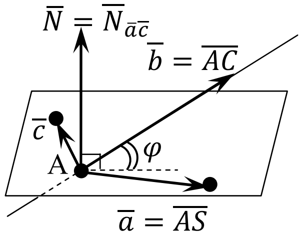
Найти

$\cos\varphi(\text{пр}AC, \text{пл}SAF)$



1. Тип задачи, рисунок и необходимые данные

Тип φ.2

Геометрический вид	Канонический вид
	

Исходные данные

$A\left(\frac{\sqrt3}{2}, -\frac12, 0\right)$

$F = (0,-1,0)$

$S(0,0,\sqrt3)$

$C = (0,1,0)$

2. Канонические данные

$\bar a = \overline{AS} = S - A =$

$(0,0,\sqrt3) - \left(\frac{\sqrt3}{2}, -\frac12, 0\right) = \left(-\frac{\sqrt3}{2}, \frac12, \sqrt3\right)$

$\bar{\boldsymbol b} = \overline{AC} = C - A =$

$(0,1,0) - \left(\frac{\sqrt3}{2}, -\frac12, 0\right) = \left(-\frac{\sqrt{\mathbf 3}}{\mathbf 2}, \frac{\mathbf 3}{\mathbf 2}, \mathbf 0\right)$

$\bar c = \overline{AF} = F - A =$

$(0,-1,0) - \left(\frac{\sqrt3}{2}, -\frac12, 0\right) = \left(-\frac{\sqrt3}{2}, -\frac12, 0\right)$

$\bar N = \bar N_{\overline{ac}} = t[\bar a, \bar c]$

$$[\bar a, \bar c] = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ -\frac{\sqrt3}{2} & \frac12 & \sqrt3 \\ -\frac{\sqrt3}{2} & -\frac12 & 0 \end{vmatrix} = \bar i\left(0 + \frac{\sqrt3}{2}\right) - \bar j\left(0 + \frac32\right) +$$

$$\bar k\left(\frac{\sqrt3}{4} + \frac{\sqrt3}{4}\right) = \frac{\sqrt3}{2}\bar i - \frac32\bar j + \frac{\sqrt3}{2}\bar k = \left(\frac{\sqrt3}{2}, -\frac32, \frac{\sqrt3}{2}\right)$$

$\bar{\boldsymbol N} = \frac{2}{\sqrt3}[\bar a, \bar c] = (\mathbf 1, -\sqrt{\mathbf 3}, \mathbf 1)$

3. Формула, подстановка, ответ

$$\sin\varphi = \left|\cos\widehat{\bar b\bar N}\right| = \frac{\left|(\bar b,\ \bar N)\right|}{|\bar b||\bar N|}$$

$|\bar N| = \sqrt{1+3+1} = \sqrt5$

$|\bar b| = \sqrt{\frac34 + \frac94 + 0} = \sqrt3$

$\left|(\bar N, \bar b)\right| = \left|\left(-\frac{\sqrt3}{2}, \frac32, 0\right)\cdot(1, -\sqrt3, 1)\right| =$

$= \left|-\frac{\sqrt3}{2} - \frac{3\sqrt3}{2} + 0\right| = \frac{4\sqrt3}{2} = 2\sqrt3$

$\sin\varphi = \frac{2\sqrt3}{\sqrt3\cdot\sqrt5} = \frac{2}{\sqrt5}$

$\cos\varphi = \sqrt{1 - \sin^2\varphi} = \sqrt{1 - \frac45} =$

$\frac{1}{\sqrt5} = \frac{\sqrt5}{5}$

Ответ: $\cos\varphi = \frac{\sqrt5}{5}$

Итог раздела

Мы разработали нашу технологию до конца и в этом раздели пришли к окончательному результату – универсальной технологии решения задач типа С2. Основа метода – таблица решений канонических задач. На математическом языке это называется дать полную классификацию задач рассматриваемого типа.

Что бы научится пльзоваться этой таблице, конечно, нужно время, но и для того, что бы выучить таблицу умножения так же нужно время. Но это вопрос тренировки и настойчивости, а не проблема непонимания.

Вопросная ??? пауза

Заключение

Что мы сделали? Мы изучили альтарнативный способ решения геометрических задач типа С2.

Конечно я не расчитываю, что вы всё сразу поняли. Но прелесть этой формы в том, что эту лекцию вы можете теперь сами скачать из интернета и проработать самостоятельно.

Прослушав лекцию до конца вы наверное заметили, что этот метод правильнее назвать не не просто координатным, а координатно векторным. Потому что именно опора на мир свободных векторов, на двойственную природу этого мира, позволила нам не просто сформулировать, но и понять всю технологию.

На протяжении всей лекции мы объединяли алгебру и геометрию. Сшивали, сваривали её с помощью векторов. По окончании лекции я надеюсь вы почувствовали, что при углублии в математику единство алгебры и геометрии становится всё более и более явным. Это единство играет важную роль в методах решения задачи С5. При этом, если в С2 мы используем алгебру для решения геометрических задач, то в задаче С5 наоборот геометрию, то есть графики, используют в решении алгебраической задачи.

При объяснении материала использовалась 4 ступенчатая схема схема осмысления, а так же мы опирались на интуитивную базу, которую нам дал фильм матрица. Надеюсь это иприёмы помогут вам в решении великой проблемы по систематизации собственного мышления.

У меня всё. Какие будут вопросы?

Вопросная ??? пауза

Если у вас тоже всё, то наше с вами интернет-общение подошло к концу.

Мне было приятно с вами работать

Спасибо за внимание и активное участие.

До свидания.