

ИННОВАЦИОННЫЕ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ
В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ

УДК 519.6

**ЭЛЕКТРОННЫЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ СРЕДСТВА:
НОВЫЕ ИДЕИ***

В. В. Воеводин¹, Вл. В. Воеводин²

¹ *Институт вычислительной математики РАН,
Россия, 119991, г. Москва ГСП-1, ул. Губкина, 8;
тел.: (095) 9381769; e-mail: vvv@parallel.ru*

² *Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ,
Россия, 119992, г. Москва, Воробьевы горы;
тел.: (095) 9395424; e-mail: vvv@parallel.ru*

В статье обсуждается опыт создания образовательных средств в двух разделах математики: линейная алгебра и параллельные вычисления. Подчеркивается необходимость создания иерархических комплектов средств и обеспечения взаимозаменяемости средств на бумажных и электронных носителях. Для электронных образовательных средств обсуждаются новые идеи построения, основанные на глубокой структуризации материала и введения на нем причинно-следственных отношений.

Ключевые слова: электронные образовательные средства, линейная алгебра, параллельные вычисления, структуризация материала, информационный граф.

В настоящее время российское образование вступает на качественно новый уровень: решается задача массового использования компьютерных и информационных технологий в общем и профессиональном образовании. Рассматривается проблема создания в России единой для всех образовательных учреждений информационной среды. Многое будет зависеть от того, чем наполняется эта среда.

Информационная среда имеет много составляющих: компьютеры, линии связи, обслуживающее программное обеспечение, правила и умение работать в среде и многое другое. Но, возможно, самая главная составляющая, если иметь в виду именно образование, — это электронное представление собственно учебного материала.

Анализ ситуации показывает весьма неутешительное положение. Основные усилия российских разработчиков в области информатизации образования направлены сейчас на прокладку сетей, создание различного рода порталов, разработку общей концепции, закупку оборудования. Безусловно, вся эта деятельность необходима. Однако заметим, что от нее мало зависит состав и тем более структура учебного материала. Поэтому разработку электронных вариантов образовательных средств можно и нужно вести, не дожидаясь окончания этой деятельности.

* Статья подготовлена по материалам Второй Международной конференции “Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования”, приуроченной к 80-летию члена-корреспондента РАН профессора Л. Д. Кудрявцева.

Тем не менее пока такая работа в России идет достаточно вяло. Это проявляется, в частности, в том, что среди общедоступных электронных образовательных средств (учебники, задачки, справочники, энциклопедии и т. п.) доля российских средств по сравнению с зарубежными невелика. Если предположить, что техническое и концептуальное обеспечение информатизации в России будет в ближайшее время сформировано, но ситуация с собственными электронными образовательными средствами радикально не изменится, то российское образование неизбежно окажется под сильным влиянием зарубежных образовательных средств.

Зарубежные образовательные средства часто носят справочно-рецептурный характер. Такие средства не дают возможность изучать предмет глубоко и, следовательно, не очень полезны для подготовки высококлассных специалистов. К тому же, если материал не содержит очень большого числа рисунков, схем, таблиц, фотографий и другого изобразительного материала, то характер электронного изложения мало чем отличается от книжного. Все недостатки подобного подхода к построению электронных образовательных средств хорошо видны на примере математических наук, изучаемых в высших учебных заведениях, причем в тех вузах, где математическое образование является профилирующим.

В настоящей статье мы расскажем о некотором опыте создания электронных образовательных средств в области математики, точнее, в двух её разделах: линейная алгебра и параллельные вычисления. Выбор разделов и поставленных целей объясняется следующими соображениями.

Математическое профессиональное образование — одно из наиболее ярких достижений российской высшей школы. Однако в современных условиях приходится прилагать немало усилий, чтобы сохранить завоеванные позиции. Как и образование в целом, математика оказалась под жестким давлением времени. Развитие науки заставляет вводить в процесс обучения новые дисциплины. Из-за этого сокращаются и делаются более поверхностными основные математические курсы. Сама математика развивается сейчас настолько бурно, что основные её достижения не удастся отразить даже в специальных курсах. При этом образовательные средства в математике практически не меняются в течение многих десятилетий: те же лекции, семинары, экзамены, контрольные и т. п. По существу основными носителями знаний по-прежнему являются преподаватель и книга. Естественно возникает вопрос: «Как сделать доступ к профессиональным математическим знаниям более эффективным?»

Линейная алгебра и параллельные вычисления представляют в некотором смысле полярные разделы математики. Линейная алгебра является одним из самых устоявшихся её разделов, по крайней мере, в базовой части. За последние три-четыре десятилетия содержание курсов по линейной алгебре меняется очень мало. Если проанализировать изданные за этот период учебники и учебные пособия, то нетрудно заметить, что они мало чем отличаются друг от друга. Несколько меняется терминология, меняется порядок изложения материала, меняются акценты. Но в целом объем излагаемого материала остается почти одним и тем же. Различные варианты учебников и

учебных пособий скорее отражают различия во взглядах авторов на характер изложения материала, чем различия в объемах описываемых знаний. Ясно, что на пути подобных модификаций курсов нельзя существенно улучшить уровень усвоения материала. Многолетний опыт работы с молодыми специалистами говорит о том, что даже выпускники элитных вузов, в которых математика является профилирующей областью знаний, имеют весьма посредственные знания по линейной алгебре. Но ведь линейная алгебра является основой всей прикладной математики, и без хорошего её знания трудно решить качественно любую более или менее сложную прикладную задачу.

Параллельные вычисления — это относительно новый, но бурно развивающийся раздел математики. Несколько десятилетий назад к нему имело какое-то отношение лишь небольшое число узких специалистов. Однако сейчас, когда суперкомпьютеры, кластеры и распределенные вычисления стали необходимым элементом решения сложных прикладных задач в самых различных областях, с параллельными вычислениями вынуждены знакомиться очень многие. Остро встает вопрос о формах преподавания данного раздела и его содержании. Ситуация меняется настолько быстро, что сложности возникают даже на стадии выбора базовой части знаний. Много из того, что необходимо было знать еще три-пять лет назад, в настоящее время уже устаревает и перестает быть актуальным.

Сравнение линейной алгебры и параллельных вычислений, двух разделов математики, показывает следующее. В линейной алгебре базовая часть знаний установилась и является весьма обширной. Новые знания появляются в большом количестве, но они практически никак не затрагивают базовую часть. В параллельных вычислениях установившаяся базовая часть относительно невелика. Новые знания здесь появляются еще в большем количестве, что во многом определяется их зависимостью от уровня развития вычислительной техники. По мере осмысления перспектив использования техники какая-то часть новых знаний переходит в базовые. В целом же базовые знания в параллельных вычислениях пока не вышли из стадии формирования.

Несмотря на то, что между линейной алгеброй и параллельными вычислениями нет почти ничего общего по содержанию, при их освоении возникают одни и те же сложности: именно, оба раздела математики воспринимаются достаточно трудно при использовании в качестве носителя знаний традиционной книги, в том числе даже тогда, когда для освоения материала привлекается преподаватель.

Весь опыт преподавания не только линейной алгебры, но и многих других аналогичных дисциплин показывает, что эффективность усвоения материала при использовании связки книга–преподаватель практически достигла своего потолка. Следовательно, для его дальнейшего повышения необходимо привлечение каких-то новых технологий. Как будто бы ответ на вопрос, что это за технологии, ясен. Ведь всюду только и говорится о компьютеризации знаний, электронных образовательных средствах, информатизации образования, дистанционном обучении. Продолжать этот перечень можно по всему списку знакомых терминов. Но если ответ ясен, то почему не видно обилия

компьютерных учебников? И в чем причина того, что электронные образовательные средства так трудно внедряются в процессы обучения?

Мы уже отмечали выше, что многое зависит от того, как конкретно будут устроены оконечные образовательные средства, по которым, собственно говоря, и должно проходить обучение. Подчеркнем также еще раз, что состав и структура именно этих средств мало зависит от всего сопутствующего окружения. На наш взгляд, поиск ответов на многочисленные вопросы, касающиеся электронных образовательных средств, надо начинать совсем с другого вопроса: “А чем конкретно не устраивает книга как источник знаний?” Без обстоятельного ответа на данный вопрос невозможно построить эффективные образовательные средства нового типа. К сожалению, многочисленные публикации и обсуждения этой темы почти всегда сводятся к констатации лишь каких-то достаточно общих методологических положений и оценок. Они содержат мало конкретных предложений. А это, в свою очередь, не позволяет разрабатывать новые формы представления знаний. Во всяком случае, пытаясь создать такие формы для линейной алгебры и параллельных вычислений, мы не смогли обнаружить подходящие конструктивные идеи.

Тем не менее, на примере теоретического курса линейной алгебры попробуем понять, чем может не устраивать книга как источник знаний и чем может оказаться полезным компьютер при выборе форм представления знаний. Безусловно, использование компьютера очень эффективно в организации различных видов поиска. Но не очень ясно, что стоит искать, если иметь в виду тот материал, который дается в книге. С помощью компьютера легко показывать различные рисунки, фотографии, схемы, таблицы. Но линейная алгебра является в высшей степени абстрактной наукой. Многомерность её объектов не позволяет в полной мере использовать иллюстративный материал для сопровождения процесса обучения. Конечно, на начальном этапе освоения линейной алгебры какие-то её положения можно иллюстрировать соответствующими рисунками из аналитической геометрии. Но это только на начальном этапе. И, наконец, компьютер не заменим при организации всякого рода счета. Но в теоретическом курсе линейной алгебры его практически нет.

Возможно, что именно отсутствие достаточного числа иллюстративных элементов, не позволяющее видеть предмет целиком как некоторую совокупность взаимосвязанных образов, делает затруднительным изучение абстрактных дисциплин. О попытках найти такие образы в линейной алгебре стоит сказать несколько подробнее. Тем более, что возможность использования найденных образов далеко выходит за рамки линейной алгебры.

В связи с организацией в вузах страны факультетов с углубленным изучением прикладной и вычислительной математики, около 30 лет назад стали появляться новые учебники и учебные пособия по линейной алгебре. Одно из них — это учебное пособие [1]. В нем впервые в линейную алгебру были введены элементы анализа, аналитическая геометрия была более тесно связана с основным текстом, окраска всего материала стала более функциональной. Всё это позволило сделать курс не только более насыщенным, но и более про-

зрачным с точки зрения связи со смежными дисциплинами. Его иллюстративность несколько увеличилась, но всё же оставалась явно недостаточной.

С целью облегчения процесса освоения линейной алгебры был написан справочник [2]. В нем содержалось много самого разного материала, в том числе приводились весьма подробные сведения по теоретическому курсу линейной алгебры. Эти сведения представляют собой большое число утверждений, содержащих описание отдельных фактов и определений. Никаких доказательств не приводилось. Система утверждений была столь детальной и систематизирована столь тщательно и глубоко, что по ней оказалось достаточно легко находить почти любой факт и понятие из общеобразовательного курса линейной алгебры. Возможно, именно этим обстоятельством объясняется тот факт, что справочник оказался популярным в среде студентов и аспирантов, особенно в период подготовки к экзаменам.

Собственно говоря, последнее обстоятельство и стало главным импульсом в принятии решения создать или, точнее, попробовать создать некоторую систему и комплекс систем, поддерживающих процесс освоения нового материала, причем создать по новой методологической и технической основе. Выбор линейной алгебры в качестве предметной области оказался для нас совершенно естественным. Этот курс в той или иной мере читается практически в каждом вузе с естественно-научным уклоном в образовании. Кроме этого, по данному курсу у нас был накоплен достаточно большой как педагогический опыт, так и общий багаж знаний. Важным фактором, определяющим принятое решение, было и то, что у нас имелся квалифицированный коллектив, владеющий современными программными и сетевыми технологиями.

Допустим, что теоретический курс разбит на конкретные утверждения, которые надо освоить в процессе обучения. Пусть они представляют определения, понятия и факты, связывающие какие-то понятия между собой. Построим ориентированный граф. В качестве вершин возьмем отдельные утверждения. Дуги будем проводить следующим образом. Пусть вершина соответствует некоторому понятию. Каждое новое понятие всегда возникает как следствие совместного рассмотрения нескольких уже введенных ранее понятий. Проведем дуги из вершин, иницилирующих новое понятие, в соответствующую ему вершину. Каждый новый факт связывает или использует в своей формулировке также несколько введенных ранее понятий. Проведем соответствующие этим понятиям дуги. Кроме этого, в процессе доказательства справедливости конкретного факта могут быть использованы какие-то другие, ранее установленные факты. И это использование отметим дугами. Назовем построенный граф информационным графом предметной области.

Каждый лектор при изложении своего курса неявно следует какому-то информационному графу: выбирает необходимую совокупность понятий и фактов (вершины графа), выстраивает их в логически связанную последовательность и проводит некоторые доказательства (дуги графа). Каждый конкретный информационный граф всегда является ациклическим. Правда, при этом отдельные утверждения могут совпадать. Если проанализировать различные курсы по одной и той же дисциплине, особенно, традиционной,

то можно заметить следующее. Конкретные совокупности понятий и фактов всегда выбираются из одной и той же известной совокупности и очень редко “разбавляются” чем-то новым. Почти всегда при изложении понятий и фактов сохраняется одно и то же отношение предшествования. Как правило, меняются местами только те сведения, которые на самом деле не связаны друг с другом.

Всё сказанное привело нас к такой идее. Построим объединенный информационный граф. Для этого соберем вместе всю совокупность значимых понятий и фактов, используемых в различных курсах по одной и той же дисциплине, и возьмем их в качестве вершин. Установим описанным выше способом дуги. Если окажется, что в какую-то вершину входит большое число дуг, разобьем соответствующее понятие или факт на более мелкие. Будем добиваться таким разбиением того, чтобы в каждую вершину входило лишь очень небольшое число дуг. И, конечно, будем стремиться сделать граф ациклическим. Далее, мы можем пометить вершины графа, указав, например, уровень их сложности, степень общности и т. п. Мы можем присоединить к графу дополнительные вершины, соответствующие иллюстрирующим примерам, комментариям, доказательствам и т. п., пометив их надлежащим образом.

Имея размеченный информационный граф предметной области, тексты утверждений с различными пояснениями, а также алфавитный, систематизированный и некоторые другие каталоги, характеризующие структуру всей совокупности утверждений, можно решать большое число самых разных задач, полезных как для лекторов курсов, так и для лиц, изучающих эти курсы. По каталогам можно выбрать совокупность утверждений, связанных с заданным набором понятий и фактов. Вместе с дугами это дает информационный граф заданного курса. Сразу видно, какие доказательства в данном курсе можно проводить полностью, а в каких неизбежно будут пропуски. Параллельная форма графа показывает, какие темы не связаны между собой и насколько их изложение можно разносить друг от друга. Сам по себе информационный граф показывает, на что опирается каждое конкретное утверждение и что опирается на него. Это как раз та информация, которую очень трудно получить из обычного книжного текста. Имея информационный граф, структуру предметной области уже легко визуализировать. Для этого компьютерные технологии подходят как нельзя лучше. Работа с информационным графом и каталогами очень многогранна, и её разнообразие ограничивается только фантазией разработчиков соответствующих систем.

На этих идеях сконструирована и реализована электронная энциклопедия ЛИНЕАЛ, предназначенная для получения теоретических сведений в области линейной алгебры. Она рассчитана на широкий круг пользователей — от школьника до научного работника и преподавателя. Включенный в систему материал содержит сведения, заведомо превышающие то, что дается в традиционных курсах. Систему ЛИНЕАЛ легко использовать для изучения линейной алгебры. Все сведения получаются последовательно с самых азов вплоть до очень серьезных результатов. Для работы с энциклопедией необходимо уметь пользоваться персональным компьютером и иметь начальные

математические знания. Точнее надо понимать действия с вещественными числами и представлять, что такое тригонометрические функции. Ничего другого для теоретического освоения линейной алгебры не требуется. Система ЛИНЕАЛ создана в двух вариантах. Она реализована как автономная программная система для персонального компьютера и доступна в сети Интернет по адресу <http://lineal.guru.ru> [3]. С системой также можно познакомиться по статье [4], электронный вариант которой находится по адресу <http://www.srcc.msu.su/nummeth/index.html>.

Безусловно, составление информационного графа, текстов утверждений и каталогов является трудной работой, которая под силу лишь профессионалам самой высокой квалификации в конкретной предметной области. Особенно тщательно приходится формировать разбиение на отдельные утверждения. Например, первоначально предполагалось, что в качестве возможного разбиения курса линейной алгебры можно без изменения взять разбиение, представленное в первой половине материала из книги [2]. Более того, не предполагалось сопровождать факты доказательствами их правильности, как и было сделано в [2]. Однако более детальное рассмотрение предметной области и методов работы с соответствующей ей базой данных заставили внести изменения в первоначальные планы. Поскольку причины внесения изменений не связаны конкретно с линейной алгеброй, а носят общий характер, на них стоит остановиться.

Удобство пользования базой данных во многом определяется простотой структуры причинно-следственных связей. Чтобы её достичь, как минимум необходимо иметь небольшое число опорных связей для каждого из утверждений. Это означает, что введение в базу данных любого нового факта или определения должно опираться на наличие в базе лишь малого числа утверждений. Материал из книги [2] не удовлетворяет полностью этим требованиям. Попытка построить по нему информационный граф показала, что имеется достаточно много вершин, в которые входит слишком много дуг. Другими словами, доказательства многих утверждений оказываются весьма сложными в силу отсутствия в [2] необходимых промежуточных утверждений. По этой причине материал из [2] пришлось переписать заново. В новом варианте большинство из утверждений имеют 5–8 опорных связей, из которых больше половины относятся к перечислению используемых понятий.

В процессе написания новой совокупности утверждений для курса линейной алгебры стала понятной необходимость введения в базу данных доказательств правильности имеющихся фактов. Включение доказательств было продиктовано несколькими соображениями. Во-первых, они представляют ценный методологический материал, используемый в процессе освоения предметной области. Во-вторых, не все они просты даже для специалистов. И, наконец, наличие доказательств делает возможным использование системы ЛИНЕАЛ в качестве полноценного учебника по любому курсу, соответствующему заданному набору утверждений.

Новый материал представляет фундамент линейной алгебры. По структуре это есть некоторая совокупность отдельных задач, определений, примеров и комментариев. Материал разбит на 13 разделов, объединяющих 72 темы.

Всего в базе данных системы ЛИНЕАЛ около 1500 различных утверждений и более 1100 доказательств отдельных фактов.

Идеи, заложенные в систему ЛИНЕАЛ, достаточно универсальны. Они применимы к любой предметной области, как естественно-научной, так и гуманитарной, которую можно представить как совокупность объектов, объединенных логическими связями. Например, так устроен любой математический курс, особенно устоявшийся. Создавать программные оболочки для систем, подобных ЛИНЕАЛ'у, тоже трудно, и для этого тоже нужны высококвалифицированные специалисты, владеющие передовыми программными и сетевыми технологиями. Чтобы исключить ненужное дублирование работ, программная оболочка системы ЛИНЕАЛ сделана не зависящей от предметной области.

Работая в течение многих лет в высшей школе, мы пришли к вполне определенным выводам относительно того, как должны быть устроены образовательные средства. Главный из них состоит в том, что должна быть обеспечена максимально возможная взаимозаменяемость средств на бумажных и электронных носителях. Это диктуется, в первую очередь, значительным различием условий в отдельных регионах России. В крупных городах, в которых обеспечен хороший доступ к сети Интернет, возможны любые виды получения знаний, в том числе дистанционные. Однако во многих вузах не хватает даже обычных персональных компьютеров. Поэтому там неизбежен крен в сторону использования традиционных образовательных средств. К тому же, в силу привычки или наличия каких-то трудностей общения с компьютером, работа с книгой может оказаться для человека более комфортной. Поэтому различные условия будут возникать по разным причинам. Но они не должны быть препятствием к обеспечению возможности получения образования одного и того же или почти одного и того же качества.

Суммируя сказанное, видится следующая иерархия построения образовательных средств. Её основу составляют учебные пособия на бумажных носителях. В них должны быть отражены как основные, так и многочисленные дополнительные сведения, необходимые для глубокого изучения. Число различных пособий должно определяться уровнем и темпом развития дисциплины. Для установившихся предметных областей различных учебных пособий, на наш взгляд, должно быть не много. Над этими учебными пособиями необходимо иметь небольшое число согласованных с ними учебников, описывающих базовые знания и основные методологические приемы освоения материала. Учебники также должны быть изданы на бумажных носителях. Среди них должен быть, по крайней мере, один, глубоко структурированный и построенный в виде справочника по типу базы данных, заложенных в систему ЛИНЕАЛ. В свою очередь, над ним должна быть построена программная система, обеспечивающая эффективное изучение материала. Система должна быть реализована в двух вариантах: как автономная для персонального компьютера и как интернет-версия. Важно, чтобы для пользователя стиль работы с обоими вариантами был одним и тем же. Наличие интернет-версии позволяет оперативно вносить в систему изменения и дополнения. Конечно, наряду с учебниками примерно по тому же принципу

должны быть подготовлены задачки и программные системы, контролирующие процессы выполнения упражнений. В их создании имеется своя специфика, однако здесь мы не будем обсуждать соответствующие проблемы. И, наконец, завершать иерархию образовательных средств должна доступная из сети Интернет информационно-справочная система, оперативно отражающая последние достижения в предметной области.

Имея описанный набор средств, можно обеспечить получение образования любого уровня. Важно то, что необходимый уровень может регулировать сам обучающийся. Последнее обстоятельство имеет большое значение при организации дистанционного обучения, самообразования и повышения квалификации. В линейной алгебре высказанные идеи во многом реализованы. Имеются согласованные учебное пособие [1] и задачник [5], структурированный учебник и обслуживающая его система [3]. По большому счету не хватает только информационно-справочной системы по текущим достижениям. Её создание планируется.

Полный набор аналогичных образовательных средств разрабатывается сейчас для параллельных вычислений. Как уже отмечалось, данная область развивается очень динамично. Поэтому первое, что было создано, это как раз информационно-справочная система, оперативно отражающая текущее состояние предметной области. Работает она с 1998 года как учебно-информационный центр по параллельным вычислениям [6]. Вся информация доступна в сети Интернет по адресу <http://parallel.ru>. В центре дается самая различная информация: последние разработки в области вычислительной техники и программирования, планируемые и проведенные конференции, персоналии, лекции и многое другое. Организована подписка по оперативному обслуживанию пользователей текущей информацией. Среди постоянных подписчиков около 200 вузов России, что, безусловно, говорит о полезности данной интернет-системы в деле образования.

Следующим было создано учебное пособие [7]. Актуальность его написания вызвана тем, что на русском языке вообще не имелось ни одного доступного пособия по параллельным вычислениям. В данной книге много самого разнообразного материала. Интересное для себя найдет в ней школьник, студент, научный сотрудник и преподаватель. Естественно, планируется создание структурного учебника и обслуживающей его системы по типу ЛИНЕАЛ в линейной алгебре.

Будущее покажет, какими будут электронные образовательные средства и как они будут использоваться. Наша задача в настоящее время — угадать или определить правильное направление их развития.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воеводин В. В. Линейная алгебра. 2-е изд. — М.: Наука, 1980. 400 с.
2. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984. 318 с.
3. ЛИНЕАЛ: электронная энциклопедия по линейной алгебре. <http://lineal.guru.ru>
4. Воеводин В. В., Воеводин Вл. В. ЛИНЕАЛ: электронная энциклопедия по линейной алгебре // Вычислительные методы и программирование. 2002. Т. 3. № 1. С. 131–140. <http://www.srcc.msu.su/num-meth/index.html>

5. Икрамов Х. Д. Задачник по линейной алгебре. — М.: Наука, 1975. 319 с.
6. Учебно-информационный центр по параллельным вычислениям. <http://parallel.ru>
7. Воеводин В. В., Воеводин Вл. В. Параллельные вычисления. — Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2002. 608 с.

ELECTRONIC EDUCATIONAL TOOLS: NEW IDEAS

V. V. Voevodin, Vl. V. Voevodin

The authors consider the development of electronic educational tools in two branches of mathematics: linear algebra and parallel calculations. They underline that it is necessary to introduce hierarchically organized packages of tools and to provide the interchangeability of traditional and electronic tools. The article touches upon new ideas of developing electronic educational tools based on the structuring of material and demonstrating cause-effect relations on it.

Keywords: electronic educational tools, linear algebra, parallel calculations, madden into a lattice material, informational graph.