МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СОРЕВНОВАНИЯ В ВУЗАХ

УДК 517.9

ОЛИМПИАДЫ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ДЛЯ СТУДЕНТОВ 2, 3 КУРСОВ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ

А. С. Шамаев

Московский государственный университет им.М.В.Ломоносова, Россия, 119899 г. Москва, Ленинские горы, 1; e-mail: shamaev@ipmnet.ru

Кафедра дифференциальных уравнений Московского государственного университета предлагает материалы математических соревнований для студентов 2-го и 3-го курсов с краткими комментариями.

Ключевые слова: математическая олимпиада, математическое соревнование, дифференциальные уравнения

В весеннем семестре 2003 года сотрудниками кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ были проведены две олимпиады по дифференциальным уравнениям: олимпиада по обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ) для студентов 2-го курса и олимпиада по дифференциальным уравнениям с частными производными (УРЧП) для студентов 3-го курса. Цели, которые ставили организаторы, состояли прежде всего в привлечении интереса студентов к предмету, в повышении творческой активности студентов, которым представлялась возможность проявить себя при решении нестандартных задач. Оба варианта олимпиад состояли из большого количества задач: в варианте по ОДУ было 13 задач, а в варианте по уравнениям с частными производными — 8 задач. Каждая задача оценивалась определенным количеством баллов (эти баллы были указаны в вариантах). Для решения задач предоставлялось 3 часа. С точки зрения организаторов олимпиады и составителей задач решить все задачи считалось маловероятным; даже решение половины всего задания рассматривалось как большое достижение. Студенты могли выбирать для решения те задачи, которые им казались наиболее интересными. После окончания олимпиады студенты могли взять с собой листок с заданием и подумать дома над решениями тех задач, которые им не удалось решить на самой олимпиаде. Организаторам олимпиад представлялось, что таким образом студенты получали также и дополнительный импульс к подготовке к экзаменам по ОДУ и УРЧП в весеннем семестре, которые проводятся в письменной форме и состоят также в основном из решения задач. Обе олимпиады вызвали значительный интерес среди студентов 2, 3 курсов. На соревнование по ОДУ пришло 110 второкурсников, на соревнование по УРЧП —

60 третьекурсников. Вопреки ожиданиям организаторов олимпиад, нашлись студенты, решившие более половины всего задания. На втором курсе студент Горский Е. А. набрал 29 баллов из 53 возможных, а на третьем курсе студент Дремов В. А. получил оценку 19 баллов из 32 возможных. Следует отметить, что почти каждая из предлагаемых в вариантах задач была решена в какой-нибудь работе. Варианты были составлены таким образом, чтобы необходимые для решения методы охватывали в основном как весь курс ОДУ, так и весь курс УРЧП. Так, для решения задач в варианте по ОДУ необходимо было знать теоремы о существовании, единственности, непрерывной зависимости и продолжении решений ОДУ, теоремы Ляпунова об устойчивости, иметь представление о построении фазовых портретов динамических систем, знать теорию линейных дифференциальных уравнений с постоянными и переменными коэффициентами. Для решения задач варианта по УРЧП нужно было использовать разнообразные свойства гармонических функций, знать свойства распространения волн в однородных средах, иметь представление о качественных свойствах решений параболических уравнений, а также о свойствах функций из пространств Соболева; нужно было также хорошо представлять, что такое корректность краевых задач математической физики. Разбор задач и награждение победителей проводились через неделю после проведения олимпиады, что давало возможность желающим самостоятельно еще порешать те задачи, которые не получились на олимпиаде. Приведем имена победителей. В скобках указано количество набранных баллов.

2 курс, ОДУ

1 место — Горский Е. А. (29);
2 место — Клименко А. В. (24), Горшков А. В. (22), Колюцкий Г. А. (22);
3 место — Гербер М. И. (14), Гербер А. И. (14), Грушанина И. С. (14), Ершов Д. Ю. (14), Ветрова М. Л. (14), Жолудь Д. С. (13).

3 курс, УРЧП

1 место — Дремов В. А. (19), Гайфуллин А. А. (16), Скопенков М. Б. (14);
2 место — Горев В. В. (10), Сурначев И. Д. (10), Шабанов Д. А. (9), Моисеев Т. С. (8), Вяткина Т. Ю. (8), Комова П. Ю. (8);
3 место — Шарич В. З. (6), Евдокимова С. А. (6).

Победители получили в качестве подарков книги по математике, которые могут быть им полезны вдальнейшем при обучении на механико-математическом факультете МГУ. Мы желаем победителям дальнейших успехов в учебе и научной работе.

Организаторы олимпиад предполагают и впредь проводить подобные конкурсы на механико-математическом факультете МГУ, полагая, что они способствуют повышению творческой активности студентов, улучшению подготовки студентов по данной специальности, развитию самостоятельного творческого мышления студентов мехмата — будущих математиков.

В организации олимпиады по ОДУ и составлении задач принимали участие сотрудники кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ Н. Х. Розов, А. С. Шамаев, И. Н. Сергеев, Ю. С. Ильяшенко, В. М. Миллионщиков, И. В. Матросов, А. С. Городецкий.

Вариант олимпиады по УРЧП составлен А. С. Шамаевым.

Приведем варианты олимпиад по ОДУ и УРЧП с некоторыми комментариями и указаниями к решению задач. В скобках указаны авторы задач и количество баллов, которым оценивалось правильное решение.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. (Н. Х. Розов) Определите максимальный интервал продолжимости направо решения задачи Коши

$$\dot{x} = x^2 - 4t^2, \quad x(1) = 1.$$

(3 балла)

(Решение не может выйти из некоторого угла с вершиной в начале координат.)

2. (А. С. Шамаев) Может ли функция

$$x(t) = e^{-\frac{1}{t}}, \text{ при } t > 0, \quad x(t) = 0, \quad t = 0$$

быть решением дифференциального уравнения (при $t \geq 0$) $x^{(2003)} + a(t)x = 0$, где $a(t)$ — бесконечно гладкая функция на $(-\infty, +\infty)$? (2 балла)

(Наличие приведенного решения противоречит теореме единственности.)

3. (Н. Х. Розов) Докажите, что любое решение уравнения $\ddot{x} + e^t x = 0$ ограничено на $\mathbf{R}_+$. (4 балла)

(Одно из возможных решений — построить функцию на фазовом пространстве, ограниченную на траекториях заданного дифференциального уравнения и убедиться на основе этого построения в ограниченности самих траекторий.)

4. (А. С. Шамаев) Докажите, что для решения задачи Коши $\ddot{x} - e^t x = 0$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = a$ существует единственное значение a, при котором решение $x(t)$ стремится к нулю при $t \to +\infty$. (8 баллов)

(Рассмотрим множество решений заданного уравнения, выходящих из точки 0 с наклоном a и определим во множестве наклонов два подмножества: те значения a, при которых соответствующее решение стремится к плюс бесконечности, и те значения a, при которых оно стремится к минус бесконечности. Покажем, что оба эти множества непусты и открыты. Тогда существует такой наклон a_0, что a_0 не принадлежит обоим множествам. Решение, соответствующее этому наклону, и будет искомым.)

5. (И. Н. Сергеев) Пусть определитель Вронского двух вещественно аналитических функций $f(t)$ и $g(t)$ на интервале (a, b) равен нулю. Докажите, что f и g линейно зависимы. (4 балла)

(Сначала докажем, что $f = Cg$ на любом интервале знакопостоянства функции g. Далее нужно показать, что константа в последнем равенстве одинакова для всех интервалов знакопостоянства функции g с использованием аналитичности функций f, g из условия задачи.)

6. (А. С. Шамаев) Пусть положения равновесия систем $\dot{x} = Ax$ и $\dot{y} = By$, A, B — постоянные матрицы, устойчиво по Ляпунову. Можно ли утверждать то же самое относительно системы $\dot{z} = (A + B)z$? (4 балла)

(Ответ — отрицательный. Постройте опровергающий пример на матрицах размерности 2.)

7. (И. В. Матросов) При каких условиях на $a \in \mathbf{R}$, $f(x) \in C^\infty$ все решения дифференциального уравнения $\dot{x} = ax^{1/3} + f(x)$ единственны? (3 балла)

(Ответ: либо $a = 0$, либо число $f(0)$ отлично от нуля.)

8. (И. В. Матросов) Пусть $\dot{x} = f(t, x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, $f \in C(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n)$, $f(t, 0) \equiv 0$ и известно, что $\exists L > 0$ такое, что $\forall x, y \in \mathbf{R}^n$, $\|x - y\| \geq 2$, $\forall t \in \mathbf{R}$ $|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L\|x - y\| \ln \|x - y\|$. Будет ли решение $x(t)$ продолжимо на $[0, +\infty)$? (3 балла)

(Выведите из приведенных в условии неравенств оценку для нормы решения указанного уравнения через повторную экспоненту от аргумента t. Из этой оценки вытекает продолжимость решения на положительную полуось.)

9. (Н. Х. Розов) Может ли траектория системы $\dot{x} = x$, $\dot{y} = -y$, $x(1) = y(1) = 1$ попасть за конечное время в точку $(a - 1, a)$ для некоторого $a \in \mathbf{R}$? (2 балла)

(Может, это вытекает из явных формул для решения. Число a является корнем некоторого квадратного уравнения.)

10. (А. С. Городецкий) Окружность $x^2 + y^2 = 1$ является предельным циклом векторного поля

$$\dot{x} = -y + x(x^2 + y^2 - 1)(2x + 2y - 1), \quad \dot{y} = x + y(x^2 + y^2 - 1)(2x + 2y - 1).$$

Выясните, является ли этот предельный цикл устойчивым, неустойчивым или полуустойчивым? (7 баллов)

(Сведите эту систему к одному неавтономному уравнению с периодическими коэффициентами. Далее исследуется на устойчивость отображение фазового пространства за период.)

11. (Ю. С. Ильяшенко) Нарисовать фазовый портрет системы

а. $\dot{z} = iH(z)$, $H(x + iy) = y^2 - x^2 + x^4$;

б. $\dot{z} = ie^{iH(z)}H(z)$. (4 балла)

(Построение фазовых портретов систем в комплексной форме сводится к построению картин фазовых траекторий вещественных систем.)

12. (Ю. С. Ильяшенко) Рассмотрим систему

$$\dot{x} = xy - y, \quad \dot{y} = x^3 - x^2.$$

Указать все начальные условия, для которых соответствующие решения ограничены. (3 балла)

(Система может быть сведена к уравнению с разделяющимися переменными).

13. (В. М. Миллионщиков) "Вечный двигатель", выставленный в витринах магазинов, состоит из маятника с грузом-магнитом и черной коробки, неподвижно стоящей под ним. Что, кроме батареек, помещено (или: вы бы поместили) в этой коробке, из-за чего маятник колеблется с постоянной амплитудой, пока служат батарейки? При этом в коробке нет движений, которые были бы видны простым глазом, если бы стенки коробки были бы прозрачными. Ответ обосновать. (6 баллов)

(Близкие вопросы обсуждаются в книге Л. С. Понтрягина "Обыкновенные дифференциальные уравнения".)

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

1. Рассмотрим смешанную задачу для полуограниченной струны

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad t \geq 0, \quad x \geq 0, \quad u(0,x) = \varphi(x), \quad (u_x + \alpha u)|_{x=0} = 0,$$

где φ — гладкая функция с финитным носителем в положительной полуоси. Имеет ли отраженная волна задний фронт, то есть будет ли расстояние от носителя решения до прямой $x = 0$ неограниченно возрастать при $t \to \infty$? (2 балла)

(Ответ отрицательный, это можно увидеть из явного представления для решения рассматриваемой задачи, которое нетрудно получить, если искать решение в виде $u = f(x-t) + g(x+t)$.)

2. Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения:

$$u_{tt}(t,x) = \Delta u(t,x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbf{R^3},$$
$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad u(t,x) \not\equiv 0.$$

Может ли $\operatorname{supp} u(t,x)$ принадлежать цилиндру $\{(t,x) \mid t \in (0,\infty),\, x \in D\}$, где D — ограниченная область пространства $\mathbf{R}^3$? (2 балла)

(Ответ: не может, доказательство можно получить с использованием формулы Кирхгофа и теоремы о единственности решения задачи Коши для волнового уравнения.)

3. Пусть $u(x)$ — гармоническая функция в окрестности точки $\{0\}$ пространства R^n;

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=i} \frac{\mathcal{D}^\alpha u}{\alpha!}\bigg|_{x=0} x^\alpha$$

— разложение функции $u(x)$ в ряд Тейлора в точке $\{0\}$. Верно ли, что полиномы $P_i(x) \equiv \sum\limits_{|\alpha|=i} \frac{\mathcal{D}^\alpha u}{\alpha!}\bigg|_{x=0} x^\alpha$ — гармонические функции? Ответ обоснуйте. (3 балла)

(Ответ: верно; ряд Тейлора для гармонической функции сходится к ней в некоторой окрестности в силу аналитичности гармонических функций, его можно почленно дифференцировать; оператор Лапласа от отрезка ряда равен минус оператору Лапласа от "хвоста" этого ряда, но это функции разных порядков малости в нуле, первая из них – многочлен, следовательно, они обе равны нулю.)

4. Пусть $u(t,x)$ — решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx} \quad \text{при} \quad t > 0,$$

$$u(t,x) \in C^2(\Pi_+) \cap C(\overline{\Pi}_+), \qquad \Pi_+ \equiv \{(x,t),\, t > 0\},$$

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ — ограниченная непрерывная функция, не равная тождественно нулю. Докажите, что не существует такого $T > 0$, при котором $u(t,x) \equiv 0$, если $T \le t$. (Иначе говоря, нагретый стержень не может полностью "остыть" за конечное время.) (3 балла)

(Утверждение задачи можно получить из явной формулы для решения задачи Коши; нужно доказать, что интеграл Пуассона — аналитическая по времени функция при положительных значениях времени; последнее утверждение можно доказать, рассматривая, например, аналитическое продолжение по t в комплексную плоскость указанного интеграла).

5. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^2$, $u(x)$ — собственная функция задачи Дирихле, то есть

$$\Delta u(x) + \lambda u(x) = 0,$$

$$u(x) = 0 \ \text{ для } \ x \in \partial\Omega, \quad \lambda = \text{const}.$$

Может ли множество $\sigma = \{x \mid u(x) = 0,\, x \in \Omega\}$ быть отрезком ℓ прямой линии, не имеющим общих точек с границей области Ω? Ответ обоснуйте. (4 балла)

(Ответ отрицательный: не может; доказательство основано на факте аналитичности собственной функции; этот факт можно получить из утверждения об аналитичности решений уравнения Лапласа, если ввести еще одну дополнительную фиктивную независимую переменную y и умножить собственную функцию $u(x)$ на некоторую функцию от этой фиктивной переменной y.

Произведение будет гармонической функцией при должном выборе указанной функции от y, следовательно она аналитична, а поэтому аналитична и исходная собственная функция.)

6. Пусть K — единичный круг на плоскости с центром в точке $\{0\}$. Докажите, что существует такая последовательность гладких функций $\{\varphi_n(x)\}$, $\varphi_n(x) \in C^\infty(\overline{K})$, что

$$\|\varphi_n\|_{H^1(K)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

но $\varphi_n(0) = 1$ для любых $n = 1, 2, \ldots$ (то есть функции из $H^1(K)$ не имеют “следа” в точке). (6 баллов)

(Для построения необходимой последовательности функций возьмем $\varphi_n = \varphi(nx)$, где $\varphi(x)$ — гладкая финитная функция, равная 1 в нуле, далее возьмем последовательность средних арифметических таких функций. Получим искомую последовательность, что доказывается с помощью теоремы Банаха – Сакса).

7. Пусть *Ш* — единичный шар в $\mathbf{R}^3$ с центром в нуле, $\vec{v}(x)$ — такая вектор-функция в *Ш*, что

1) $\vec{v}(x) = \nabla u(x)$, $u(x)$ — гладкая скалярная функция в *Ш*;
2) $\operatorname{div} \vec{v}(x) = 0$ в *Ш*;
3) если продолжить $\vec{v}(x)$ нулем в $\mathbf{R}^3$, то полученная в результате такого продолжения вектор-функция $\vec{w}(x)$ также удовлетворяет равенству $\operatorname{div} \vec{w}(x) = 0$ в $\mathbf{R}^3$ в смысле теории обобщенных функций. Найдите $\vec{v}(x)$.

(5 баллов)

(Задача сводится к задаче Неймана в круге для функции u. Краевые условия Неймана вытекают из условия 3).

8. Пусть $u(t, x)$ — решение задачи

$$u_{tt} = u_{xx} \ \text{ в } \ \Pi, \qquad \Pi \equiv [0, \pi] \times [0, \infty),$$

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=\pi} = 0 \quad \forall\, t > 0, \qquad u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x),$$

$\psi(x)$, $\varphi(x) \in C_0^\infty[0, \pi]$. Мы наблюдаем движение струны с закрепленными концами в точке 1, то есть нам известна функция $u(t, 1)$ при $t > 0$, но не абсолютно точно, а с точностью δ, где δ — любое положительное (но не равное нулю) число. Можно ли по такому наблюдению восстановить с любой наперед заданной точностью $\varepsilon > 0$ функции $\psi(x)$, $\varphi(x)$? Ответ обоснуйте. (6 баллов)

(Нельзя восстановить; чтобы показать это, нужно представить решение в виде ряда Фурье; из представления в виде ряда Фурье следует, что можно так сколь угодно мало “пошевелить” начальные условия, что “наблюдаемая” по условию задачи функция $u(t, 1)$ изменится более чем на единицу.)

COMPETITIONS ON DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR 2ND AND 3RD YEAR STUDENTS OF THE FACULTY OF MECHANICS AND MATHEMATICS OF MOSCOW STATE UNIVERSITY

A. S. Shamaev

The Chair of Differential Equations of Moscow State University proposes the materials of mathematics competitions for 2nd and 3rd year students with brief comments.

Keywords: mathematical Olympiads, mathematical contests, differential equations