НЕПРЕРЫВНОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

УДК 517

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЭЛЕМЕНТОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПРИ ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

А. И. Рубинштейн

Московский государственный университет леса,
Россия, 141005, Московская обл., г. Мытищи, ул. 1-я Институтская, 1;
тел.: (095) 5885778; факс: (095) 5869134; e-mail: shalaev@mgul.ac.ru

Элементы математического анализа применяются к приближенным вычислениям корней из целых чисел и значений тригонометрических функций с оценкой точности приближений, что должно стимулировать интерес учащихся к этому разделу математики.

Ключевые слова: элементы математического анализа, приближенные вычисления, рекуррентные формулы.

Успех образовательного процесса в значительной степени зависит от осознания учащимся важности того или иного раздела и в целом изучаемого курса. Причем важности как в общей системе получаемых знаний, так и, быть может, еще значимее, в практических приложениях. Сказанное касается как вузовского, так и школьного математического образования, поскольку в школьный курс введено изучение элементов математического анализа.

Силу методов анализа и их необходимость достаточно просто продемонстрировать на примерах проведения приближенных вычислений с оценкой точности [1–3]. Остановимся на нескольких примерах, рассмотрение которых не требует больших затрат времени, но сразу, кажется, должно поднять "рейтинг" аналитических методов в представлении учащихся.

Разумеется, излагаемое ниже не является каким-либо откровением, скорее принадлежит к математическому фольклору, но собранное в целое представляется все-таки новым.

Учащиеся пишут "значки" типа $\sqrt[3]{2}$ не задумываясь, что это такое. Объяснение: "$\sqrt[3]{2}$ есть число, куб которого равен 2" в практическом смысле мало что дает. Например, требуется изготовить емкость в виде куба, объем которого два кубических метра. Чему должна равняться длина стороны такого куба? Оставляем в стороне возражения: а разве недопустимо, если объем будет равен 2.000376 куб. м и сторона 1.26 м? Да и как изготовить идеальный куб? Во-первых, откуда взялось число 1.26 — получено с помощью калькулятора? А какова программа в калькуляторе, позволяющая найти это число? Не ответив на этот вопрос, мы рискуем оказаться мольеровским господином Журденом, который не знал, что говорит прозой.

Сначала, как кролик из цилиндра фокусника, появляется последовательность чисел $\{x_n\}$, заданная рекуррентным соотношением

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + a}{3x_n^2}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где, для простоты, будем считать $a > 1$. Если существует конечный отличный от нуля предел (вот и появляется понятие анализа)

$$\lim x_n = x, \tag{2}$$

то из (1), используя *свойства пределов* (их надо доказывать!), получаем

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2x_n^3 + a}{3x_n^2} = \frac{2x^3 + a}{3x^2}\,,$$

откуда $3x^3 = 2x^3 + a$, или $x^3 = a$, то есть $x = \sqrt[3]{a}$. Таким образом, при задании x_1 соотношение (1) дает *алгоритм* вычисления кубического корня, если, разумеется, доказано существование предела (2). Проделаем простые преобразования:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - \sqrt[3]{a} \;&=\; \frac{2x_n^3 + a}{3x_n^2} - \sqrt[3]{a} = \frac{3x_n^3 - 3x_n^2\sqrt[3]{a} - \Big(x_n^3 - (\sqrt[3]{a}\,)^3\Big)}{3x_n^2} = \\
&=\; \frac{(x_n - \sqrt[3]{a}\,)\left(3x_n^2 - \Big(x_n^2 + x_n\sqrt[3]{a} + (\sqrt[3]{a}\,)^2\Big)\right)}{3x_n^2} = \\
&=\; \frac{(x_n - \sqrt[3]{a}\,)\left(\big(x_n^2 - x_n\sqrt[3]{a}\,\big) + \Big(x_n^2 - (\sqrt[3]{a}\,)^2\Big)\right)}{3x_n^2} = \\
&=\; \frac{(x_n - \sqrt[3]{a}\,)^2\,(x_n + x_n + \sqrt[3]{a}\,)}{3x_n^2} = \\
&=\; \big(x_n - \sqrt[3]{a}\,\big)^2 \cdot \frac{1}{x_n} \cdot \frac{2 + \sqrt[3]{a}/x_n}{3}\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

Очевидным образом находится натуральное m, для которого

$$m^3 < a < (m+1)^3; \tag{4}$$

уже отмечалось, что $a > 1$ и исключается тривиальный случай $a = m^3$. Если $x_1 = m + 1$, то согласно (4)

$$1 < \sqrt[3]{a} < x_1 < \sqrt[3]{a} + 1. \tag{5}$$

Тогда на основании (3) и (5)

$$0 < x_2 - \sqrt[3]{a} < \big(x_1 - \sqrt[3]{a}\,\big)^2 < 1,$$

то есть

$$1 < \sqrt[3]{a} < x_2 < \sqrt[3]{a} + 1$$

и по очевидной индукции

$$0 < x_{n+1} - \sqrt[3]{a} < \big(x_1 - \sqrt[3]{a}\,\big)^2,$$

откуда

$$0 < x_{n+1} - \sqrt[3]{a} < \big(x_1 - \sqrt[3]{a}\,\big)^{2^n}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Так как по формуле (5)
$$0 < x_1 - \sqrt[3]{a} < 1,$$
то из (6) следует, что
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt[3]{a} \tag{7}$$
на основании свойства о пределе промежуточной последовательности, то есть доказано (2).

Из (1) и (5), (6)
$$x_{n+1} - x_n = \frac{2x_n^3 + a}{3x_n^2} - x_n = -\frac{x_n^3 - a)}{3x_n^2} < 0,$$
то есть последовательность $\{x_n\}$ убывает и ограничена снизу числом $\sqrt[3]{a}$. Но тогда к ней применима теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности и опять устанавливается (2), а, следовательно, и (7).

В силу очевидных равенств
$$\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}\,; \quad \sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a},$$
случаи
$$0 < a < 1 \ \text{ и } \ a < 0$$
сводятся к ситуации $a > 1$, обсужденной в (3)–(6).

Рекуррентное соотношение (1) есть результат применения к уравнению
$$f(x) = x^3 - a = 0 \tag{8}$$
метода Ньютона (метод касательных), согласно которому рассматривается последовательность $\{x_n\}$, определяемая соотношением
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\,, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{9}$$
Так как метод Ньютона фактически не рассматривается в большинстве втузовских курсов математики а, самое главное — не приводится достаточное условие сходимости последовательности (9) к корню уравнения
$$f(x) = 0 \tag{10}$$
и точность приближений, то имеет смысл на этих задачах остановиться.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[A; B]$ и принимает на его концах значение разных знаков, то есть
$$f(A) \cdot f(B) < 0.$$
Тогда (по теореме Коши о промежуточном значении непрерывной функции) на интервале $(A; B)$ существует хотя бы одно значение α, при котором
$$f(\alpha) = 0. \tag{11}$$

Пусть дополнительно на интервале $(A;\,B)$ существует вторая производная $f''(x)$, *сохраняющая на* $(A;\,B)$ *знак*, то есть график $y = f(x)$ на $(A;\,B)$ или выпуклый вниз ($f''(x) > 0$), или выпуклый вверх ($f''(x) < 0$). Легко понять, что в этом случае существует на $(A;\,B)$ единственное значение α, удовлетворяющее (11). Положим x_1 равен тому из значений A или B, при котором знаки функции и её второй производной совпадают. Не ограничивая общности, можно считать существующими $f''(A)$, $f''(B)$. В противном случае достаточно рассмотреть близкий к $(A;\,B)$ внутренний интервал. Пусть, например,

$$f(B) > 0; \quad f''(x) > 0, \quad x \in (A;\,B). \tag{12}$$

Тогда $x_1 = B$. Применение формулы Лагранжа конечных приращений для $f(x)$ и $f'(x)$ позволяет получить из (9) цепочку равенств

$$\begin{aligned}
x_{n+1} - \alpha \ &= \ x_n - \alpha - \frac{f(x_n) - f(\alpha)}{f'(x_n)} = \\
&= \ (x_n - \alpha) - \frac{f'\Big(\alpha + \theta_1 \cdot (x_n - \alpha)\Big) \cdot (x_n - \alpha)}{f'(x_n)} = \\
&= \ \frac{x_n - \alpha}{f'(x_n)} \left(f'(x_n) - f\Big(\alpha + \theta_1 \cdot (x_n - \alpha)\Big)\right) = \\
&= \ \frac{x_n - \alpha}{f'(x_n)} \cdot f'' \left(\alpha + \theta_1 \cdot (x_n - \alpha) + \theta_2 \cdot \Big(x_n - \Big(\alpha + \theta_1 \cdot (x_n - a)\Big)\Big)\right) \times \\
&\quad \times \Big(x_n - \Big(\alpha + \theta_1 \cdot (x_n - \alpha)\Big)\Big) = \\
&= \ (x_n - \alpha)^2 \, \frac{(1 - \theta_1) \cdot f'' \Big(\alpha + (\theta_1 + \theta_2 - \theta_1 \cdot \theta_2)(x_n - \alpha)\Big)}{f'(x_n)} \,,
\end{aligned} \tag{13}$$

где $0 < \theta_{1,2}(n) < 1$. Но тогда

$$0 < \theta_1 + \theta_2 - \theta_1 \cdot \theta_2 = \theta_1 + \theta_2(1 - \theta_1) < \theta_1 + (1 - \theta_1) = 1,$$

откуда

$$\alpha < \alpha + (\theta_1 + \theta_2 - \theta_1 \cdot \theta_2) \cdot (x_n - \alpha) < \alpha + (x_n - \alpha) = x_n. \tag{14}$$

В силу единственности α, удовлетворяющего (11) на $(A;\,B)$, из (12) следует, что на $(\alpha, B]$

$$f(x) > 0, \quad f'(x) > 0. \tag{15}$$

Отсюда, согласно (9),

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} < 0.$$

Итак, при выполнении (12) последовательность (9) монотонно убывает и ограничена снизу числом α. По упоминавшейся уже теореме Вейерштрасса существует конечный предел

$$x = \lim x_n \geq \alpha.$$

Тогда переход к пределу в (9) дает

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}\,,$$

откуда

$$f(x) = 0 \ \text{ и } \ x = \alpha.$$

Очевидно, что

$$0 < \frac{(1-\theta_1)\, f''\big(\alpha + (\theta_1 + \theta_2 - \theta_1 \cdot \theta_2)(x_n - \alpha)\big)}{f'(x_n)} \le \frac{\sup\limits_{A \ge x \ge B} f''(x)}{f'(x_n)} = M,$$

так что, используя (13), получаем

$$0 < x_{n+1} - \alpha \le M^n (x_1 - \alpha)^{2^n}. \tag{16}$$

Отсюда для любого $\varepsilon \in (0;\,1)$ при $n > n_0(\varepsilon)$

$$0 < x_{n+1} - \alpha < \varepsilon^n$$

— сходимость последовательности (9) к значению α из (11) происходит быстрее *любой* геометрической прогрессии [1].

Если введенное выше число $M \le 1$, то, согласно (16),

$$0 < x_{n+1} - \alpha < (x_1 - \alpha)^{2^n}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

сходимость $\{x_n\}$ к α является сверхбыстрой, как и в (6).

Для функции

$$f(x) = x^k - \alpha, \quad k = 2, 3, \ldots$$

из (9) аналогично (1) получаем

$$x_{n+1} = \frac{(k-1)x_n^k + a}{k x_n^{k-1}}\,. \tag{17}$$

Преобразования, подобные проведенным в (3), позволяют из (17) получить соотношение

$$x_{n+1} - \sqrt[k]{a} = (x_n - \sqrt[k]{a}\,)^2\, \frac{1}{x_n} \ \times$$
$$\times \frac{(k-1) + (k-2)\,\dfrac{\sqrt[k]{a}}{x_n} + (k-3)\left(\dfrac{\sqrt[k]{a}}{x_n}\right)^2 + \ldots + \left(\dfrac{\sqrt[k]{a}}{x_n}\right)^{k-2}}{k}\,. \tag{18}$$

Если

$$\frac{k-1}{2} < \sqrt[k]{a} < x_1 < \sqrt[k]{a} + 1, \tag{19}$$

то, используя (18), имеем

$$0 < x_2 - \sqrt[k]{a} < \big(x_1 - \sqrt[k]{a}\,\big)^2, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

что позволяет установить с помощью очевидной индукции оценку

$$0 < x_{n+1} - \sqrt[k]{a} < \left(x_1 - \sqrt[k]{a}\right)^{2^n}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{20}$$

и сверхбыструю сходимость последовательности (17) к значению $\sqrt[k]{a}$.

Так как

$$\sqrt[k]{l^k a} = l \cdot \sqrt[k]{a},$$

то для $l^k a$ неравенство (19) выполнить просто и быстро вычислить $\sqrt[k]{l^k a}$, а вместе с тем и $\sqrt[k]{a}$.

Так как

$$a^{m/k} = \left(a^{1/k}\right)^m = \left(\sqrt[k]{a}\right) \cdot \left(\sqrt[k]{a}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\sqrt[k]{a}\right), \tag{21}$$

очевиден алгоритм быстрого вычисления с заданной точностью значения степени положительного основания с рациональным показателем.

Всё сказанное выше касается *точности алгоритмов вычисления* значения рассматриваемых функций. При непосредственном использовании формул (1), (17), (21) необходимо следить за точностью самих вычислений, то есть за точностью выполнения серии арифметических операций. Это отдельный вопрос численных методов анализа, и полезно обратить на подобные нюансы внимание учащихся.

Как уже отмечалось, вычисление $\sqrt[3]{a}$ сводилось к решению методом Ньютона простейшего кубического уравнения (8). Естественно поставить вопрос о нахождении корней произвольного кубического уравнения, разумеется, действительных корней. Рассмотрим общее кубическое уравнение, решение которого не сводится к решению уравнения меньших степеней, то есть уравнение

$$a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 = 0, \quad a_0 \cdot a_3 \neq 0,$$

равносильное уравнению

$$z^3 + \frac{a_1}{a_0} z^2 + \frac{a_2}{a_0} z + \frac{a_3}{a_0} = 0.$$

Как известно, замена $z = x - \dfrac{1}{3}\dfrac{a_1}{a_0}$ сводит это уравнение к стандартному виду

$$x^3 + px + q = 0, \tag{22}$$

причем можно считать, что $p \cdot q \neq 0$.

В начале 17 века в Италии (Фиоре, Фонтано – Тарталья) для положительных p получено решение (в этом случае единственное действительное) в форме

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{23}$$

— так называемая формула Кардано.

Чрезвычно полезно обратить внимание учащихся на то, как важно определить, что вкладывается в понятие “решить уравнение”. К примеру, для уравнения

$$x^3 + 9x - 10 = 0 \tag{24}$$

формула (23) дает решение

$$x = \sqrt[3]{5 + 4\sqrt{13}} - \sqrt[3]{-5 + 4\sqrt{13}}.$$

Его единственность следует из записи в виде

$$x^3 = -9x + 10.$$

Левая часть — строго возрастающая функция, правая — строго убывающая, и множества значений обеих функций — вся числовая прямая. Вместе с тем тривиально видно, что $x = 1$ удовлетворяет (24):

$$\sqrt[3]{5 + 4\sqrt{13}} - \sqrt[3]{-5 + 4\sqrt{13}} = 1.$$

Это показывает, что с "вычислительной" точки зрения, формула (23) мало что дает.

Очевидно, что вторая производная

$$f''(x) = (x^3 + px + q)'' = 6x$$

сохраняет знак на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$. Если найдем отрезки, принадлежащие какому-то из указанных промежутков, на концах которых $f(x)$ принимает значения разных знаков, то можно применять формулу (9), в силу которой

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 + px_n + q}{3x_n^2 + p} = \frac{2x_n^3 - q}{3x_n^2 + p}. \tag{25}$$

Для нахождения упомянутых отрезков необходимо исследовать функцию

$$f(x) = x^3 + px + q.$$

При исследовании этой функции будем считать, что называемая дискриминантом величина

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 \neq 0. \tag{26}$$

Случай $D = 0$ соответствует кратным корням и исключается ввиду редкости и достаточной тривиальности.

1) Пусть $p > 0$.

Тогда производная $f'(x) = 3x^2 + p$ всюду положительна, функция $f(x)$ строго возрастает на $(-\infty; +\infty)$ от $-\infty$ до $+\infty$ и, следовательно, существует единственный нуль функции $f(x)$, причем

$$\begin{cases} \alpha_1 < 0 & \text{при} \quad q > 0 \\ \alpha_1 > 0 & \phantom{\text{при}} \quad q < 0 \end{cases}.$$

Выбираем

$$x_1 = m < 0, \quad \text{что приводит к} \quad \begin{cases} f(m) < 0 \\ f(m+1) > 0 \end{cases} \quad \text{при} \quad q > 0,$$

$$x_1 = m + 1 > 0, \quad \text{что приводит к} \quad \begin{cases} f(m) < 0 \\ f(m+1) > 0 \end{cases} \quad \text{при} \quad q < 0. \qquad (27)$$

Это наиболее экономный, дающий быструю сходимость последовательности (25) выбор x_1. В принципе, в качестве x_1 можно взять любое значение, для которого $f(x_1) < 0$ при $q > 0$ и $f(x_1) > 0$ при $q < 0$.

2) Пусть $p < 0$.

Тогда функция $f(x)$ имеет локальный максимум, равный

$$-\frac{2}{3}\,p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q \quad \text{при} \quad x = -\sqrt{-\frac{p}{3}}\,,$$

и локальный минимум, равный

$$\frac{2}{3}\,p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q \quad \text{при} \quad x = \sqrt{-\frac{p}{3}}\,.$$

Если $\frac{2}{3}\,p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q > 0$ или $-\frac{2}{3}\,p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q < 0$, то есть при $D=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3 > 0$, по-прежнему $f(x)$ имеет единственный нуль α_1, противоположный по знаку с q и для его приближенного вычисления с помощью алгоритма (25) величину x_1 можно выбрать, используя (27).

Если же

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0,$$

то $f(x)$ имеет три действительных корня α_1, α_2, α_3 таких, что

$$\begin{cases} \alpha_1 < \alpha_2 < 0 < \alpha_3 & \quad q < 0 \\ & \text{при} \\ \alpha_1 < 0 < \alpha_2 < \alpha_3 & \quad q > 0 \end{cases}. \qquad (28)$$

Еще одно подтверждение малой ценности формулы (23) состоит в том, что действительные корни кубического уравнения выражаются суммой комплексных чисел.

Для вычисления отрицательного корня α_1 по алгоритму (25) следует выбрать x_1, удовлетворяющее условиям:

$$\begin{cases} x_1 = m < -\sqrt{\dfrac{p}{3}}\,, \\ f(m) < 0, \end{cases}$$

а для вычисления положительного корня α_3 следует выбрать x_1 так, что

$$\begin{cases} x_1 = m + 1 > \sqrt{-\dfrac{p}{3}}\,, \\ f(m+1) > 0. \end{cases}$$

Для вычисления по формуле (25) среднего корня α_2 вне зависимости от его знака следует взять $x_1 = 0$.

Разумеется, процесс вычисления корней по алгоритму (25) будет более экономным по времени, если предварительно найти отрезки длины не более единицы, содержащие ровно по одному корню и на концах которых $f(x)$ имеет разные знаки. Кроме того, эти отрезки не должны внутри содержать точки $x = 0$.

И еще одно замечание. Случай кратных корней, когда дискриминант $D = 0$, тривиален потому, что кратный корень в этом случае равен или $-\sqrt{-\dfrac{p}{3}}$, или $\sqrt{-\dfrac{p}{3}}$.

Еще одним моментом применения методов анализа в школьном и втузовском курсах математики может быть приближенное вычисление значений функций $\sin x$ и $\cos x$. Заметим, что если известны значения $\sin x$, $\cos x$ для $x \in \left[0;\, \dfrac{\pi}{4}\right]$, то с помощью формул приведения легко найти значения этих функций для любого $x \in (-\infty;\, +\infty)$.

Нам понадобится следующее простое утверждение, непосредственно вытекающее из формулы Лагранжа конечных приращений:

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[A;\, B]$, $f(A) = 0$ и на $(A;\, B)$ существует производная $f'(x) > 0$. Тогда

$$f(x) > 0 \ \ \textit{на} \ \ (A;\, B], \quad \textit{или} \quad f(x) \geq 0 \ \ \textit{на} \ \ [A;\, B].$$

Очевидно, что

$$0 \leq \cos x \leq 1, \quad x \in [A;\, B] = \left[0;\, \frac{\pi}{4}\right].$$

Применим утверждение к функции $f(x) = x - \sin x$. Так как $f(0) = 0$, $f'(x) = 1 - \cos x > 0$ для $x \in \left[0;\, \dfrac{\pi}{4}\right]$, то $0 \leq \sin x < x$, $x \in \left[0;\, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Теперь применим утверждение к функции $f(x) = \cos x - \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)$. Так как $f(0) = 0$, $f'(x) = -\sin x + x > 0$, $x \in \left[0;\, \dfrac{\pi}{4}\right]$, то по утверждению $1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1$, $x \in \left[0;\, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Применим утверждение к функции $f(x) = \sin x - \left(x - \dfrac{x^3}{6}\right)$. Так как $f(0) = 0$, $f'(x) = \cos x - \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right) > 0$, $x \in \left[0;\, \dfrac{\pi}{4}\right]$, то $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$, $x \in \left[0;\, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Аналогичным образом получим выражение

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots ,$$

в котором суммы первых членов с нечетным числом слагаемых дают значения $\sin x$ с избытком, а с четным числом слагаемых — с недостатком. Точность приближения оценивается величиной

$$0 \le \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \le \frac{(\pi/4)^{2k-1}}{(2k-1)!}\,, \quad x \in \left[0;\ \frac{\pi}{4}\right].$$

Равным образом выражение

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

позволяет вычислять значения $\cos x$ с избытком при нечетном числе первых слагаемых и с недостатком — при четном числе первых слагаемых, точность приближения оценивается величиной

$$0 \le \frac{x^{2k}}{(2k)!} \le \frac{(\pi/4)^{2k}}{(2k)!}\,, \quad x \in \left[0;\ \frac{\pi}{4}\right].$$

Зная значения $\sin x$ и $\cos x$, можно приближенно вычислять значения функций $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$. Точность определяется точностью вычисления дроби при приближенных значениях числителя и знаменателя: если

$$A - \Delta_1 < \sin x < A + \Delta_1, \quad B - \Delta_2 < \cos x < B + \Delta_2,$$

то

$$\frac{A - \Delta_1}{B + \Delta_2} < \operatorname{tg} x < \frac{A + \Delta_1}{B - \Delta_2}\,.$$

Представляется полезным знакомить учащихся с приведенными применениями элементов математического анализа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. 7-е изд. — М.: Наука, 1969. 607 с.
2. Рубинштейн А. И. Об использовании элементов математического анализа при приближенных вычислениях // Сб. тезисов. Ломоносовские чтения. — М.: МГУ, 2003. С. 42–47.
3. Рубинштейн А. И. Связующая нить. “Неизвестная математика”. — Королев, Моск. обл.: Ин-т “Композит-Тест”, 2002. 96 с.

ON USE OF PRINCIPLES OF MATHEMATICAL ANALYSIS FOR APPROXIMATE CALCULATIONS

A. I. Rubinshtein

The principles of mathematical analysis are used for approximate calculations of radicals of integer and trigonometrical functions. Then the accuracy of approximation is evaluated. The use of these principles should encourage students to study this branch of mathematics.

Keywords: principles of mathematical analysis, approximate calculation, recursion relations.