



Математика, очный тур, 29 февраля 2004 г.

1. Решить неравенство

$$|x-1| > |2x|$$

2. Является ли число 3999991 простым? Ответ обосновать.
3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)(x + y) = 15xy \\ (x^4 + y^4)(x^2 + y^2) = 85x^2y^2 \end{cases}$$

4. В выпуклом четырехугольнике $ABKC$ длина стороны AB равна $\sqrt{3}$, длина диагонали BC равна 1, а величины углов ABC , BKA и BKC равны 120° , 30° и 60° соответственно. Найдите длину стороны BK .

5. Найдите все значения параметра $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, для каждого из которых уравнение

$$\sin 2x + \sin x + \sin(x - \alpha) = \sin \alpha + \sin(x + \alpha)$$

имеет ровно 5 различных корней на промежутке $\left[-\frac{7\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$.

Ответы, решения, указания

- 1.

$$\begin{aligned} |x-1| > |2x| &\Leftrightarrow (x-1)^2 > (2x)^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 - (2x)^2 > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [(x-1) - 2x] \cdot [(x-1) + 2x] \Leftrightarrow (-x-1)(3x-1) > 0 \\ &\Leftrightarrow (x+1)\left(x - \frac{1}{3}\right) < 0 \end{aligned}$$

Ответ. $-1 < x < \frac{1}{3}$.

2. $3999991 = 4000000 - 9 = 2000^2 - 3^2 = 1997 \cdot 2003$.

Ответ. Нет.

- 3.

Первый метод решения.

Если $x=0$, то $y=0$ и наоборот. Причем $(0,0)$ — решение.

Пусть $x \neq 0, y \neq 0$.

$$\frac{(x^4 + y^4)}{85} = \frac{(x^2 + y^2)(x + y)^2}{225}$$

или

$$\frac{(x^4 + y^4)}{17} = \frac{(x^2 + y^2)(x + y)^2}{45},$$

$$45(x^4 + y^4) = 17(x^2 + y^2)(x^2 + 2xy + y^2),$$

$$28x^4 - 34x^3y - 34x^2y^2 - 34xy^3 + 28y^4 = 0,$$

делим левую и правую части на $2y^4$:

$$14\left(\frac{x}{y}\right)^4 - 17\left(\frac{x}{y}\right)^3 - 17\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 17\left(\frac{x}{y}\right) + 14 = 0.$$

Пусть $t = \left(\frac{x}{y}\right)$. Уравнение относительно t

Примет вид

$$14t^4 - 17t^3 - 17t^2 - 17t + 14 = 0,$$

которое — суть симметрическое уравнения четвертого порядка. Делим обе части на t^2 (можно, так как $t=0$ — не решение уравнения), получаем:

$$14\left(t^2 + \frac{1}{t^2}\right) - 17\left(t + \frac{1}{t}\right) - 17 = 0 \Leftrightarrow 14(z^2 - 2) - 17z - 17 = 0,$$

$$\begin{cases} z = \frac{5}{2} \\ z = -\frac{9}{7} \end{cases}$$

$$t + \frac{1}{t} = -\frac{9}{7}, \text{ нет решений,}$$

$$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}, \begin{cases} t = 2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ответ. (2,4), (4,2), (0,0).

Второй метод решения. Приведем его схематично. (Метод был предложен одним из участников олимпиады).

Возведем в квадрат первое уравнение (так как это преобразование неравносильное, то необходимо впоследствии произвести проверку) и поделим левые и правые части преобразованного первого уравнения и второго друг на друга. Получим:

$$\left(1 + \frac{2x^2y^2}{x^4 + y^4}\right) \left(1 + \frac{2xy}{x^2 + y^2}\right) = \frac{45}{17}.$$

Положим $t = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$. Тогда приходим к уравнению

$$\left(1 + \frac{t^2}{2-t^2}\right)(1+t) = \frac{45}{17} \Leftrightarrow 45t^2 + 34t - 56 = 0,$$

найдя корни которого, приходим к двум однородным уравнениям второго порядка относительно x и y .

4. Первый метод решения.

Восстановим перпендикуляр к AB из точки B . Пусть D — точка его пересечения с AK . Тогда $\angle DBC = 30^\circ$, но $\angle DKC = 30^\circ$. Следовательно, четырехугольник $DCKB$ — вписанный и, следовательно, $\angle BDC = 120^\circ$, $\angle DCB = 30^\circ$.

По теореме синусов для треугольника BDC :

$$\frac{BD}{\sin 30^\circ} = \frac{BC}{\sin 120^\circ} \Rightarrow BD = \frac{1}{2} \frac{BC}{\sqrt{3}/2} = \frac{BC}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\operatorname{tg} \angle DAB = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin \angle DAB = \frac{\operatorname{tg} \angle DAB}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \angle DAB}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

По теореме синусов для треугольника ABK :

$$\frac{BK}{\sin \angle DAB} = \frac{AB}{\sin 30^\circ} \Rightarrow BK = \frac{AB \sin \angle DAB}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$

Ответ. $\frac{\sqrt{30}}{5}$.

Второй метод решения. Проведем вторую диагональ AK . Положим $\angle CBK = \alpha$, $\angle BCK = \beta$. Тогда $\angle BAK = 30^\circ - \alpha$, $x = BK$. Приходим к системе уравнений (применяется теорема синусов для треугольников BKC и ABK):

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 120^\circ, \\ \frac{x}{\sin \beta} = \frac{1}{\sin 60^\circ}, \\ \frac{x}{\sin(30^\circ - \alpha)} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \frac{x}{\sin(120^\circ - \alpha)} = \frac{1}{\sin 60^\circ}, \\ \frac{x}{\sin(30^\circ - \alpha)} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x \sin 60^\circ = \cos(30^\circ - \alpha), \\ \frac{x}{\sqrt{3}} \sin 30^\circ = \sin(30^\circ - \alpha). \end{cases}$$

Возведем полученные равенства в квадрат и сложим, получим уравнение:

$$x^2 \frac{3}{4} + \frac{x^2}{3 \cdot 4} = 1 \Leftrightarrow \frac{10}{12} x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{6}{5}} = \frac{\sqrt{30}}{5}.$$

5. После элементарных тригонометрических преобразований приходим к эквивалентному уравнению:

$$\sin x(2 \cos x + 1) = \sin \alpha(2 \cos x + 1),$$

то есть к совокупности:

$$\begin{cases} \sin x = \sin \alpha \\ 2 \cos x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \sin \alpha \\ \cos x = -1/2 \end{cases}$$

- 1) $\cos x = -1/2$, $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$. В отрезок $\left[-\frac{7\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ входят три корня:

$$x_1 = -\frac{4\pi}{3}, x_2 = -\frac{2\pi}{3}, x_3 = \frac{2\pi}{3}.$$

- 2) $\sin x = \sin \alpha, \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \sin \alpha \in [-1; 1]$. На полуинтервале $\left[-\frac{7\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ при любом значении α имеется два корня уравнения $\sin x = \sin \alpha$ (поскольку его длина равна 2π), кроме значений $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ (при этих значениях α — только одно решение).

Если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ есть ровно одно решение уравнения $\sin x = \sin \alpha$.

Если $\sin \alpha \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$, то на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ имеется по крайней мере еще одно решение уравнения $\sin x = \sin \alpha$.

Если $\sin \alpha \in \left[-1; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, то решений на отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ нет.

Отдельно рассмотрим случаи, когда $\sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, при которых решения пунктов 1) и 2) могут совпадать.

При $\alpha = \frac{\pi}{3}$ есть три решения пункта 1) и 4 решения пункта 2), однако, два решения $x = \frac{2\pi}{3}$ и $x = -\frac{4\pi}{3}$ совпадают, итого 5 решений.

При $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ есть три решения пункта 1) и 2 решения пункта 2), однако, одно из них совпадает, итого 4 решения.

Ответ. $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{3}; -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left\{\frac{\pi}{3}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.