Математика, заочный тур, 2004-2005гг.

(Ответы, указания, решения)

1. Решить систему

$$\begin{cases} x + xy + y = 2 + 3\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 6 \end{cases}$$

Указание. Сделать замену $u = x + y,\ v = xy$.

Ответ: $(2;\sqrt{2});\ (\sqrt{2};2)$.

2. Кузнец подковывает одно копыто за 5 минут. Лошадь не умеет стоять на двух ногах. А) За какое наименьшее время четыре кузнеца могут подковать пять лошадей? Б) За какое наименьшее время сорок восемь кузнецов могут подковать шестьдесят лошадей? Ответ обосновать

Решение. Пусть лошади именуются буквами *A, B, C, D, E.* Составим одно из возможных расписаний ковки лошадей четырьмя кузнецами (см. таблицу).

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
$8^{00}-8^{05}$	X	X	X	X	
$8^{05}-8^{10}$		X	X	X	X
$8^{10}-8^{15}$	X		X	X	X
$8^{15}-8^{20}$	X	X		X	X
$8^{20}-8^{25}$	X	X	X		X

Таким образом, четыре кузнеца могут справиться со своей работой за 25 минут. Очевидно, что за меньшее время они не могут выполнить всю работу, так как ни один кузнец не простаивает ни одной секунды. Сорок восемь кузнецов могут подковать шестьдесят лошадей также за 25 минут (каждая из 12 команд из четырех кузнецов подковывает свои пять лошадей).

Ответ: а) 25 минут, б) 25 минут.

3. Сколькими способами можно выложить в ряд восемь белых и шесть чёрных шаров так, чтобы никакие два чёрных шара не лежали рядом? Ответ обосновать

Решение. Выложим в ряд восемь белых шаров. Для расстановки черных шаров имеется девять позиций. Одна — слева от белых шаров, вторая — справа от белых шаров и семь позиций между соседними белыми шарами. Поэтому ответом будет число сочетаний из 9 возможных позиций, 6 из которых занимают черные шары.

Ответ: $C_9^6 = 84$.

4. Рассматриваются всевозможные семизначные числа с семью различными цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, записанными в произвольном порядке. Доказать, что ни одно из них не делится без остатка ни на какое другое из них же.

Указание. Сумма цифр каждого числа равна 28. Если *A* одно из этих чисел, то сумма цифр числа *A-1* равна 27 (последняя цифра числа *A* отлична от нуля). *A-1* делится на 9. *A=9k+1*при некотором натуральном *k*. Предположим, что одно из чисел *A=9k+1* делится без остатка на *B=9m+1* и их отношение равно натуральному числу *n≠1*. Тогда *9(k-nm)=n-1*. Откуда *n≥10* (так как *n-1* делится на 9 без остатка), что противоречит условию задачи.

5. При всех значениях параметра *a* решить уравнение

$$|2x+a|+|x-5|=1.$$

Указание. Один из возможных путей решения — анализ взаимного расположения графиков функций $y=|2x+a|$, $y=1-|x-5|$.

Ответ:

$a<-12$, решений нет;

$a=-12$, $x=6$;

$-12<a\le -11$, $x=\dfrac{6-a}{3}$, $x=-a-6$;

$-11<a\le -9$, $x=\dfrac{6-a}{3}$, $x=\dfrac{4-a}{3}$;

$-9<a<-8$, $x=\dfrac{4-a}{3}$, $x=-a-4$;

$a=-8$, $x=4$;

$a>-8$, решений нет.

6. Различные три действительные числа *a, b* и *c* являются решениями уравнения

$$x^3-px^2+qx-r=0$$

и удовлетворяют неравенству

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\ge abc.$$

Доказать, что

$$p\ge 0.$$

Указание. По теореме Виета $p=a+b+c$. Поэтому справедливость утверждения задачи следует из тождества:

$$(a^3+b^3+c^3)-3abc=$$

$$=(a+b+c)\left(\frac{(a-b)^2}{2}+\frac{(b-c)^2}{2}+\frac{(c-a)^2}{2}\right).$$

7. Найти все тройки целых чисел *x, y, z,* удовлетворяющих уравнению

$$(x^2-1)(y^2-1)=z^2+1.$$

Ответ обосновать.

Указание. Уравнение можно записать в виде:

$$x^2+y^2+z^2=(xy)^2. \qquad (*)$$

Поскольку квадрат целого числа *n* дает в остатке от деления на 4 ноль, если *n* четно и единицу, если *n* нечетно, то равенство возможно только в случае, если *x, y, z* четны. То есть, $x=2x_1$, $y=2y_1$, $z=2z_1$. где $2x_1, 2y_1, 2z_1$ – целые числа, удовлетворяющие уравнению:

$${x_1}^2+{y_1}^2+{z_1}^2=4(x_1y_1)^2.$$

Аналогичные рассуждения о четности приводят к выводу, что, если *x, y, z* – целые числа, удовлетворяющие уравнению (*), числа $x_k=2^{-k}\cdot x$, $y_k=2^{-k}\cdot y$, $z_k=2^{-k}\cdot z$ также являются целыми числами, удовлетворяющими уравнению

$${x_k}^2+{y_k}^2+{z_k}^2=4^k(x_ky_k)^2$$

при любом натуральном *k*, что возможно лишь при *x=y=z=0.*
Ответ: (0,0,0).

8. Биссектрисы треугольника *ABC* пересекаются в точке *Q*. Через точки *A, Q* и *C* проведена окружность. Найти длину отрезка касательной, проведенной к этой окружности из точки *B*, если известно, что *AB=a, CB=c.*
Указание. Пусть *O* – центр окружности, описанной около ΔAQC, угол *BAC* равен α. Несложно убедиться, что $\angle OQC=90^\circ-\alpha/2$, $\angle BQC=90^\circ+\alpha/2$. Следовательно точки *B, Q, O* лежат на одной прямой, содержащей диаметр окружности. При этом точки пересечения лучей *BA* и *BC* с окружностью симметричны относительно прямой *BO*. Если $c>a$, то a – длина внешней части секущей, проведенной к окружности из точки *B*, а c – длина всей секущей, проведенной из той же точки. По теореме о касательной и секущей получаем ответ.
Ответ: $\sqrt{ac}$.

Замечание. В том случае, когда $c=a$ отрезки *BA* и *BC* являются касательными к окружности.

9. Найти наибольшее значение функции

$$f(x)=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{1+x}}}}+\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{1-x}}}}.$$

Ответ обосновать.
Указание. Нетрудно убедиться в том, что для любых неотрицательных чисел a и b справедливо неравенство:

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{2(a+b)}.$$

Применяя несколько раз это неравенство, можно получить оценки:

$$\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{1+x}}}}+\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{1-x}}}}\le$$
$$\sqrt{2(1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{1+x}}}+1+\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{1-x}}})}\le\ldots$$
$$\le 2\sqrt{3}.$$

Причем $f(0)=2\sqrt{3}$ (проверяется непосредственно).
Ответ: $2\sqrt{3}$.

10. Разрезать два данных квадрата на части, из которых можно сложить новый квадрат (все части должны быть использованы).

Указание. Решение понятно из рис. 1. Жирными линиями ограничены исходные квадраты. Тонкой линией – суммарный квадрат. Нумерацией показано, как переставлять части исходных квадратов.

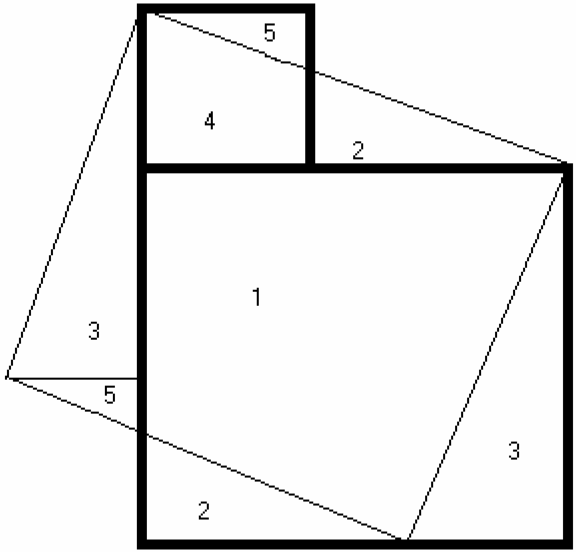

Рис. 1