Математика 2005

(Заочный тур, 2005-2006 гг.)

1. Решить систему
$$\begin{cases} x^2 + 3xy - y^2 = 3, \\ 3x^2 - xy + y^2 = 3. \end{cases}$$
2. Каких натуральных чисел от 1 до 1000000 больше: делящихся на 11, но не делящихся на 13 или делящихся на 13, но не делящихся на 11?
3. Известно, что a^2, b^2, c^2 – арифметическая прогрессия с ненулевой разностью. Доказать, что тогда и
$$\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}$$
тоже арифметическая прогрессия
4. Известно, что $\cos\alpha + \cos\beta = p$, $\sin\alpha + \sin\beta = q$. Выразите через p и q
   a) $\cos(\alpha - \beta)$;
   b) $\cos(\alpha + \beta)$,

   считая в последнем случае, что $p^2 + q^2 \neq 0$.
5. Решить неравенство
$$\left(\log_{|x+6|} 2\right) \cdot \log_2(x^2 - x - 2) \geq 1.$$
6. В равнобедренном остроугольном треугольнике *ABC* (*AB*=*BC*) проведена высота *BH*, *Q*—точка пересечения высот. Найти периметр треугольника *ABC*, если известно, что *AB*=*14*, а длины отрезков *BQ* и *HQ* — целые числа.
7. Решить в целых числах уравнение
$$4x^2 - 2xy + x + y = 1$$
8. Доказать, что при всех действительных a и b справедливо неравенство:
$$a \cdot (1-a) \cdot b \cdot (1-b) \geq -(a-b)^2$$
9. Пусть *ABC* — остроугольный треугольник. Доказать, что существует треугольник $A_1B_1C_1$ со сторонами $A_1B_1 = AB\cdot\cos\angle C$, $B_1C_1 = BC\cdot\cos\angle A$, $C_1A_1 = CA\cdot\cos\angle B$.
10. При всех значениях параметра a из отрезка $\left[0, \frac{9\pi^2}{4}\right]$ определить количество решений (x, y) системы:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ tg\, x + \dfrac{1}{|\cos x|} = ctg\, y + \dfrac{1}{|\sin y|} \end{cases}$$

(Ответы, указания, решения)

№1. ***Указание.*** Вычитая из второго уравнения первое, получим

$$2(x-y)^2=0$$

или $x=y$.

Ответ: $(1;1);\ (-1;-1)$.

№2. ***Указание.*** Пусть $[a]$ — наибольшее целое число, не превосходящее a (целая часть числа a). Тогда $\left[\frac{1000000}{11}\right]$ – это количество чисел из интервала [1;100000], кратных 11; $\left[\frac{1000000}{13}\right]$ – это количество чисел из того же интервала, кратных 13. Разность

$$\left[\frac{1000000}{11}\right]-\left[\frac{1000000}{11\cdot 13}\right]-$$

это количество чисел, кратных 11, но не кратных 13, а

$$\left[\frac{1000000}{13}\right]-\left[\frac{1000000}{11\cdot 13}\right]-$$

это количество чисел, кратных 13, но не кратных 11. Сравнивая эти выражения, приходим к ответу.

Ответ: Количество натуральных чисел от 1 до 1000000, делящихся на 11, но не делящихся на 13 больше, чем делящихся на 13, но не делящихся на 11.

№3. ***Указание.*** Достаточно показать, что из условия

$$b^2=\frac{1}{2}(a^2+c^2)$$

следует, что

$$\frac{1}{a+c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}\right).$$

№4. ***Указание.*** Из условий задачи следует, что

$$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=p^2,$$
$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=q^2.$$

Сложив эти соотношения, получим

$$2+2\cos(\alpha-\beta)=p^2+q^2,$$

вычитая из первого соотношения второе, получим

$$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+2\cos(\alpha+\beta)=p^2-q^2$$

или

$$2\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)+2\cos(\alpha+\beta)=p^2-q^2.$$

Анализируя эти соотношения, получаем ответ.

Ответ: $\cos(\alpha-\beta)=\frac{p^2+q^2}{2}-1,\ \cos(\alpha+\beta)=\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}.$

№5. ***Ответ:*** $x\in(-\infty;-7)\cup(-5;-2]\cup[4;\infty).$

№6. ***Указание.*** Легко убедиться, что треугольник AQH подобен треугольнику BCH. Откуда следует, что

$$HQ\cdot BH=AH\cdot HC=49.$$

Поскольку из условия HQ и BH – целые и $HQ<BH$, то $BH=49$. По теореме Пифагора найдем боковые стороны треугольника.

Ответ: $14+70\sqrt{2}.$

№7. ***Указание.*** Уравнение может быть приведено к виду:

$$2y = 4x + 3 + \frac{1}{2x-1}.$$

Так как x и y – целые числа, то $2x - 1 = \pm 1.$

Ответ: (1;4), (0;1).

№8. ***Указание.*** Исходное неравенство эквивалентно неравенству:

$$(ab-a)^2 + (ab-b)^2 + (a-b)^2 \ge 0.$$

№9. ***Указание.*** Пусть AA_1, BB_1,, CC_1 – высоты остроугольного треугольника ABC. Тогда «высотный» треугольник $A_1B_1C_1$ удовлетворяет условиям задачи. Действительно, из прямоугольных треугольников ABA_1 и CBC_1 имеем

$$\frac{A_1B}{AB} = \frac{C_1B}{CB} = \cos\angle B.$$

По второму признаку подобия (угол B – общий) треугольник A_1BC_1 подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\cos\angle B.$ В частности, $A_1C_1 = AC\cdot\cos\angle B.$ Аналогично доказывается, что $B_1C_1 = BC\cdot\cos\angle A,$ $A_1B_1 = AB\cdot\cos\angle C.$

№10. ***Указание.*** Пусть $u = tg\, x,\ v = ctg\, y.$ Тогда второе уравнение системы примет вид:

$$u + \sqrt{u^2+1} = v + \sqrt{v^2+1} \qquad (*)$$

Умножим это равенство на $(\sqrt{u^2+1} - u)(\sqrt{v^2+1} - v),$ получим:

$$\sqrt{v^2+1} - v = \sqrt{u^2+1} - u.$$

Складывая (*) с последним соотношением, получим $u = v$. Поэтому исходная система равносильна системе:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ tg\ x = ctg\ y. \end{cases}$$

Анализируя взаимное расположение окружности, задаваемой первым уравнением, с семейством прямых

$$x + y = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$$

(определяемых вторым уравнением системы) с учетом ОДЗ ($y \ne \pi m, x \ne \frac{\pi}{2} + \pi k, m, k \in Z$) получаем ответ.

Ответ:

При $0 \le a < \frac{\pi^2}{8}$ решений нет;

при $a = \frac{\pi^2}{8}$ два решения;

при $\frac{\pi^2}{8} < a < \frac{\pi^2}{4}$ четыре решения;

при $a = \frac{\pi^2}{4}$ два решения;

при $\frac{\pi^2}{4} < a < \frac{9\pi^2}{8}$ четыре решения;

при $a = \frac{9\pi^2}{8}$ шесть решений;

при $\frac{9\pi^2}{8} < a < \frac{5\pi^2}{4}$ восемь решений;

при $a = \frac{5\pi^2}{4}$ четыре решения;

при $\frac{5\pi^2}{4} < a < \frac{9\pi^2}{4}$ восемь решений;

при $a = \frac{9\pi^2}{4}$ шесть решений.