

На правах рукописи

Карелин

КАРЕЛИН ИВАН СЕРГЕЕВИЧ

**ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ
СОСТАВНЫХ ПОРОУПРУГИХ ТЕЛ**

Специальность 01.02.04 –
Механика деформируемого твердого тела

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород – 2012

Работа выполнена в «Научно-исследовательском институте механики»
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского»

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор

Игумнов Леонид Александрович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор

Александров Виктор Михайлович

доктор физико-математических наук,
профессор

Ерофеев Владимир Иванович

Ведущая организация:

**Южный научный центр РАН
(г. Ростов-на-Дону)**

Защита состоится 28 июня 2012 г. в 15:00 часов на заседании
диссертационного совета Д 212.166.09 при Нижегородском
государственном университете им. Н.И. Лобачевского по адресу:
603950, Н.Новгород, пр. Гагарина, 23, корп.6.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной
библиотеке Нижегородского государственного университета.

Автореферат разослан 26 мая 2012 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 212.166.09
доктор физико-математических наук,
профессор



Л.А. Игумнов

Пористые материалы широко распространены в природе и технике: насыщенные газом или жидкостью грунты и горные породы, конструкционные и строительные материалы и т.п. В связи с этим в развитии механики пористых материалов заинтересованы специалисты химических, нефтехимических отраслей, специалисты по гео- и биомеханике и т.д. Значительный интерес представляет исследование волновых процессов в пороупругих телах.

Математическое моделирование многокомпонентных сред восходит к работе Л.Эйлера. За прошедшее время не построена общепринятая модель. Принципиальной особенностью пористой среды является учет механизма втекания или вытекания наполнителя (жидкости, газа) в область, формируемую порами. Такое явление особенно важно при рассмотрении волновых процессов. Динамическое поведение наполнителя усложняет модель среды.

Началом исследований волновых процессов в насыщенных пористых средах послужила работа Я.И. Френкеля (1944). Косачевским Л.Я. в 1959 году было показано, что теория М. Био (1956), как и подход Я.И. Френкеля, опирается на те же соотношения между напряжениями и деформациями, но отличается большей общностью. Анализ работ М.Био и Я.И. Френкеля в 2005 году был проведен S.K. Pride и S. Garambois, которые также установили общность предложенных теорий.

Вслед за Я.И. Френкелем интерес к изучению волн в пористых насыщенных средах стимулировали работы следующих авторов: К. Цвиккер и К. Костен (1952), Дж. Гиртсма и Д. Смит (1961), Л.М. Дорогиницкая и др. (1964), П.П. Золотарев (1963), В.Н. Николаевский (1963), В.П. Степанов (1963), С. McCann и D.M. McCann, (1969) и многие другие. Состояние вопроса раскрыто в работах R. de Boer (2000), M.Schanz (2001, 2009), Н.С. Городецкой (2005), В.Н. Николаевского (2005).

Ключевым результатом в распространении волн в полностью насыщенной пористой среде стало предсказание существования трех типов

волн: быстрой и медленной продольных волн и поперечной волны. Медленная продольная волна свойственна именно пористой среде.

Работы по изучению распространения волн в пористых телах и средах опираются на метод нормальных мод, лучевые методы, метод контурных интегралов. Среди численных методов традиционно активно используются методы конечных элементов и конечных разностей.

В работе рассматриваются краевые задачи динамики пороупругих тел, которые могут быть строго сведены к решению граничных интегральных уравнений (ГИУ). Решение возникающих сингулярных ГИУ ориентировано на метод граничных элементов (МГЭ). Известное преимущество МГЭ позволяет преодолеть ограничения ряда аналитических и численно-аналитических методов относительно форм границы, полостей и т.п. Для рассматриваемого класса краевых задач высокая точность получаемых результатов обеспечивается применением МГЭ. Можно подчеркнуть, что исследование волновых процессов в полубесконечных телах является естественным для применения ГИУ и МГЭ.

Цель работы заключается в развитии МГЭ методики и программного обеспечения на основе интегрального преобразования Лапласа для решения трехмерных задач динамики составных пороупругих тел, а также исследования динамического деформирования составных пороупругих тел.

Методика исследований основана на ГИУ прямого подхода для трехмерной линейной теории пороупругости; на интегральном преобразовании Лапласа и численном обращении этого преобразования на основе метода Дурбина; на МГЭ, использующем регуляризованное ГИУ, согласованную поэлементную аппроксимацию границы и граничных функций, численное поэлементное интегрирование по Гауссу и т.п.

Достоверность исследований основана на эквивалентности исходной краевой задачи в частных производных математической теории пороупругости системе используемых ГИУ; на применении для численных исследований регуляризованных ГИУ; на детально проработанных алгоритмах МГЭ-подхода; на анализе сходимости ГЭ-решений и сравнении полученных результатов с аналитическими решениями и ГЭ-решениями других авторов.

Научную новизну работы составляют: ГЭ-моделирование краевых задач составных тел трехмерной динамической пороупругости на основе согласованной поэлементной аппроксимации на обобщенных четырехугольных элементах, в то время как другими авторами используется изопараметрический подход на основе треугольных элементов; ГЭ-моделирование в сочетании с методом Дурбина численного обращения преобразования Лапласа, поддерживаемое оригинальным программным обеспечением ГЭ-подхода; ГЭ-решения в трехмерной постановке волновых задач о действии силы в виде функции Хевисайда по времени на составное пороупругое полупространство; ГЭ-моделирование эффекта возбуждения медленной волны в динамическом отклике порового потока.

Практическая значимость результатов исследования состоит в комплексном развитии методов Дурбина и граничных элементов с целью получения устойчивых высокоточных численных решений краевых задач трехмерной теории пороупругости; в создании МГЭ программного обеспечения для анализа динамики составных трехмерных пороупругих тел с использованием интегрального преобразования Лапласа; в ГЭ-решении в трехмерной постановке задачи о действии вертикальной силы в виде функции Хевисайда по времени на составное пороупругое полупространство; в ГЭ-моделировании эффекта возбуждения медленной волны в динамических откликах поровых давления и потока.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Методика и программное обеспечение ГЭ-решения систем ГИУ прямого подхода в сочетании с методом Дурбина для анализа динамики трехмерных составных пороупругих тел.
2. ГЭ-моделирование эффекта возбуждения медленной волны в динамических откликах поровых давления и потока.
3. ГЭ-решение следующих волновых задач:
 - о действии силы в виде функции Хевисайда по времени на торцы составных пороупругих призматических тел;
 - о действии вертикальной силы в виде функции Хевисайда по времени на поверхности составных пороупругих полупространств.

Апробация работы

Результаты диссертационной работы докладывались на Всероссийской научно-технической конференции, посвященной 20-летию Нижегородского филиала ИМАШ РАН им. А.А. Благодного (Н.Новгород, 2006); XII, XIII, XIV, XV, XVI Нижегородских сессиях молодых ученых – математические науки (Н.Новгород, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011); XII, XIII, XIV Международных конференциях «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 2008, 2009, 2010); XXIII Международной конференции «Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов» (С.-Петербург, 2009); XVI, XVII Международных симпозиумах «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» (Ярополец, 2010, 2011, 2012); X Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Н.Новгород, 2011).

Публикации По теме диссертации опубликовано 20 работ. В журналах, рекомендуемых ВАК для защит кандидатских диссертаций, опубликовано 7 работ [1-7]: две работы [5, 7] выполнены без соавторов; 5 работ [1-4, 6] опубликованы в соавторстве. В работах [2-4, 6]

И.С. Карелину принадлежит получение численных результатов. В работе [1] И.С. Карелину принадлежит выбор расчетной ГЭ-схемы.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы из 132 наименований. Общий объем диссертации составляет 138 страниц машинописного текста, включая 5 таблиц, 147 рисунков.

На различных этапах работа поддерживалась грантами Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (№ НШ-3367.2008.8 2008-2009 гг.; № НШ-4807.2010.8. 2010-2011гг.); средствами ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009 - 2013 годы (ГК №П2222 от 11 ноября 2009г., ГК №П27 от 25 марта 2010г., ГК №П1185 от 27 августа 2009г., ГК №П217 от 22 июля 2009г., ГК №02.740.11.0410 от 30 сентября 2009г., ГК №14.740.11.0872 от 29 апреля 2011г.); грантами РФФИ (№ 10-08-01017-а, № 12-08-00984-а).

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение содержит краткое состояние вопроса по теориям Био и МГЭ и их применению к решению задач динамики; обоснование актуальности темы диссертационной работы; формулировки цели работы и основных положений, которые выносятся на защиту.

Состояние вопроса по применению методов ГИУ и МГЭ к решению задач пороупругости до 2000г. раскрыто в работе М. Chopra (2001). Среди последующих исследований отметим работы авторов М. Schanz; D. Pryl; D.-Shebg J. и др.; М. Bouchon; J.-S. Pan; J.-F.Lu, D.-S. Jeng, S. Williams; D. Soares, J.C.F. Telles, W.J. Mansur; O. Maeso, J.J. Aznarez, F. Garcia; S.E. Kattis, D.E. Beckos, A.H.-D. Cheng; T. Senjuntichai, S. Mani, R.K.N.D. Rajapakse; J. Liang, H. You, V.W. Lee и др. Применение методов ГИУ и МГЭ к решению краевых задач динамики пороупругих тел находится в стадии становления. Так в работах Л.А.Игумнова с соавторами установлены неточности в записи сингулярных решений для одной из

пороупругих моделей, приводящие к существенным ошибкам в ГЭ-расчетах.

В главе I подробно описана система уравнений полной сжимаемой модели Био, когда в качестве базовых функций выбраны поровое давление и перемещение упругого скелета; сформулирована математическая модель краевой задачи в изображениях по Лапласу; приведены матрицы фундаментальных и сингулярных решений; представлена схема построения ГИУ прямого подхода; дано описание ГЭ-методики.

В первом параграфе введены понятия пористости; представлены деформации в скелете через линейные геометрические соотношения Коши; физические соотношения (связь напряжений, деформаций, порового давления) с введением параметров, характеризующих взаимодействие между скелетом и наполнителем; даны понятия эффективного напряжения, изменение объема текучей среды на единицу исходного объема; приведены уравнения неразрывности и движения; записан динамический вариант закона Дарси и т.п. Итоговая система дифференциальных уравнений в изображениях по Лапласу для полной сжимаемой модели Био имеет вид:

$$G\tilde{u}_{i,jj} + \left(K + \frac{1}{3}G \right) \tilde{u}_{j,ij} - (\alpha - \beta)\tilde{p}_{,i} - s^2(\rho - \beta\rho_f)\tilde{u}_i = -\tilde{F}_i,$$

$$\frac{\beta}{s\rho_f}\tilde{p}_{,ii} - \frac{\phi^2 s}{R}\tilde{p} - (\alpha - \beta)s\tilde{u}_{i,i} = -\tilde{a}, \quad i, j = \overline{1,3},$$

$$\beta = \frac{k\rho_f\phi^2 s^2}{\phi^2 s + s^2 k(\rho_a + \phi\rho_f)},$$

где \tilde{u}, \tilde{p} – изображения вектора перемещений и порового давления; запись $\tilde{u}_{j,ij}$ означает дифференцирование j -ой компоненты вектора \tilde{u} по i -ой и j -ой координатам; s – параметр преобразования Лапласа; G, K – константы упругости; ϕ – пористость; k – проницаемость; α – эффективный коэффициент напряжений; ρ, ρ_a, ρ_f – плотности пористого

скелета, присоединенной массы и жидкой среды; \tilde{F}_i, \tilde{a} – плотности источников.

Во втором параграфе сформулирована математическая модель пороупругой динамической краевой задачи для составного трехмерного тела.

В третьем параграфе представлены матрицы фундаментальных и сингулярных решений для дифференциальных уравнений полной модели Био. Приведено выделение следующих сингулярных составляющих компонент матриц

$$[\tilde{U}_{ij}] = \begin{bmatrix} U_{ij} & -0 \\ 0 & -P \end{bmatrix}, \quad [\tilde{T}_{ij}] = \begin{bmatrix} T_{ij} & -Q_j \\ T_i & -Q \end{bmatrix}, \quad i, j = \overline{1,4}.$$

$$P = \frac{\rho_f s}{4\pi\beta} \frac{1}{r}, \quad Q = -\frac{r_{,n}}{4\pi r^2},$$

$$U_{ij} = \frac{1+\nu}{8\pi E(1-\nu)} \left\{ r_{,i} r_{,j} + \delta_{ij} (3-4\nu) \right\} \frac{1}{r},$$

$$Q_j = \frac{1+\nu}{8\pi E(1-\nu)} \left\{ \alpha(1-2\nu)(r_{,n} r_{,j} - n_j) - 2\beta(1-\nu)(r_{,n} r_{,j} + n_j) \right\} \frac{1}{r},$$

$$T_i = \frac{\rho_f s^2}{8\pi\beta} \left\{ (\alpha - \beta) \frac{1-2\nu}{1-\nu} r_{,i} r_{,j} + n_i \frac{\alpha + \beta(1-2\nu)}{1-\nu} \right\} \frac{1}{r},$$

$$T_{ij} = \frac{-[(1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i} r_{,j}] r_{,n} + (1-2\nu)(r_{,j} n_i - r_{,i} n_j)}{8\pi(1-\nu)r^2},$$

где ν - коэффициент Пуассона; E - модуль Юнга; $r_{,i}$ - означает производную по i -ой координате от радиус-вектора r ; $r_{,n}$ - производная по нормали \vec{n} ; δ_{ij} - символ Кронекера.

Подчеркнем, что выделенные особенности содержатся в фундаментальных и сингулярных решениях трехмерной упругой статики и идеальной несжимаемой жидкости. Принципиальным для пороупругой динамики является тот факт, что для одной матрицы особенности по координатам разных компонент могут быть разные. Для соответствующих матриц фундаментальных и сингулярных решений задач трехмерной

упругой статики, идеальной несжимаемой жидкости и трехмерной упругой динамики все компоненты одной матрицы имеют один порядок особенности по координатам.

В четвертом параграфе дано описание МГЭ, как метода решения ГИУ прямого подхода, совместно с применением интегрального преобразования Лапласа по времени и методом Дурбина численного обращения. На основе аналитического одномерного пороупругого решения численно продемонстрирован эффект возбуждения медленной волны в динамических откликах поровых давления и потока пороупругого стержня.

Глава II содержит описание программного обеспечения ГЭ-моделирования трехмерных краевых задач пороупругости с применением интегрального преобразования; примеры ГЭ-решения модельных задач; ГЭ-моделирование эффекта возбуждения медленной волны в трехмерном призматическом пороупругом теле.

В первом параграфе дано описание программного обеспечения. Представлена функциональная схема, выделены три группы модулей: управляющая программа, функциональные и обслуживающие модули. Функциональные модули сгруппированы по ключевым этапам ГЭ-схемы. Описаны возможности по организации параллельных вычислений. В качестве примера эксплуатации программного обеспечения приведен вариант входного потока задания для решения задачи о действии силы в виде функции Хевисайда по времени на торец составного пороупругого призматического тела.

Во втором параграфе решена задача о действии силы в виде функции Хевисайда по времени на торец однородного упругого призматического тела. Задача решена для демонстрации новых возможностей программного обеспечения: повышение точности получаемых результатов по сравнению с другими авторами.

В третьем параграфе решена задача о действии силы в виде функции Хевисайда по времени на торец однородного пороупругого тела. Результаты расчетов сравниваются с аналитическим решением и ГЭ-

решением других авторов. Задача послужила полигоном для выбора рабочей ГЭ-сетки к задаче о составном теле, кроме того дано ГЭ-моделирование эффекта возбуждения медленной волны в откликах поровых давления и потока. Для этих целей рассмотрено составное пороупругое призматическое тело длиной 9 м (рис. 1) со следующими параметрами материала $K=8 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $G=6 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $\rho=2458 \text{ кг/м}^3$, $\phi=0.19$, $K_s=3.6 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $\rho_f=1000 \text{ кг/м}^3$, $K_f=3.3 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2$, $k=3.6 \cdot 10^{-10} \text{ м}^4/(\text{Н} \cdot \text{с})$. На рис. 2-3 представлены ГЭ-решения – графики поровых давления p и потока q в точке A . Маркировка кривых принята в зависимости от значения коэффициента проницаемости: $\circ - k = 1.9 \cdot 10^{-10}$, $\Delta - k = 1.9 \cdot 10^{-7}$, $\square - k = 1.9 \cdot 10^{-6}$.

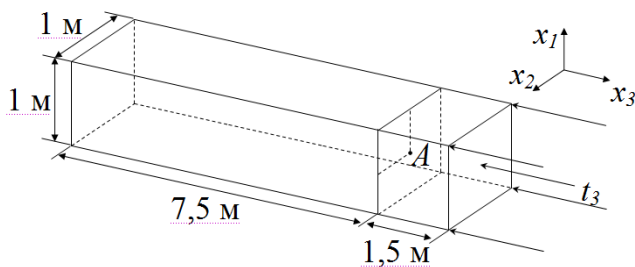


Рис. 1

Граничные условия:

На нагруженном торце:

Известные:

$$t_1 = 0, t_2 = 0, t_3 = -1f(t), p = 0$$

Неизвестные:

$$u_i (i=1,3), q$$

На остальных гранях $\Gamma_j, (j=1,5)$:

$$\Gamma_j \perp x_k$$

Известные:

$$u_k = 0, t_i = 0 (i=1,3, i \neq k), q = 0$$

Неизвестные:

$$u_i = 0 (i=1,3, i \neq k), t_k = 0, p$$

На ребрах:

$$d_{js} = \Gamma_j \cap \Gamma_s$$

Известные:

$$u_j = 0, u_s = 0, t_i = 0 (i=1,3, i \neq j, i \neq s), q = 0$$

Неизвестные:

$$u_i = 0 (i=1,3, i \neq j, i \neq s), t_j = 0, t_s = 0, q = 0$$

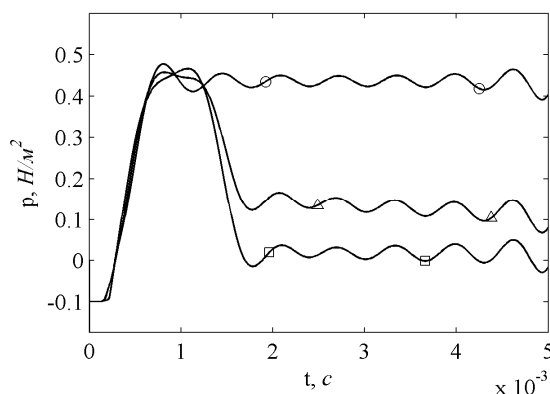


Рис. 2

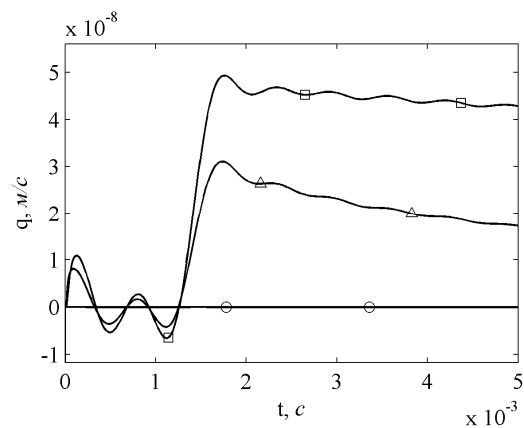


Рис. 3

По динамическим откликам поровых давления и потока видно, что с ростом значения параметра проницаемости можно продемонстрировать эффект возбуждения в пороупругом теле медленной продольной волны: происходит падение амплитуды динамического отклика порового давления с параллельным нарастанием амплитуды динамического отклика порового потока.

В четвертом параграфе решена задача о действии силы в виде функции Хевисайда по времени на торец составного пороупругого тела: при разных значениях модуля Юнга представлены отклики перемещений на торце действия силы и в плоскости контакта, а также представлены отклики давлений в плоскости контакта и на закрепленном торце.

В главе III приведены ГЭ-решения задач о полупространстве.

Первый параграф содержит ГЭ-решение задачи о действии вертикальной силы в виде функции Хевисайда по времени на поверхность однородного пороупругого полупространства. Задача использована для подбора рабочей ГЭ-сетки: приведены решения на разных сетках, и дано сравнение с решением другого автора. Задача решена с введением фиктивной контактной границы параллельно дневной поверхности. Дано исследование влияния второй компоненты (наполнителя) пороупругого материала на поверхностные волны: сравниваются упругие и пороупругие отклики соответствующих задач. Показано влияние коэффициента проницаемости на скорость волны Рэлея. На примере откликов поровых давления и потока на фиктивной границе (точка E) продемонстрирован эффект возбуждения третьей

волны в пороупругом полупространстве. Для этих целей рассмотрена задача, изображенная на рис. 4. Для составного пороупругого полупространства при условии полного контакта слоев принималась толщина

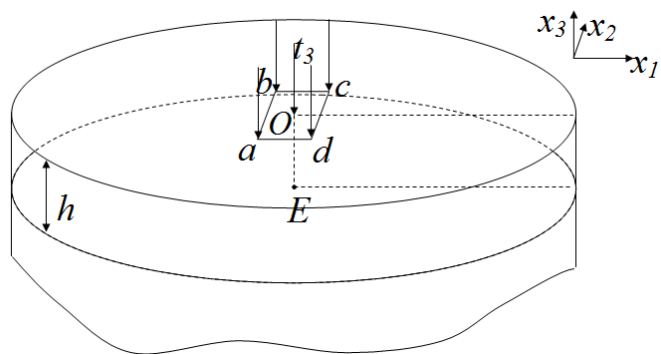


Рис. 4

верхнего слоя $h=4м$ и выбирались следующие краевые условия: на дневную поверхность полупространства на участке $abcd$ размером $6м \times 6м$ действует сила $t_3 = -1_+(t)H / м^2$, где $1_+(t)$ – функция Хевисайда, а остальная часть дневной поверхности свободна от поверхностной силы при нулевом значении порового давления на всей дневной поверхности. В качестве параметров пороупругого материала была взята скальная порода с параметрами $K=8 \cdot 10^9 Н / м^2$, $K_s=3.6 \cdot 10^9 Н / м^2$, $G=6 \cdot 10^9 Н / м^2$, $k=3.6 \cdot 10^{-10} м^4 / (Н \cdot с)$, $\phi=0.19$, $\rho=2458 кг / м^3$, $\rho_f=1000 кг / м^3$, $K_f=3.3 \cdot 10^9 Н / м^2$. ГЭ-сетка на четверти геометрии состоит из 792 элементов на верхнем слое и 688 элементов на нижнем слое. На рис. 5-6 представлены поровые давление p и поток q в точке E , при этом маркировка кривых принята в зависимости от значения параметра проницаемости k : $\circ - k = 1.9 \cdot 10^{-10}$, $\Delta - k = 1.9 \cdot 10^{-7}$, $\square - k = 1.9 \cdot 10^{-6}$.

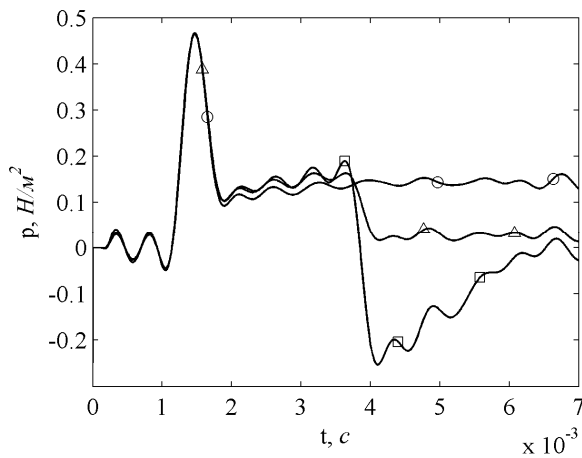


Рис. 5

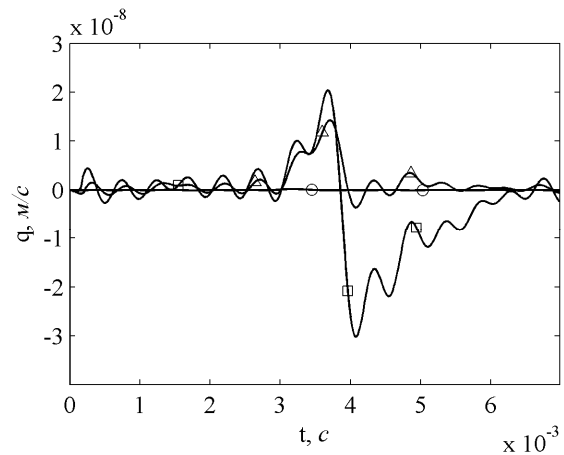


Рис. 6

Во втором параграфе решена задача о действии вертикальной силы в виде функции Хевисайда по времени на поверхность двухслойного пороупругого полупространства: рассмотрены случаи с более жестким и более мягким верхним слоем по отношению к опорному полупространству – однородное полупространство, на котором располагается слой. Дано сравнение ГЭ-результатов с результатами других авторов. При условии полного контакта слоев выбирались следующие краевые условия: на дневной поверхности составного полупространства на участке $abcd$ (рис.

4) размером $1\text{ м} \times 1\text{ м}$ действует сила $t_3 = -1000 \cdot 1_+(t) H / \text{м}^2$, где $1_+(t)$ – функция Хевисайда, а остальная часть дневной поверхности свободна от поверхностной силы при нулевом значении порового давления на всей дневной поверхности. Исследовался динамический отклик на дневной поверхности составного полупространства при удалении от источника силы на 10 м . Толщина верхнего слоя принималась $h=10\text{ м}$. ГЭ-сетка на четверти геометрии состоит из 816 элементов для верхнего слоя и 688 элементов для нижнего слоя. В качестве верхнего слоя взят песок с параметрами $K=2.1 \cdot 10^8 H / \text{м}^2$, $G=9.8 \cdot 10^7 H / \text{м}^2$, $\rho=1884 \text{ кг} / \text{м}^3$, $\phi=0.48$, $K_s=1.1 \cdot 10^{10} H / \text{м}^2$, $\rho_f=1000 \text{ кг} / \text{м}^3$, $K_f=3.3 \cdot 10^9 H / \text{м}^2$, $k=3.55 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4 / (H \cdot \text{с})$, в качестве материала опорного полупространства взята скальная порода с параметрами $K=8 \cdot 10^9 H / \text{м}^2$, $G=6 \cdot 10^9 H / \text{м}^2$, $\rho=2458 \text{ кг} / \text{м}^3$, $\phi=0.19$, $K_s=3.6 \cdot 10^9 H / \text{м}^2$, $\rho_f=1000 \text{ кг} / \text{м}^3$, $K_f=3.3 \cdot 10^9 H / \text{м}^2$, $k=3.6 \cdot 10^{-10} \text{ м}^4 / (H \cdot \text{с})$. На рис. 7 представлено вертикальное перемещение во времени в исследуемой точке.

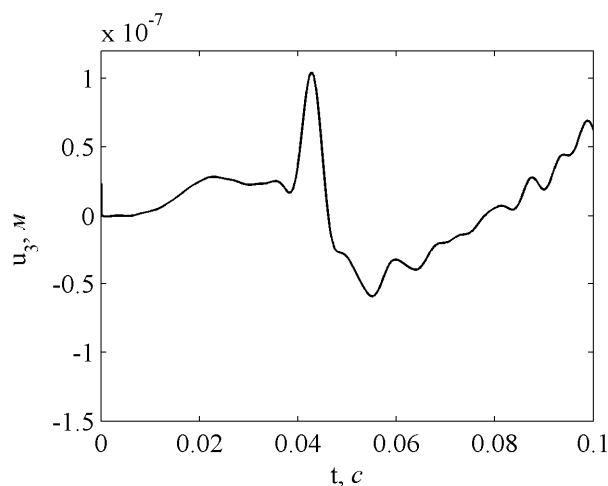


Рис. 7

В заключении сформулированы основные результаты, полученные в диссертации.

Основные результаты и выводы

1. Развита методика и создано программное обеспечение для численного решения систем ГИУ прямого подхода в сочетании с

методом Дурбина для анализа динамики трехмерных составных пороупругих тел.

2. Дано ГЭ-моделирование эффекта возбуждения медленной волны в динамических откликах поровых давления и потока.
3. Получены ГЭ-решения следующих волновых задач:
 - о действии силы в виде функции Хевисайда по времени на торцы составных пороупругих призматических тел;
 - о действии вертикальной силы в виде функции Хевисайда по времени на поверхности составных пороупругих полупространств.

Основные результаты и защищаемые положения диссертации опубликованы в следующих работах:

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ

1. Аменицкий А.В., Игумнов Л.А., Карелин И.С. Развитие метода граничных элементов для решения проблемы распространения волн в пористых средах // Проблемы прочности и пластичности: Межвузовский сборник. Н.Новгород: Изд-во ННГУ. 2008. Вып.70. С. 71-78.
2. Аменицкий А.В., Белов А.А., Игумнов Л.А., Карелин И.С. Граничные интегральные уравнения для решения динамических задач трехмерной теории пороупругости // Проблемы прочности и пластичности: Межвузовский сборник. Н.Новгород: Изд-во ННГУ. 2009. Вып.71. С. 164-171.
3. Белов А.А., Игумнов Л.А., Карелин И.С., Литвинчук С.Ю. Применение метода ГИУ для решения краевых задач трехмерных динамических теорий вязко- и пороупругости // Электронный журнал «Труды МАИ». 2010. Выпуск № 40. С. 1-20.
4. Белов А.А., Карелин И.С. Частные решения динамической пороупругости в одномерной постановке // Проблемы прочности и пластичности: Межвузовский сборник. Н.Новгород: Изд-во ННГУ. 2010. Вып. 72. С.159-164.

5. Карелин И.С. Гранично-элементное моделирование частных аналитических решений трехмерной теории пороупругости // Проблемы прочности и пластичности: Межвузовский сборник. Н.Новгород: Изд-во ННГУ. 2010. Вып. 72. С.165-168.
6. Игумнов Л.А., Карелин И.С. Решение трехмерных задач динамической теории пороупругости методом граничных элементов с применением параллельных вычислений // Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского. Сер. Механика. Н.Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета. 2011. С. 153-157.
7. Карелин И.С. Моделирование динамики пороупругих составных тел методом граничных элементов с использованием параллельных вычислений: Доклады X Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Сер. Механика. Н.Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета. 2011. №4(4). С.1518-1519.

Другие публикации

8. Аменицкий А.В., Игумнов Л.А., Карелин И.С. Гранично-элементное моделирование распространения волн в среде Био // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XII международной конференции, г. Ростов-на-Дону, 2008. Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР». 2008. Т. С.9-12.
9. Игумнов Л.А., Карелин И.С. Численное решение краевых задач трехмерной динамической теории пороупругости методом ГИУ // Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов. Тезисы докладов XXIII Международной конференции СПб: 28 сентября – 1 октября 2009г. Изд-во ООО «НИЦ МОРИНТЕХ». С.93.
10. Игумнов Л.А., Карелин И.С. Численное решение краевых задач трехмерной динамической теории пороупругости методом ГИУ // Математическое моделирование в механике деформируемых тел и

- конструкций. Методы граничных и конечных элементов. Труды XXIII Международной конференции ВЕМ&FEM-2009. СПб: 28 сентября - 01 октября 2009г. Изд-во ООО «НИЦ МОРИНТЕХ». С.182-185.
11. Белов А.А., Игумнов Л.А., Карелин И.С. Численное моделирование волн в пороупругих телах и средах // Современные проблемы механики сплошной среды. Тезисы докладов XIII международной конференции, Ростов-на-Дону, 12-15 октября 2009г. Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР». 2009. С.33.
 12. Белов А.А., Игумнов Л.А., Карелин И.С. Численное моделирование волн в пороупругих телах и средах // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XIII международной конференции, Ростов-на-Дону, 12-15 октября 2009г. Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР». 2009. С.27-31.
 13. Воробцов И.В., Игумнов Л.А., Карелин И.С. Применение метода ГИУ для решения задач трехмерной динамической теории пороупругости // 14 Нижегородская сессия молодых ученых – математические науки. Н.Новгород: Изд-во Гладкова О.В., 2009 г. С.32.
 14. Белов А.А., Игумнов Л.А., Карелин И.С., Литвинчук С.Ю. Применение метода ГИУ для решения краевых задач трехмерных динамических теорий вязко- и пороупругости // Материалы XVI Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г.Горшкова. Ч.: ГУП «ИПК «Чувашия». 2010. Т.1. С.21-23.
 15. Белов А.А., Игумнов Л.А., Карелин И.С. Гранично-элементный анализ динамики трехмерных пористо-упругих тел // 15 Нижегородская сессия молодых ученых – Технические науки. Н.Новгород: Изд-во Гладкова О.В., 2010 г. С.29.
 16. Игумнов Л.А., Карелин И.С. Моделирование поверхностных волн на границе пороупругого полупространства // Современные проблемы механики сплошной среды. Тезисы докладов XIV международной конференции, Ростов-на-Дону, 19-24 июня 2010г. Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР». 2010. С.39.

17. Игумнов Л.А., Карелин И.С. Моделирование поверхностных волн на границе пороупругого полупространства // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XIV межд.конф., Ростов-на-Дону, 19-24 июня 2010г. Ростов-на-Дону: Изд-во ООО «ЦВВР». 2010. С.129-133.
18. Воробцов И.В., Белов А.А., Карелин И.С. Гранично-элементное моделирование распространения пороупругих волн // 15 Нижегородская сессия молодых ученых – математические науки. Н.Новгород: Изд-во Гладкова О.В., 2010 г. – С.47.
19. Игумнов Л.А., Карелин И.С. Гранично-элементное моделирование поверхностных волн для пористо-упругого полупространства // Материалы XVII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г.Горшкова. М.: ООО «ТР-принт. 2011. Т.1. С.82.
20. Карелин И.С. Моделирование динамики пороупругих составных тел методом граничных элементов с использованием параллельных вычислений // Современные методы механики – X Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Вторая Всероссийская школа молодых ученых-механиков. Тезисы докладов (Нижний Новгород, 24–30 августа 2011 г.). Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета. 2011. С.59-60.

Подписано в печать ____ .05.2012 г. Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1. Заказ № ____ . Тираж 100 экз.

Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе дизайна и цифровой печати

РИУ ННГУ им. Н.И.Лобачевского

603000, г. Нижний Новгород, ул. Б. Покровская, 37