

На правах рукописи

Повереннов

ПОВЕРЕННОВ ЕВГЕНИЙ ЮРЬЕВИЧ

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
УДАРНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТЕЛ С МЕРЗЛЫМ ГРУНТОМ
С ПРИМЕНЕНИЕМ КВАЗИРАВНОМЕРНЫХ СЕТОК**

Специальность 01.02.04 –
механика деформируемого твердого тела

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород
2012

Работа выполнена в «Научно-исследовательском институте механики»
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения
высшего профессионального образования

«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук,
профессор

Кочетков Анатолий Васильевич

Научный консультант:

кандидат технических наук,
старший научный сотрудник

Зефилов Сергей Вениаминович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник

Котов Василий Леонидович

доктор технических наук,
профессор

Могилев Виктор Александрович

Ведущая организация:

Томский государственный университет

Защита состоится "28" июня 2012 года в 16:00 часов на заседании
диссертационного совета Д 212.166.09 при Нижегородском государственном
университете им. Н.И. Лобачевского по адресу: 603950, Н.Новгород, проспект
Гагарина, 23, корп. 6.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке
Нижегородского государственного университета.

Автореферат разослан "26" мая 2012г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 212.166.09

доктор физико-математических наук,
профессор



Л.А.Игумнов

Актуальность темы

Вопросы ударного взаимодействия тел с полубесконечными природными областями возникают в строительстве, сейсмологии, военной сфере. Информация о сопротивляемости среды подобного рода динамическому нагружению используется как при проектировании ударяющего объекта и обеспечения им требуемых характеристик, так и при создании противоударных средств защиты. При построении численных (сеточных) алгоритмов решения задач о динамическом нагружении полубесконечной области возникает проблема выбора размеров расчетной области. Размеры должны быть выбраны таким образом, чтобы сформировавшиеся волновые поля не влияли на решение вблизи источника возмущения за счет переотражения от искусственных границ в течение определенного интервала времени. Решение данной проблемы за счет выбора больших размеров расчетной области неизбежно влечет проблему увеличения количества ячеек, времени счета и непосредственно связано с ограниченностью возможностей вычислительной техники.

Одним из примеров таких задач является ударное взаимодействие тел с мерзлыми грунтами. Вследствие наличия в составе мерзлого грунта компонента – льда данный вид грунтовой среды обладает более высокими пороговыми значениями структурной прочности, которая существенно зависит от температуры и влажности среды. Вместе с тем мерзлые грунты имеют скорости распространения упругих возмущений, существенно превышающие их значения для грунтов в немерзлом состоянии. Область возмущения волнового движения среды оказывается значительно больше, чем в случае немерзлых грунтов. Природные грунты являются в общем случае многокомпонентными средами неоднородной структуры с нелинейными физико-механическими свойствами, зависящими от состава, условий залегания, вида внешнего воздействия. Основным источником информации по ударноволновому нагружению мерзлых грунтов в настоящее время являются результаты экспериментов, вместе с тем существует лишь очень ограниченное число работ по численному исследованию процессов их ударного взаимодействия с высокоскоростными телами. В связи с вышесказанным создание эффективных численных методик и алгоритмов решения задач ударного взаимодействия тел с мерзлыми грунтами, а также исследование особенностей и закономерностей таких процессов является актуальным.

Цели диссертационной работы

- разработка численных алгоритмов решения системы одномерных и двумерных уравнений динамической теории упругости в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат с использованием сильно неравномерных (квазиравномерных) сеток для моделирования краевых условий на удаленных границах;
- реализация алгоритмов в составе ППП «Динамика-2»;
- численное тестирование разработанных алгоритмов и оценка их эффективности на модельных и прикладных задачах;
- исследование особенностей процессов ударного взаимодействия тел с мерзлым и слоистым грунтом в осесимметричной постановке.

Научная новизна

Разработаны эффективные с вычислительной точки зрения численные алгоритмы решения одномерных и двумерных динамических задач теории упругости в полубесконечной области с применением сочетания равномерных и квазиравномерных сеток. Алгоритмы основываются на явных аппроксимациях производных по времени и включают в себя сглаживающие операторы, устраняющие возмущения из-за сильной неравномерности сетки. Алгоритмы применены к решению упругопластических задач ударного взаимодействия высокоскоростных тел с грунтом.

Решены новые нелинейные задачи удара и проникания ударников в мерзлый и слоистый грунты. Выявлены основные особенности процессов проникания в слоистый грунт.

Достоверность полученных результатов подтверждается решением тестовых задач, соответствием результатов расчетов по предложенным алгоритмам с точными решениями, результатами, полученными с помощью других численных методик и алгоритмов, и известными экспериментальными данными.

Практическая ценность

Численные алгоритмы с применением сочетания регулярных и квазиравномерных сеток для моделирования краевых условий на удаленных границах реализованы в составе ППП «Динамика-2», что позволяет эффективно решать широкий круг прикладных задач. Решены новые задачи импульсного взаимодействия тел с грунтовыми средами. Показано изменение основных характеристик удара и проникания в мерзлый грунт по сравнению с немерзлым и слоистым грунтом.

Диссертационная работа выполнена при поддержке

Грантов РФФИ (проекты № 04-05-64614а, № 08-08-97053, № 07-01-00257, № 09-08-00711), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-6391.2006.8).

На защиту выносятся:

1. Численные алгоритмы решения одномерных и двумерных динамических задач теории упругости в полубесконечных областях с применением сочетания регулярных и квазиравномерных сеток в рамках явных схем интегрирования по времени, реализованных в пакете прикладных программ «Динамика-2».
2. Результаты тестирования алгоритмов на одномерных и двумерных задачах импульсного нагружения деформируемого полупространства.
3. Результаты численного исследования процессов удара и проникания осесимметричных ударников в мерзлый и слоистый грунты.

Личный вклад автора

1. Разработка и программная реализация численных алгоритмов решения системы одномерных и двумерных уравнений динамической теории упругости в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат с использованием сочетания регулярных и квазиравномерных сеток на основе явной конечно-разностной схемы типа «крест».
2. Разработка программных модулей применительно к ППП «Динамика-2» для расчетов прикладных задач.
3. Тестирование предложенных алгоритмов на задачах по импульсному нагружению деформируемого полупространства и оценка их эффективности, в том числе при их интеграции в ППП «Динамика-2».
4. Проведение расчетов и выполнение сравнительного анализа процессов соударения тел с мерзлым, немерзлым и слоистым грунтом.

Апробация работы

Результаты диссертационной работы докладывались на следующих конференциях: VII Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород, ННГУ, 19-22 сентября 2005г.), 11-й Нижегородской сессии молодых учёных (технические науки) («Татинец», 12-16 февраля 2006г.), 11-й Нижегородской сессии молодых учёных (математические науки) («Красный плес», 22-25 мая 2006 г.), Всероссийской научно-технической конференции, посвященной 20-летию Нижегородского филиала Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН «Фундаментальные проблемы машиноведения. Новые технологии и материалы» (Нижний Новгород, ННГУ, 24-26 октября 2006 г.), 12-й Нижегородской сессии молодых учёных (математические науки) («Красный плес», 23-26 мая 2007 г.), V научной конференции Волжского регионального центра РАН «Современные методы проектирования и отработки ракетно-артиллерийского вооружения» (Саров, 5-7 июня

2007 г.), Итоговой научной конференции учебно-научного инновационного комплекса «Модели, методы и программные средства» (Нижний Новгород, 27-30 ноября 2007г.), Всероссийской научно-технической конференции «Фундаментальные основы баллистического проектирования» (Санкт-Петербург, 23-26 июня 2008г.), VIII Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород, 22-26 сентября 2008 г.), II Всероссийской молодежной научной конференции «Современные проблемы математики и механики» (Томск, 12–14 октября 2011).

Работа в целом докладывалась на научном семинаре НИИМ Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского (Нижний Новгород, 23 мая 2012).

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-16].

Структура и объем работы.

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы; содержит 38 рисунков, библиографический список из 153 наименований – всего 110 страниц.

Краткое содержание работы.

Во введении обосновывается актуальность решения задач динамического взаимодействия природных грунтов с деформируемыми телами и разработки соответствующих эффективных численных алгоритмов, сформулированы основные направления исследований.

В первой главе представлен обзор исследований, посвященных математическим моделям деформирования грунтовых сред, задачам ударного взаимодействия деформируемых тел с грунтовыми средами, численным методам решения подобного рода задач, моделированию неотражающих условий на границах областей для задач теории упругости.

Природные грунты являются в общем случае многокомпонентными средами, состоящими из твердых минеральных частиц, воды в различных состояниях, газа (воздуха). Основу грунта составляет пористый скелет из твердых частиц, внутри которого находится жидкость или газ, а при отрицательных температурах и лёд. Поведение грунта под действием динамической нагрузки определяется свойствами каждого из его компонент, прочности скелета, размера твердых частиц, объемного содержания воздуха, влажности, температуры. Несмотря на неоднородную структуру, для описания механических свойств грунтов используется математический аппарат механики сплошной среды, в силу малости размеров неоднородностей по сравнению с размером всего объема. Вид физических уравнений, описывающих поведение грунта при решении конкретной задачи, определяется составом грунта, типом нагружения, а также диапазонами количественных характеристик воздействующих факторов. Согласно рассмотренным исследованиям в данном направлении, большинство моделей предполагают независимость поведения грунтов от скорости деформации, т.е. отсутствие вязкостных свойств. В работах А.Ю. Ишлинского, Н.В. Зволинского грунт представлен моделью идеальной несжимаемой жидкости, модели в виде упруго-пластических сред предложены Б.А. Олисовым и Х.А. Рахматуллиным. Среди последних, наиболее адекватно соответствующей экспериментальным данным при динамическом нагружении, является модель С.С. Григоряна, учитывающая нелинейность и необратимость диаграммы объемного сжатия, упругопластический сдвиг, нелинейную зависимость предела текучести от давления. В работах Л.С. Евтерева, Б.В. Замышляева, Л. Мальверна и Н. Кристеску описаны модели, учитывающие вязкостные свойства среды. Модели, описывающие различные механизмы разрушения грунтовых сред, представлены в трудах В.Н. Николаевского, В.С. Никифоровского, Е.И. Шемякина, А.А. Вовка. Модели динамического деформирования мерзлых грунтов и льда описаны в работах Г.М. Ляхова, А.А. Вовка, Ю.Я. Труханова.

Из анализа литературы следует, что большая часть информации по ударному взаимодействию грунтовых сред с деформируемыми телами представляет собой результаты экспериментов, полученные на установках с динамической и кинематической регистрацией параметров. Экспериментальному исследованию динамических процессов с использованием разрезных стержней Гопкинсона посвящены работы А.П. Большакова, А.М. Брагова, А.К. Ломунова, С.А. Новикова. В работах Ю.К. Бивина, В.А. Могилева, Ю.Н. Файкова, M.J. Forrestal, D.E. Grady, U. Dayal, J. Allen, D. Reddy и др. представлены результаты экспериментов по удару и прониканию цилиндрических ударников с различными головными частями и скоростями метания в различные грунтовые среды (глина, песок, песчаник, пластилин). Получены эмпирические зависимости глубин и перегрузок на ударнике от скорости проникания, размеры каверны. Результаты экспериментов по прониканию в мерзлые грунты, снег и лед отражены в работах M. Arakawa, K. Shirai, M. Kato, G. Aitken, K. Swinzow, D. Farrell, S. Stewart, T. Ahrens, J.M. Carcione, G. Seriani.

Первоначальные теоретические работы по этой теме основывались на упрощающих предположениях: абсолютной жесткости ударников, линейных математических моделях грунтов, видах траекторий движения частиц грунта при проникании в него ударника с определенной головной частью, ограничениях, связанных с геометрией ударника.

В настоящее время для решения задач взаимодействия деформируемых тел с грунтами широко применяется численное моделирование на основании конечно-разностного или конечно-элементного методов, реализованных в пакетах прикладных программ. В силу специфики задач, связанной со значительными деформациями расчетной области, физической и геометрической нелинейностями, наличием ударных волн, оправдывает себя применение различных алгоритмов, основанных на использовании эйлеровых, лагранжевых и совместных эйлерово-лагранжевых методов описания движения сплошной среды. Данные алгоритмы реализованы, например, в пакетах LS-DYNA и AUTODYN, в «Динамика-2», «UPSGOD» и др.

Методы численного моделирования взрывных и ударных нелинейных процессов в грунтах развиты в работах А.Я. Сагомояна, Г.А. Кириленко, В.Г. Баженова, А.В. Кочеткова, С.В. Крылова, С.В. Зефирова, В.Р. Фельдгуна, В.Л. Котова и др. Ряд задач ударного взаимодействия тел с грунтовыми средами решены и исследованы сотрудниками Томского государственного университета А.В. Герасимовым, В.П. Глазыриным, Ю.Н. Орловым, М.Ю. Орловым и др.

Исследование постановки неотражающих условий на искусственных границах при решении задач механики сплошной среды началось в последние десятилетия 20 века в связи с решением задач численными методами в расчетной области, предполагаемой бесконечной в определенных направлениях, и сводился в основном к замене ее областью фиксированных размеров. На основании множества исследований был сделан вывод о том, что невозможно построить полностью неотражающие условия в общем виде, также нельзя сделать этого для определенного класса задач. В литературе описывается ряд способов построения поглощающих граничных условий: использование пространственных и пространственно-временных экстраполяций; применение поглощающего слоя около границ расчетной области; выставление на границах волновых или импедансных соотношений (между скоростью и давлением); использование квазиравномерных сеток. Первыми исследованиями неотражающих условий были работы А. Абрамова, С.К. Годунова, S. Karp, T. Nitta, T. Matsuno, J. Lysmer, R. Kuhlemeyer, H. Kreiss, B. Gustafsson, J. Chen, A. Castellani, W. Smith, E. Lindman, A. Majda, S. Osher. Обзоры исследований по данной теме делались в работах М.А. Ильгамова, E. Turkel, B. Gustaffson, D. Givoli. В частности проблеме построения неотражающих условий для задач динамической теории упругости посвящены работы R. Clayton, B. Enquist, A. Majda, R. Higdon. Авторами предложены граничные условия на основании комбинировании дифференциальных операторов первого порядка. В работах М.А. Ильгамова, J. Lysmer, R.

Kuhlemeyer приводятся неотражающие условия в виде линейной зависимости нормальной и касательной скорости на искусственной границе от нормального и касательного напряжения соответственно, приведены результаты численных экспериментов, демонстрирующие работоспособность указанных соотношений.

Одним из способов сеточного разбиения бесконечных областей в численных расчетах является применение квазиравномерных сеток, то есть сильно неравномерных сеток, покрывающих конечным числом узлов бесконечную область. Понятие квазиравномерных сеток было предложено А.А. Самарским, метод был развит в работах Н.Н. Калиткина и его учеников. Он применен к решению начально-краевых задач с помощью неявных схем в неограниченных областях. При численной реализации данного подхода точное условие ставится непосредственно на бесконечности за счет выбора функции, задающей сеточное разбиение. В этом случае в разностных соотношениях присутствует значение переменной на бесконечности, но отсутствует само значение координаты соответствующего ей узла. К недостаткам данного метода следует отнести резкое увеличение погрешности решения в области существенной неравномерности сетки, особенно при длительных временах счета.

На основании анализа состояния проблемы ударного взаимодействия деформируемых тел с мерзлыми грунтовыми средами определены актуальность темы и цели диссертационной работы.

Во второй главе определена математическая постановка осесимметричной задачи вертикального удара и проникания с некоторой начальной скоростью V_0 деформируемого ударника в полубесконечную область, занятую грунтовой средой в мерзлом состоянии.

Для описания процессов динамического взаимодействия ударника с грунтовой средой используется вариационное уравнение динамики, следующее из принципа возможных скоростей в форме Журдена, в цилиндрической ($v = 1$ – осесимметричная задача) или декартовой ($v = 0$ – плоская задача) системе координат:

$$\iint_{\Omega} \left[\sigma_{rr} \delta \dot{e}_{rr} + v \sigma_{\beta\beta} \delta \dot{e}_{\beta\beta} + \sigma_{zz} \delta \dot{e}_{zz} + 2\sigma_{rz} \delta \dot{e}_{rz} + \rho (\ddot{u}_r \delta \dot{u}_r + \ddot{u}_z \delta \dot{u}_z) \right] r^v d\Omega - \int_{G_p} (p_r \delta \dot{u}_r + p_z \delta \dot{u}_z) r^v ds - \int_{G_q} (q_r \delta \dot{u}_r + q_z \delta \dot{u}_z) r^v ds = 0, \quad (1)$$

где $\sigma_{ij}, \dot{e}_{ij}$ – компоненты тензоров напряжений и скоростей деформаций, где индексы i, j принимают значения r, z, β ; \dot{u}_r, \dot{u}_z – компоненты вектора скорости перемещений, p_r, p_z, q_r, q_z – компоненты поверхностных и контактных нагрузок; ρ – плотность; точка над символом означает дифференцирование по времени; Ω – объем области сплошной среды; G_p – часть поверхности, на которой задается поверхностная нагрузка; G_q – часть поверхности, на которой задаются контактные условия.

Критерием перехода частицы из упругого в пластическое состояние при сдвиговом деформировании является условие текучести Мизеса.

В качестве модели грунта при расчетах рассматривается модель пористой среды С.С. Григоряна с использованием теории пластического течения для сдвигового деформирования и необратимости объемных деформаций. На кривой объемного сжатия состояния (рис. 1) выделяются упругий, упругопластический и гидродинамический участки. На упругом участке (в диапазоне изменения давления $-p_e \leq p \leq p_e$) давление p и плотность ρ связаны линейной зависимостью вида:

$$p - p_0 = C_e^2 (\rho - \rho_0), \quad (2)$$

где $C_e^2 = (p_e - p_0) / (\rho_e - \rho_0)$ – скорость звука в грунте при упругих возмущениях, p_0 и ρ_0 – начальные давление и плотность в грунте, p_e – предельное значение давления на упругом

участке деформирования среды, характеризующее структурную прочность. В упругопластической области деформирования $p_e < p < p_{lim}$ используется аддитивное приближение ударной адиабаты в форме Г.М. Ляхова:

$$\rho/\rho_0 = \varepsilon_e + \left(\sum_{i=1}^4 \alpha_i [1 + \gamma_i (p - p_e)/E_i]^{-1/\gamma_i} \right)^{-1}, \quad (3)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ – объемные концентрации свободной пористости (защемленного воздуха), жидкости (воды), твердого компонента и льда соответственно, E_i – модули объемного сжатия компонентов, γ_i – заданные константы, ρ, p – плотность и давление, ρ_0, p_0 – их начальные значения, $\varepsilon_e = 1 - \rho_0/\rho_e$. Плотность грунта как четырехкомпонентной среды определяется суммой $\rho_0 = \alpha_1\rho_{10} + \alpha_2\rho_{20} + \alpha_3\rho_{30} + \alpha_4\rho_{40}$, где $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1$, $\rho_{10}, \rho_{20}, \rho_{30}, \rho_{40}$ – плотность каждого из компонентов. В данной модели предполагается, что необратимое сжатие грунта осуществляется до предельной плотности ρ_{lim} , соответствующей полному разрушению пор и льдоцементирующих связей. В дальнейшем грунт ведет себя как нелинейная жидкость (гидродинамический участок). Разгрузка среды от достигнутой в процессе нагружения грунта максимальной плотности ρ^* происходит, вообще говоря, по нелинейной траектории. Она описывается двухзвенной линией, состоящей из двух линейных участков $p = C_1^2(\rho - \rho^*) + p^*$ при $p > p_{00}$, и $p = p_{00} + C_2^2(\rho - \rho_{00})$ при $p \leq p_{00}$, здесь C_1 и C_2 – скорости звука, определяющие наклон к оси ρ звеньев разгрузки; $p_{00} = p^* / \gamma_p$, γ_p – задаваемый параметр, ρ^* – максимальная плотность, достигнутая в процессе активного нагружения грунта. Зависимости скоростей звука от ρ^* определяются следующим образом:

$$C_1 = C_{lim} + \frac{\rho_{lim} - \rho^*}{\rho_{lim} - \rho_e} \cdot (C_e - C_{lim}),$$

$$C_2 = \frac{C_{lim}}{\gamma_c} + \frac{\rho_{lim} - \rho^*}{\rho_{lim} - \rho_e} \cdot \left(C_e - \frac{C_{lim}}{\gamma_c} \right). \quad (4)$$

В точке (ρ_{lim}, p_{lim}) наклон первого линейного участка разгрузочной кривой совпадает с наклоном касательной к (3). Таким образом, задается линейное изменение C_1 от C_e до C_{lim} , а также C_2 от C_e до C_{lim}/γ_c при изменении плотности ρ^* от ρ_e до ρ_{lim} . На гидродинамическом участке деформирования ($p > p_{lim}$) кривая разгрузки совпадает с кривой нагрузки.

Кривые предельного состояния для сдвигового деформирования определяют зависимость предела текучести от давления и имеют следующий вид:

$$\sigma_T(p) = \begin{cases} Y(p) = Y_0 + \mu p, & p_e < p < p_{pl} \\ Y_{pl}, & p \geq p_{pl} \end{cases} \quad (5)$$

Здесь Y_0 – сцепление, $\mu = tg\varphi$, φ – угол внутреннего трения, p_{pl}, Y_{pl} – параметры предельной структурной прочности на сдвиг.

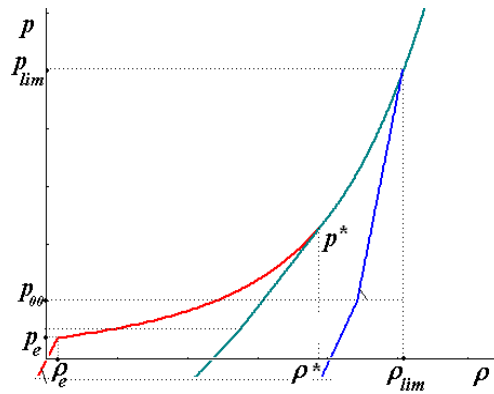


Рис. 1

Предполагается, что ударник является упругопластическим телом: компоненты тензоров напряжений и деформаций в упругой области деформирования связаны законом Гука:

$$\sigma_{ij} = \lambda \bar{\theta} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}, \quad (i, j = r, z) \quad (6)$$

$$\bar{\theta} = e_{rr} + e_{zz}, \quad \lambda = E\nu / [(1+\nu)(1-2\nu)], \quad \mu = E / [2(1+\nu)]$$

E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, λ, μ – константы Ламе. В упругопластической области используются соотношения теории течения с линейным кинематическим или изотропным упрочнением. Система уравнений (1)-(6) дополняется начальными, контактными и граничными условиями. На свободной поверхности грунтовой среды нормальная и касательная компоненты напряжения принимаются равными: $\sigma_{nn} = \sigma_0$, $\sigma_{n\tau} = 0$, где σ_0 – нормальное напряжение на свободной поверхности. На оси симметрии $r=0$ ставятся условия симметрии: $u_r = 0$, $\sigma_{rz} = 0$. На контактных поверхностях выполняются условия непроникания со скольжением (равенство нормальных к контактной поверхности скоростей ударника и грунта, а также равенство касательных напряжений). В начальный момент времени скорости и деформации в грунте отсутствуют.

В третьей главе описывается метод квазиравномерных сеток и его применение для численного решения динамических задач теории упругости и реализации краевых условий на удаленных границах (рис. 2).

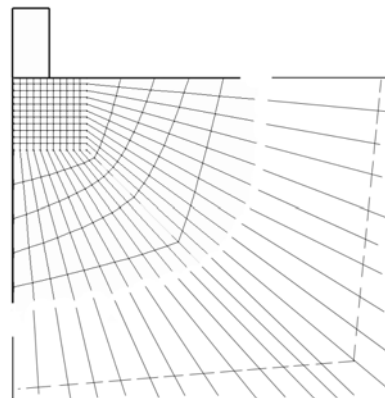


Рис. 2

Сначала рассматривается применение указанного метода для численного решения одномерной задачи распространения продольных волн. В данном случае система уравнений теории упругости, записанная в переменных скорости и напряжения, имеет вид

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = (\lambda + 2G) \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (7)$$

Здесь t - время, x - координата, v - скорость, σ - напряжение, ρ - плотность, λ, G - модули упругости Ламе.

Сетки $\varpi_N = \{x(n/N), 0 \leq n \leq N\}$ на $[a, b]$, где $x(\xi)$ - строго монотонная, достаточно гладкая функция $\xi \in [0, 1]$, $x(0) = a$, $x(1) = b$, называются квазиравномерными. Если выбрана функция $x(\xi)$ так, что $x(1) = \infty$, тогда квазиравномерная сетка охватывает полупрямую $[a, \infty)$ при конечном числе интервалов N . В качестве наиболее удобных функций $x(\xi)$ можно использовать $x(\xi) = tg(\pi\xi/2)$ или $x(\xi) = \xi/(1-\xi)$. Рассматривается численное интегрирование системы (7) с помощью явной конечно-разностной схемы типа «крест». Компоненты тензора напряжений определяются в центрах ячеек, а компоненты скоростей в узлах сетки, при этом напряжения определяются в целые моменты времени (на шаге с номером j), скорости – в полуцелые моменты времени (на шаге с номером $j+1/2$). Условие устойчивости схемы в одномерном случае: $\tau \leq Kh_{\min}/c$, где τ – шаг по времени, h_{\min} – минимальный шаг по пространственной координате, c – скорость продольной волны, $0 < K \leq 1$ – коэффициент запаса. Применение квазиравномерных сеток, покрывающих неограниченную область, для решения дифференциальных уравнений имеет свои особенности: для аппроксимации производных по пространству следует использовать формулы, не содержащие $x_{\pm N} = \pm\infty$ ни при каком n , но содержащие значения функций на бесконечности. Указанные формулы реализуются, например, за счет использования координат с дробными индексами. При этом конечно - разностные соотношения схемы «крест» для системы (7) в случае квазиравномерной сетки запишутся в виде

$$\rho \frac{v_m^{n+1/2} - v_m^{n-1/2}}{\tau} = \frac{\sigma_{m+1/2}^n - \sigma_{m-1/2}^n}{2(x_{m+1/4} - x_{m-1/4})}, \quad \frac{\sigma_{m+1/2}^{n+1} - \sigma_{m+1/2}^n}{\tau} = (\lambda + 2G) \frac{v_{m+1}^{n+1/2} - v_m^{n+1/2}}{2(x_{m+3/4} - x_{m+1/4})}. \quad (8)$$

Для демонстрации указанного метода проводилось численное решение системы (7) в случае, когда на границе $x = 0$ задана скорость в виде импульса, представляющего собой один период синусоиды:

$$v(x=0, t) = h(t) = \begin{cases} A \sin\left(\frac{2\pi}{T_p}\left(t - \frac{T_p}{4}\right)\right) + A, & t \leq T_p, \\ 0, & t > T_p \end{cases},$$

а на бесконечности задано условие $v(x = \infty, t) = 0$, $\lambda = 0.5, G = 0.25, \rho = 1, A = 10^{-3}, T_p = 0.2$, откуда скорость продольной волны $c = 1$. В качестве закона расположения узлов сетки был выбран $x(\xi) = k \cdot tg(\pi\xi/2)$, где $\xi = (m-1)/M$, $m = 1, \dots, M+1$; а k - масштабирующий коэффициент, предназначенный для установки заданного минимального шага $h_0 = x_2 - x_1$. Оценивалось качество решения на неравномерной сетке, а именно влияние увеличения расстояния между соседними узлами. Рассматривалась временная зависимость скорости в точке $x = 0.1$, время интегрирования выбрано превышающим время действия нагрузки. Начальный шаг по пространственной координате выбирался равным $h_0 = 0.01$, шаг по времени $\tau = 0.01$, количество узлов $M = 200$. В результате ряда расчетов (постепенно увеличивая время счета) установлено, что, начиная со времени $T = 35T_p = 7$, в решении наблюдаются возмущения, превышающие 10% от амплитуды импульса (рис.3а). Увеличение числа узлов до $M = 500$, уменьшает амплитуду ошибки до 0.2% (рис. 3б). Однако, данные параметры сетки не являются удовлетворительными с точки зрения трудоемкости решения гиперболических уравнений, особенно в многомерном случае.

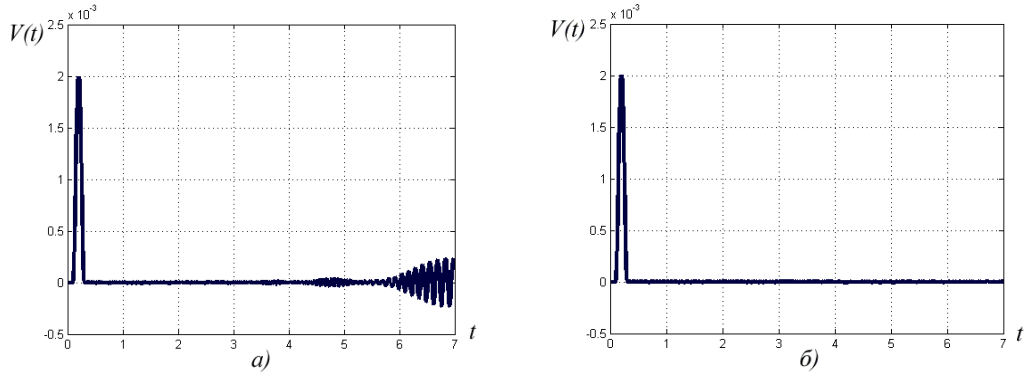


Рис. 3. Численное решение задачи в точке $x = 0.1$ при количестве узлов $M = 200$ (2а) и $M = 500$ (2б).

В связи с этим выполнены дополнительные усовершенствования алгоритма: рассматривалась комбинированная (частично равномерная и частично неравномерная) сетка. Выделена область определения задачи размером $[0, L]$, в которой добивались высокого качества решения на равномерной сетке, остальная часть области $(L, +\infty)$ покрывалась квазиравномерной сеткой с малым количеством узлов и тангенциальным законом расположения узлов. Для погашения нефизических осцилляций в этой области применялось сглаживание по Лаксу. Из уравнений (8) на очередном временном слое находятся значения скорости и напряжения \tilde{v}_j и $\tilde{\sigma}_j$. Далее, начиная со значения координаты $x = L$, вычисляются сглаженные значения v_j и σ_j по следующим соотношениям

$$\begin{aligned} v_j &= (1 - 2\alpha_j)\tilde{v}_j + \alpha_j[\theta_j\tilde{v}_{j-1} + (1 - \theta_j)\tilde{v}_{j+1}], \\ \sigma_j &= (1 - 2\alpha_j)\tilde{\sigma}_j + \alpha_j[\theta_j\tilde{\sigma}_{j-1} + (1 - \theta_j)\tilde{\sigma}_{j+1}], \quad j = j_s, \dots, M - 1, \end{aligned} \quad (9)$$

где j_s - индекс узла, соответствующий координате $x = L$. Здесь θ_j - локальный показатель степени неравномерности сетки и может быть представлен в виде

$$\theta_j = (x_{j+1} - x_j) / (x_{j+1} - x_{j-1}).$$

В случае равномерной сетки θ_j равны 1/2. Величина α_j является сглаживающим параметром ($0 \leq \alpha_j \leq 0.5$). Рассматривалось численное решение системы (7) на комбинированной сетке со следующими параметрами: размер области равномерной сетки $L = 0.8$, число узлов равномерной сетки $M_1 = 81$ ($h = 0.01$), число узлов неравномерной сетки $M_2 = 20$, начальный шаг - 0.01. Время интегрирования $T = 7$. Численными экспериментами установлено, что постоянное значение параметра α_j для всей области приводит к потере точности в области, примыкающей к $[0, L]$. Функция α выбрана монотонно возрастающей, чтобы влияние сглаживания при $x \rightarrow +\infty$ было наибольшим, например, возрастающей функцией от 0 до α_0 по мере возрастания x в виде

$$\alpha_j = \alpha_0 (x_j / x_{M-1})^k, \quad j = j_s, \dots, M - 1, \quad M = M_1 + M_2 \quad (10)$$

Параметры сглаживающей функции α_0 и k выбирались на основании численных экспериментов с целью минимизировать максимальную относительную погрешность в точке $x = 0.1$ и подавить возмущения, изображенные на рис. 3а. На рис. 4 изображены графики зависимостей относительной погрешности e от степени сглаживающей функции k при трех фиксированных значениях параметра α_0 , равных 0.3, 0.4 и 0.5. Выявлено, что для каждого значения α_0 может быть найдено некоторое оптимальное с точки зрения

минимизации погрешности решения значение параметра k и уровень минимальной ошибки e практически не меняется в зависимости от α_0 . В качестве второго примера получено численное решение системы (7) с заданием на границе скорости в виде непрерывной синусоиды с периодом $T_p = 0.6$ и амплитудой $A = 10^{-3}$. Полученные результаты (скорость в точке $x = 0.1$, время счета $T = 10$) показали, что при длительном счете возмущение распространяется во времени, почти не искажаясь. Для данной задачи получена оценка вычислительной эффективности метода. При поиске решения данной задачи в точке x на равномерной сетке, чтобы избежать эффекта отражения волны от дальней границы, следует выбирать размер расчетной области как $L = (cT + x)/2 = 5.05$. При выборе шага по пространственной переменной $h = 0.01$ общее количество узлов будет равняться 506. Количество узлов, затраченное для решения этой задачи на комбинированной сетке, равно $(81+20)=101$, т.е. почти в 5 раз меньше. Таким образом, применение квазиравномерных сеток в сочетании с процедурой сглаживания позволяет добиться достаточного уровня точности и при этом сэкономить на количестве узлов (и времени вычисления) за счет неравномерной составляющей сетки.

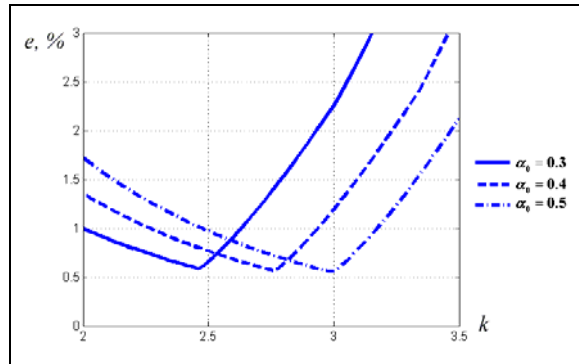


Рис. 4.

Аналогичные исследования проведены для двумерных задач. Здесь также применяется комбинированная сетка, состоящая из двух подобластей (рис. 5). Первая подобласть – основная, в которой осуществляется поиск решения, вторая подобласть – вспомогательная, покрывается квазиравномерной сеткой. При использовании расчетной области прямоугольного вида (рис. 5а) линии сетки в подобласти 2 удобнее располагать параллельно осям координат x и y (прямоугольные ячейки), так как данная подобласть является лишь инструментом моделирования полубесконечной области. Пунктиром схематично изображены удаленные границы (границы на бесконечности). Законы изменения координат узлов по каждой оси выбираются аналогично одномерной задаче. В результате расчетная область – это прямоугольник, у которого правая и нижняя границы находятся на бесконечности. Процедура сглаживания при нахождении решения на очередном временном слое выполняется последовательно по каждой из координат.

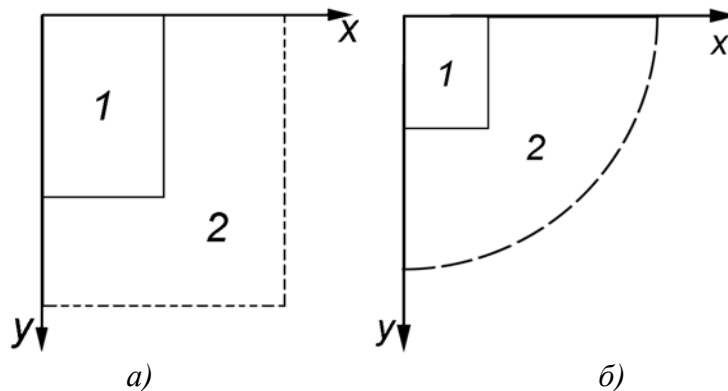


Рис. 5.

Вид сглаживающих функций соответствует (10), в общем случае параметры сглаживания для каждой координаты могут быть различными. Для демонстрации эффективности применения метода квазиравномерных сеток выполнено решение тестовой задачи в полубесконечной области, на части границы которой задан вектор напряжений, (задача Лемба): $\sigma_{yy} = f(x,t) = -g(x)H(x_0 - x)h(t)$, $\sigma_{xy} = 0$,

где $g(x) = 1 - (x/x_0)^2$, $H(x)$ - функция Хевисайда, x_0 - пояс нагрузки (мал по сравнению с размерами области, в которой рассматривается решение, что моделирует сосредоточенный характер нагрузки), а $h(t)$ соответствует функции из одномерной задаче. На дальних границах области задано условие равенства нулю вектора скорости $\bar{v} = 0$. Начальные условия выбирались однородными: $v_x = v_y = 0$, $\sigma_{ij} = 0$. Рассматривалась задача со следующими данными: $\lambda = 1, \mu = 1, \rho = 1, A = 10^{-3}, T_p = 0,2, x_0 = 0,08$, скорость продольной волны $c_p = 2$, скорость сдвиговой волны $c_s = 1$. Сеточное разбиение в подобласти 1 выбрано равномерным, линии сетки параллельны осям координат. Задача решалась на квадратной сетке в области $1,2 \times 1,2$ (количество узлов 121×121) и квазиравномерной в оставшейся области, состоящей из 20 узлов в каждом направлении. Интегрирование проводилось в течение времени $T = 30T_p$, шаг по времени $\tau = h/c_p = 0,005$. Анализировались скорости v_y в точке на свободной поверхности ($x = 1, y = 0$) и в точке на оси симметрии ($x = 0, y = 1$). Для сравнения данная задача решалась и на целиком равномерной («эталонной») сетке. В этом случае для исключения влияния дальних границ на решение в точках (1,0) и (0,1) при времени процесса T , размеры области выбирались следующим образом: $L_x = L_y = (c_p T + x_0 + 1)/2 = 6,6$, т.е. 661 узел в каждом из направлений. В результате серии расчетов выявлено, что наиболее эффективно процедура сглаживания работает при параметрах: $k_1 = k_2 = 4, \alpha_{0x} = \alpha_{0y} = 0,15 \div 0,2$. На рис.6а,б показаны результаты решения задачи на комбинированной сетке в данных точках. Решение на комбинированной сетке показало хорошее совпадение результатов с «эталонным» решением на равномерной сетке в плане описания основных амплитуд волн (продольных волн и волн Релея). Погрешность решения не превосходит 1% (рис. 6а). В случае равномерной сетки использовано 437000 узлов, в случае комбинированной - 19900, что соответствует выигрышу в количестве узлов в 22 раза. При этом время вычисления первой задачи на компьютере с частотой процессора 3 ГГц и объемом оперативной памяти 512 Мбайт составляет 56 минут, второй задачи - 3,5 минут, что быстрее в 16 раз.

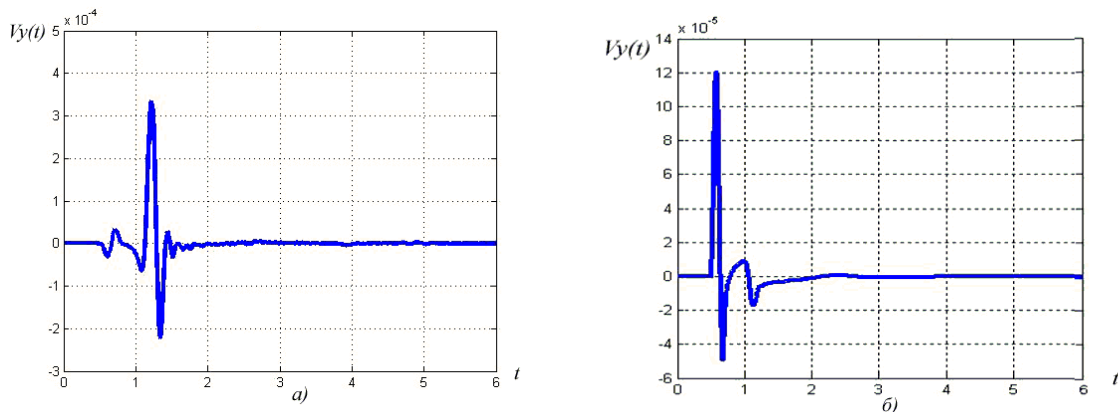


Рис. 6. Численное решение задачи Лемба в точках $x = 1, y = 0$ (6а) и $x = 0, y = 1$ (6б).

Исследования на комбинированных радиально-окружных сетках (рис. 5б) при $\nu = 0$ и $\nu = 1$ подтвердили качество и эффективность разработанных алгоритмов.

Разработанные алгоритмы с применением квазиравномерных сеток для моделирования краевых условий на удаленных границах для двумерных задач реализованы в составе ППП «Динамика-2», разработанном в НИИМ ННГУ им. Н.И. Лобачевского. Создан модуль, позволяющий выполнять двумерный динамический расчет по явной схеме «крест» с применением подобласти, покрытой квазиравномерной сеткой и моделирующей полубесконечную среду. Таким образом, появилась возможность использования квазиравномерных сеток с процедурой сглаживания для решения прикладных задач в полубесконечных областях. В этом случае пользователь определяет область неупругого поведения материала как подобласть 1 на рисунке 5. Реализованный алгоритм позволяет эффективно с вычислительной точки зрения решать динамические задачи о распространении волн от источника возмущения внутри и вдоль границы полупространства, имеющие конкретные практические применения (задачи взрыва, удара и проникания).

В четвертой главе представлены результаты численного исследования процессов удара осесимметричных тел в мерзлый и слоистый грунты с использованием описанного выше алгоритма моделирования неотражающих краевых условий.

Для оценки возможности применения описанного метода к решению динамических упругопластических задач решена тестовая задача об импульсном воздействии на границу полубесконечной алюминиевой среды в осесимметричном приближении. В качестве диаграммы деформирования материала выбрана упругопластическая модель с линейным изотропным упрочнением. На участке границы полупространства $0 \leq r \leq r_0$, $r_0 = 10 \text{ см}$ задана вертикальная скорость, временная зависимость которой представляет собой два трапециевидных импульса (рис.7). На оставшемся участке границы задано условие свободной поверхности. Значения граничной скорости выбраны таким образом, чтобы поведение среды в окрестности области нагружения было упругопластическим. Решалась задача со следующими параметрами (свойства материала соответствуют значениям для алюминиевого сплава АМцМ): $\rho = 2,73 \text{ г/см}^3$, $E = 7,1 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $G = 27300 \text{ МПа}$, $\sigma_T = 50 \text{ МПа}$, модуль упрочнения $E_k = 345 \text{ МПа}$. Начальные условия выбирались однородными. Время интегрирования задачи – $T = 1 \text{ мс}$.

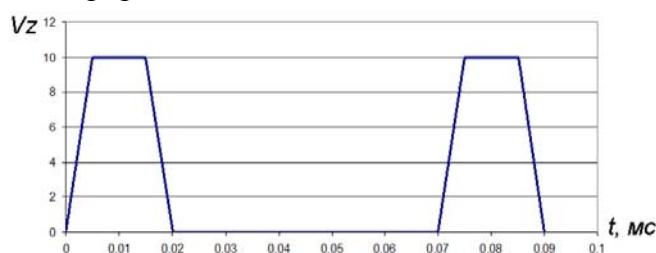


Рис. 7.

Ближняя и дальняя границы вспомогательной подобласти, покрытой квазиравномерной сеткой, имеют форму окружности. На удалённой границе области задано условие равенства нулю вектора скорости $\vec{v} = 0$. Размер основной подобласти в радиальном направлении – 200 см. Использовались следующие параметры сглаживания $\alpha_{0,r} = 0,05$, $k_r = 2$. На рисунке 8а изображена временная зависимость интенсивности напряжений в точке на границе полупространства с координатами ($r = 16, z = 0$), близкой к зоне приложения нагрузки, демонстрирующая наличие пластических деформаций. Кроме того, анализировалась временная зависимость скорости v_z в точке на свободной поверхности ($r = 100, z = 0$). На рисунке 8б приведено решение на квазиравномерной сетке (кривая 1) совместно с решением задачи без вспомогательной области (кривая 2) (краевое

условие на искусственной границе задается на окружности радиуса 200 см). На кривой 2 наблюдаются нефизические осцилляции численного решения. Таким образом, и в случае решения задач с локальным упругопластическим поведением материала предложенная численная методика является эффективной.

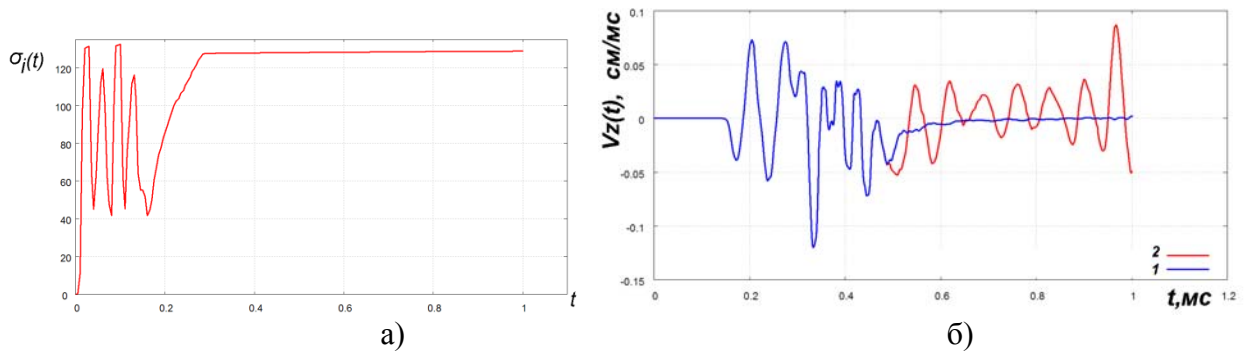


Рис. 8.

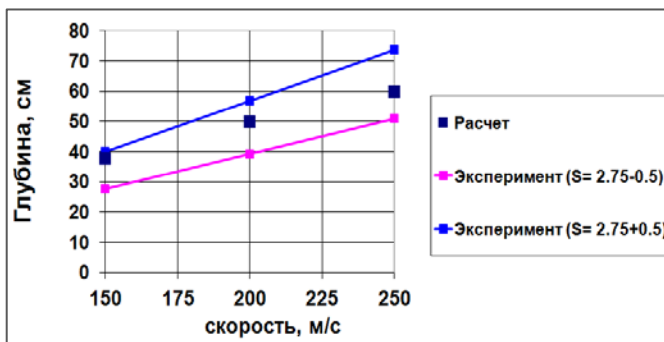
Далее отмечены особенности волнообразования в мерзлом грунте на примере одномерной задачи о распространении плоской волны вдоль оси Z . Сдвиговым деформированием грунта в данной задаче пренебрегается. Размер расчетной области выбирался равным $L = 500\text{мм}$ ($z_0 = 0, z_{\text{max}} = 500$). На левой границе расчетной области $z_0 = 0$ задавалось постоянное значение скорости $Vz = 5\text{м/с}$. В качестве параметров уравнения состояния грунта (4) использовались значения, соответствующие мерзлomu, неводонасыщенному суглинку: $t_{sp} = -11^{\circ}\text{C}$, $\alpha_1 = 0,154$, $\alpha_2 = 0,146$, $\alpha_3 = 0,575$, $\alpha_4 = 0,125$, $E_1 = 28\text{МПа}$, $E_2 = 0,225 \cdot 10^4\text{МПа}$, $E_3 = 6,625 \cdot 10^4\text{МПа}$, $E_4 = 1,395 \cdot 10^4\text{МПа}$, $\gamma_1 = 0,01$, $\gamma_2 = 7$, $\gamma_3 = 5$, $\gamma_4 = 5$, $\rho_0 = 1,8\text{г/см}^3$, $p_e = 5,7\text{МПа}$, $\rho_e = 1,801\text{г/см}^3$, $\rho_{\text{lim}} = 2,3\text{г/см}^3$; $\gamma_c = 2,1$, $\gamma_p = 8$, модуль объемного сжатия грунта $K_e = 8870\text{МПа}$. Отсюда скорость распространения упругих волн $C_e = 2220\text{м/с}$. Анализ распределений скорости и давления в момент времени $T = 1\text{мс}$ выявил двухволновую структуру решения: наличие медленной пластической волны (максимальное давление превышает пороговое значение упругого участка диаграммы $p_e = 5,7\text{МПа}$) и быстрой упругой волны, для описания движения которой требуется большая расчетная область.

С целью оценки достоверности применяемой модели мерзлого грунта проводилось сопоставление численных решений с экспериментальными данными. Рассматривался удар и проникание по нормали с некоторой начальной скоростью V_0 ударника с конической носовой частью в мерзлый грунт с параметрами уравнения состояния из предыдущего примера и характеристиками сдвигового деформирования: $Y_0 = 0,62\text{МПа}$, $\varphi = 18,5\text{град.}$, $\mu = 0,33459$, $Y_{pl} = 50,775\text{МПа}$, $P_{pl} = 150\text{МПа}$, $G = 3200\text{МПа}$, а также в грунт в немерзлом состоянии со следующими характеристиками: $\alpha_1 = 0,4$, $\alpha_2 = 0,271$, $\alpha_3 = 0,329$, $\alpha_4 = 0$, $E_1 = 10\text{МПа}$, $E_2 = 2250\text{МПа}$, $E_3 = 66250\text{МПа}$, $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 7$, $\gamma_3 = 5$, $\rho_0 = 1,8\text{г/см}^3$, $p_e = 0,101\text{МПа}$, $\rho_e = 1,8001\text{г/см}^3$, $\rho_{\text{lim}} = 3,0\text{г/см}^3$; $\gamma_c = 1,1$, $\gamma_p = 5$, $K_e = 18\text{МПа}$, $C_e = 100\text{м/с}$; $G = 6,5\text{МПа}$; $Y_0 = 0,3\text{МПа}$, $\mu = \text{tg}\varphi = 0,31$, $P_{pl} = 150\text{МПа}$, $Y_{pl} = 50,48\text{МПа}$. Материал ударника – сталь, масса – 6,011кг. Результаты расчетов сравнивались с эмпирическими соотношениями, полученными на основе обобщения экспериментов С.W.Young по прониканию ударников разной формы. Автором приводятся зависимости глубины проникания от начальной скорости ударника. Для мерзлого и немерзлого грунтов соответственно указываются следующие соотношения для глубин проникания:

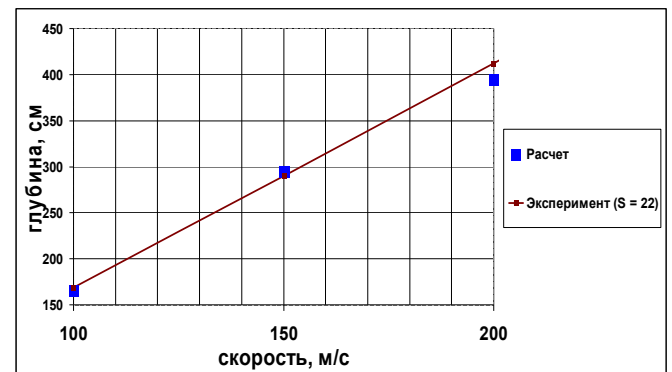
$$D=0.0000046 S N (m/A)^{0.6} (V-30.5) \ln (50+0.29m^2), \quad (11)$$

$$D=0.27 m^{0.4} 0.000018 S N (m/A)^{0.7} (V-30.5), \quad (12)$$

где S – проникаемость мишени (характеристика грунта); N – коэффициент, характеризующий носовую часть ударника ($N=0.25 L_n/d + 0.56$); d – диаметр ударника; L_n – длина носика ударника, м; m – масса ударника, кг; A – площадь поперечного сечения ударника, м². Для мерзлого грунта указывается диапазон значений для параметра $S=2.75 \pm 0.5$. Для грунта в немерзлом состоянии (суглинка) $S=22$. Выполнены расчеты задачи проникания ударника в грунты с начальными скоростями $V_0 = 100 \div 250$ м/с. На рисунке 9а приведены графики зависимостей глубин проникания от начальной скорости в мерзлый грунт, полученные по результатам расчетов и по формуле (11). Значения глубин в рассмотренном диапазоне скоростей имеют удовлетворительное совпадение с данными экспериментов. Также представлены аналогичные зависимости для задачи проникания в немерзлый грунт (рис. 9б). Глубины проникания в немерзлый грунт для соответствующих скоростей метания ударника более чем в 6 раз превышают значения для мерзлого грунта. При этом максимальные величины ускорений ударника в случае мерзлого грунта более чем в 4 раза превосходят значения для немерзлого.



а)



б)

Рис. 9.

Далее рассмотрена тестовая задача вертикального удара и проникания с начальной скоростью $V_0=20$ м/с упругого ударника в полубесконечную область, занятую грунтовой средой в мерзлом состоянии. В качестве ударника рассматривается сплошной цилиндр радиусом $R=15$ см и высотой $H = 66$ см, материал ударника является линейно упругим в большом диапазоне напряжений. В качестве модели грунта используется упругопластическая модель (3) с вышеуказанными характеристиками грунта. Решение задачи осуществлялось на 4 расчетных схемах. В 1 расчетной схеме область, занятая грунтом, моделировалась цилиндром радиусом $R_r=40$ см и высотой $H_r = 40$ см. На боковой и нижней поверхностях цилиндра ставится условие $\bar{V} = 0$. Количество квадратных ячеек по радиусу и высоте области грунта одинаково и равно 40. Во 2 расчетной схеме на тех же границах ставится граничное условие свободной поверхности. В 3 расчетной схеме область грунта выбрана цилиндрической, но размеры области ($R_r=1500$ см, $H_r = 1500$ см) выбраны так, чтобы избежать отражения волн от внешних границ, на искусственной границе выбрано условие равенства нулю вектора скорости. Число ячеек по радиусу и высоте области: 1500. В 4 схеме область грунта состоит из двух подобластей: прямоугольной с размерами и сеточным разбиением как в схемах 1 и 2, и присоединенной к ней сферической подобласти с максимальным значением радиуса $R_{\text{макс}}=1660$ см. Сеточное разбиение указанной сферической подобласти выполнено квазиравномерной в радиальном направлении сеткой. Число ячеек вдоль свободной границы и оси симметрии

области равно 40. На рисунке 10б представлена временная зависимость вертикального перемещения ударника, вычисленная по указанным четырем схемам (отмечены соответствующими цифрами). На рисунке 10а изображена деформированная конфигурация расчетной области на момент времени 9мс. Решения 1 и 2 демонстрируют влияние граничного условия в случае использования регулярной области малых размеров. Из рисунка видно, что отличие в перемещениях для данных решений невелико и составляет около 2 см, отличие решений 1 и 2 от решений 3 и 4 – порядка 1 см. Численными экспериментами выявлено, что даже для таких характеристик модели мерзлого грунта (скорость распространения упругих волн более чем в 20 раз превышает значение в немерзлом грунте) влияние упругих волн, отраженных от искусственных границ расчетной области, на процессы волнообразования в окрестности зоны взаимодействия тела с грунтом и такие характеристики, как глубина проникания, сила сопротивления на ударник со стороны грунта незначительно. В зоне контактных поверхностей ударника и грунта волновая картина имеет сложную структуру за счет наложения волн разгрузки от свободных поверхностей ударника, грунта, образовавшейся каверны. Амплитудные значения этих волновых полей на порядок превосходят амплитуды волн, отраженных от границ области, что и объясняет относительно слабое влияние последних в данной области. Вместе с тем, на удалении от зоны контакта отраженные от границ волновые поля существенно влияют на корректность решения. Решение 3 – является эталонным, в данном случае размеры области выбраны так, чтобы граничное условие на внешней границе не влияло на решение в указанном временном диапазоне, однако затратно с вычислительной точки зрения. Решение 4 практически совпадает с эталонным решением (3), однако за счет применения квазиравномерной сетки в сферической подобласти и меньшего количества расчетных ячеек дает выигрыш по времени счета более чем в 3 раза.

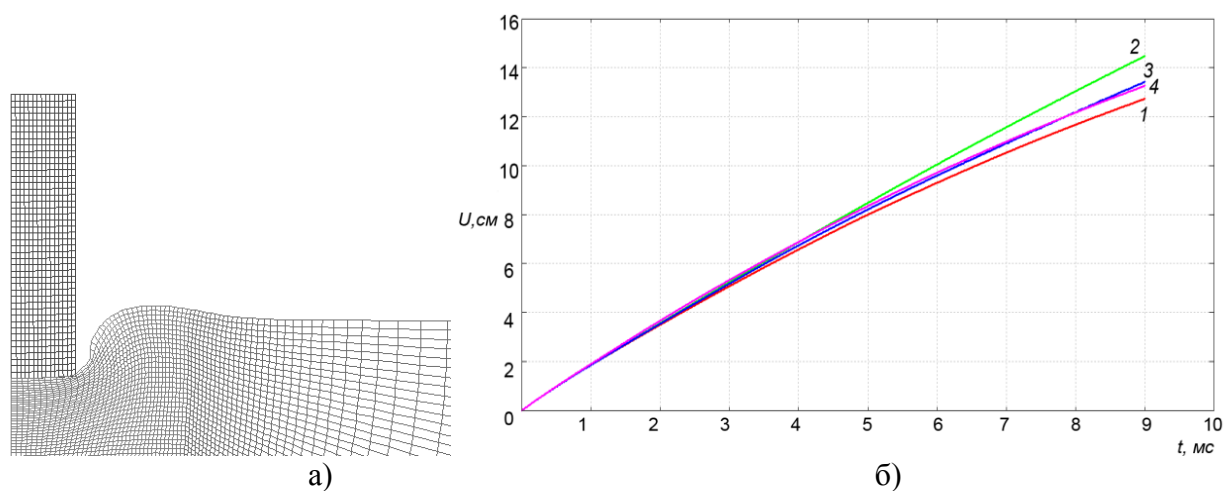


Рис. 10.

С целью исследования особенностей ударноволновых процессов в мерзлых грунтовых средах с помощью пакета программ «Динамика-2» наряду с описанной выше задачей получено численное решение задачи проникания цилиндрического ударника в слоистый (мерзлый – немерзлый) грунт с толщиной верхнего слоя мерзлого грунта 10 см. В данном случае оценивалось влияние конечной глубины промерзания грунта. Нижний слой моделировался грунтом в немерзлом состоянии со следующими характеристиками: $\alpha_1 = 0.154$, $\alpha_2 = 0.271$, $\alpha_3 = 0.575$, $\alpha_4 = 0$, $E_1 = 12 \text{ МПа}$, $E_2 = 2250 \text{ МПа}$, $E_3 = 66250 \text{ МПа}$, $\gamma_1 = 0.01$, $\gamma_2 = 7$, $\gamma_3 = 5$, $\rho_0 = 1.8 \text{ г/см}^3$, $p_e = 0,12 \text{ МПа}$, $\rho_e = 1.80009 \text{ г/см}^3$, $\rho_{\text{lim}} = 2.3 \text{ г/см}^3$; $\gamma_c = 2.1$, $\gamma_p = 8$, $K_e = 400 \text{ МПа}$, $C_e = 471.4 \text{ м/с}$; $G = 143 \text{ МПа}$; $Y_0 = 0,32 \text{ МПа}$, $\mu = \text{tg} \varphi = 0.34$

$P_{pl}=150\text{МПа}$, $Y_{pl}=46,7\text{МПа}$. Расчет проведен практически до полной остановки ударника, его скорость в конце вычисления задачи составила $0,08\text{ м/с}$. При этом время процесса проникания составило 30мс . Максимальное давление в полностью мерзлом грунте возникает в момент времени $t = 0.3\text{мс}$ и составляет 19МПа (рис.11а). Максимальное значение в случае слоистого грунта практически совпадает с приведенным значением, однако область волнового возмущения среды в этом случае существенно меньше и ограничена фактически толщиной слоя мерзлого грунта в связи с меньшими акустическими свойствами немерзлого грунта (рис.11б). В дальнейшем, с течением времени, отличие в размерах области возмущенного движения среды становится все существеннее: распределение давления в момент времени $t = 0.6\text{мс}$ для двух задач изображено соответственно на рис.11в и рис.11г.

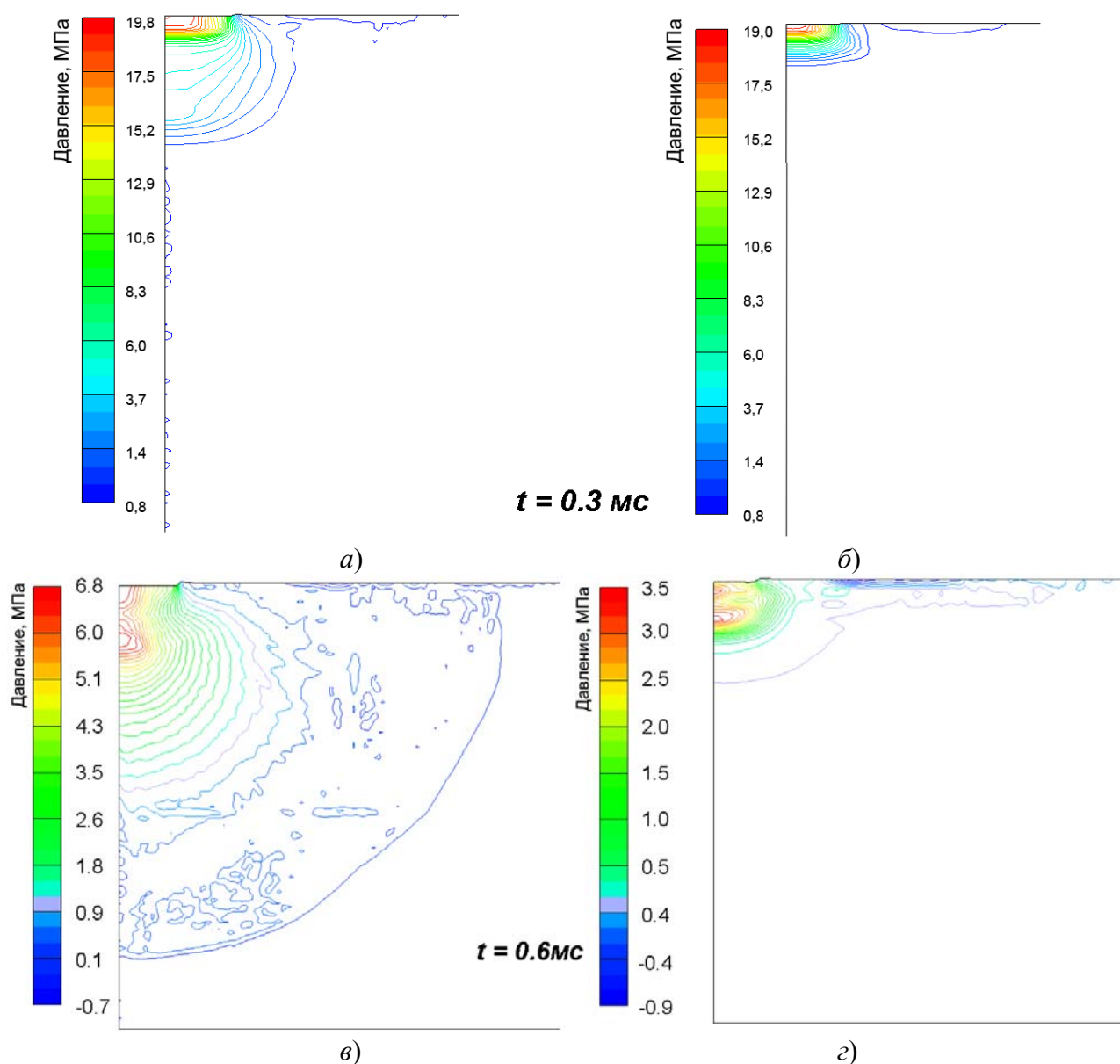


Рис. 11.

Получена временная зависимость силы сопротивления на ударник со стороны грунта. В силу многократного распространения упругих волн по ударнику данная величина носит осциллирующий характер (рис. 12). Максимальное значение силы сопротивления для чисто мерзлого грунта составило 1700000 Н , в дальнейшем, в процессе торможения тела значение силы колеблется в диапазоне $200000\div 300000\text{ Н}$. Зависимости сил сопротивления

мерзлого и слоистого грунта сопоставлены с данной характеристикой в случае удара и проникания в грунтовую среду в немерзлом состоянии. Вследствие влияния волн разгрузки от границы раздела слоев максимальное значение силы сопротивления в слоистом грунте снижается на 8% по сравнению с полностью мерзлым. При этом максимум силы сопротивления прониканию ударника в мерзлый и слоистый грунты более чем в 1.5 раза превышает соответствующее значение для немерзлой грунтовой среды. Проанализировано распределение напряжения σ_{zz} в грунте вдоль оси симметрии на начальном этапе процесса проникания (время – 0.8мс). В слоистом грунте максимум напряжения расположен в зоне немерзлого грунта, амплитудное значение напряжения почти в 2 раза меньше чем в мерзлом.

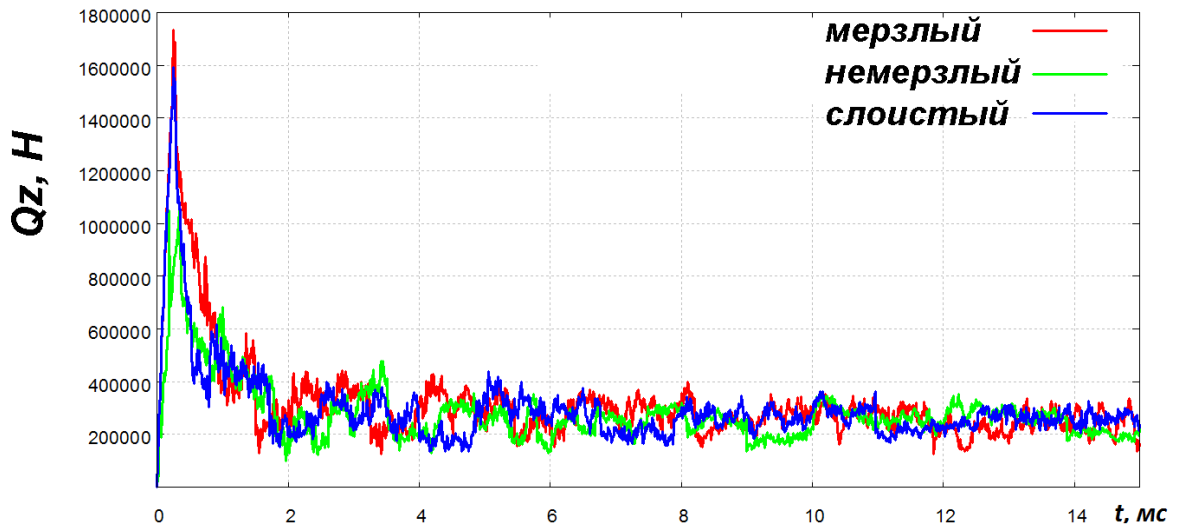


Рис.12.

Получены временные зависимости перемещения ударника (рис.13) при проникании в мерзлый, слоистый и немерзлый грунты. Глубина проникания в мерзлый грунт – 23см, в связи с этим с данной скоростью ударник пробивает слой мерзлого грунта толщиной 10см. В данном случае глубина проникания увеличилась на 12%.

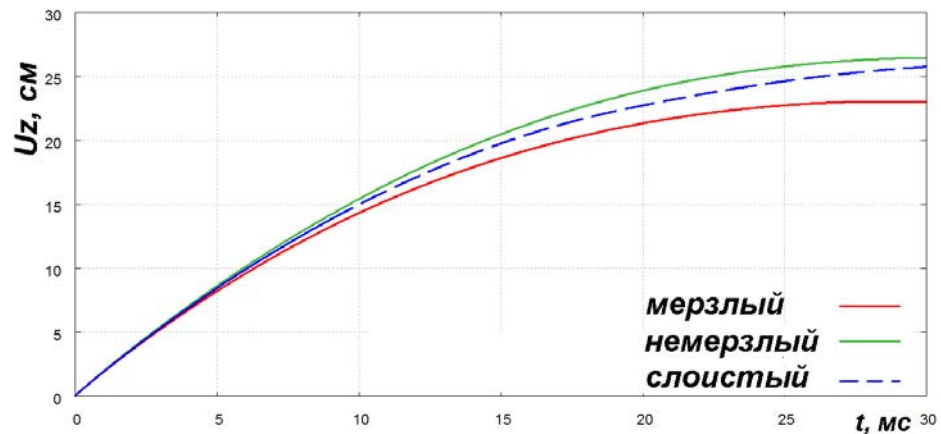


Рис.13.

Основные выводы

1. Разработаны алгоритмы на основе сочетания регулярных и квазиравномерных сеток для моделирования неотражающих краевых условий для решения одномерных и двумерных динамических задач теории упругости в неограниченных областях и в различных системах координат. Алгоритмы используют явные аппроксимации производных по времени и процедуру сглаживания осцилляций,

возникающих на сильно неравномерных сетках. Алгоритмы реализованы в виде модулей, программно совместимых с ППП «Динамика-2».

2. Проведены численные исследования свойств алгоритма на модельных и прикладных задачах ударноволнового нагружения деформируемого полупространства. Определены значения параметров сглаживающих операторов, показана эффективность применения квазиравномерных сеток в сочетании с регулярными сетками в задачах волнообразования вдали от области приложения нагрузки, в том числе для решения задач, допускающих локальное пластическое поведение среды. На основании численных экспериментов по импульсному нагружению упругого полупространства сделаны следующие выводы:

– Применение процедуры сглаживания позволяет подавить (или минимизировать) паразитные возмущения в решении, связанные с сильной неравномерностью сетки во вспомогательной подобласти;

– В случае применения в качестве сглаживающей функции степенной зависимости для каждого количества узлов во вспомогательной подобласти существуют свои оптимальные значения параметров сглаживания. При этом близость к нулю параметров сглаживания приводит к появлению паразитных возмущений в решении, чрезмерное увеличение – к слишком большому сглаживанию и занижению амплитуд волн;

3. Решены новые задачи удара и проникания деформируемых тел в однородный мерзлый грунт, а также в слоистый (мерзлый-немерзлый). Исследовано влияние конечной глубины промерзания грунта на характеристики волновых процессов в грунте и динамику ударника.

Автор выражает благодарность к.т.н. Крылову С.В., к.ф.-м.н. Глазовой Е.Г. за предоставленное программное обеспечение и помощь в проведении численных исследований.

Основные результаты и защищаемые положения диссертации опубликованы в следующих работах:

Публикации в рецензируемых изданиях из списка ВАК

1. Кочетков А.В., Повереннов Е.Ю. Численное решение задач динамической теории упругости методом квазиравномерных сеток в неограниченных областях // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия Механика. Вып. 1(7). Н.Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2006. С. 157-166.
2. Кочетков А.В., Повереннов Е.Ю. Применение метода квазиравномерных сеток при решении динамических задач теории упругости в неограниченных областях // Журнал «Математическое моделирование» 2007 г., том 19, №5, С. 81-92.
3. Кочетков А.В., Повереннов Е.Ю. Эффективный алгоритм решения динамических осесимметричных задач теории упругости в полубесконечных областях // Приволжский научный журнал 2007 г., №4, С. 14-20.
4. Баландин В.В., Брагов А.М., Глазова Е.Г., Кочетков А.В., Крылов С.В., Повереннов Е.Ю. Моделирование импульсных процессов в мягких и мерзлых грунтовых средах // Приволжский научный журнал 2009 г., №3, С. 7-15.

Другие публикации

5. Кочетков А.В., Повереннов Е.Ю. Численное решение плоской динамической задачи теории упругости методом квазиравномерных сеток // Труды VII Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем». Нижний Новгород. 2005г. С. 120-122.
6. Повереннов Е.Ю. Применение метода квазиравномерных сеток для решения задач динамической теории упругости в неограниченных областях // Тезисы докладов 11-

- й Нижегородской сессии молодых ученых (технические науки). Нижний Новгород. 2006г., С. 129-130.
7. Повереннов Е.Ю. Совместное использование равномерных и квазиравномерных сеток при решении задач динамической теории упругости в полубесконечных областях // Тезисы докладов 11-й Нижегородской сессии молодых ученых (математические науки). Нижний Новгород. 2006г., С. 50-51.
 8. Ерошин В.А., Кочетков А.В., Повереннов Е.Ю. Численно – экспериментальное исследование нормального удара трех цилиндрических тел // Тезисы докладов Всероссийской научно-технической конференции, посвященной 20-летию Нижегородского филиала Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН. Нижний Новгород. 24-26 октября 2006 г., С. 59.
 9. Повереннов Е.Ю. Численное решение осесимметричных динамических задач теории упругости методом квазиравномерных сеток в полубесконечных областях для различных систем координат // Тезисы докладов 12-й Нижегородской сессии молодых учёных (математические науки). «Красный плес», 23-26 мая 2007 г., С. 47-48.
 10. Глазова Е.Г., Кочетков А.В., Крылов С.В., Повереннов Е.Ю. Моделирование процессов ударного взаимодействия тел с мерзлыми грунтами // Сборник докладов V научной конференции Волжского регионального центра РАН «Современные методы проектирования и отработки ракетно-артиллерийского вооружения». Саров, ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2007. т.1, с. 527-534.
 11. Повереннов Е.Ю. Применение метода квазиравномерных сеток к решению трехмерных задач динамической теории упругости в полубесконечных областях для различных систем координат // Тезисы докладов итоговой научной конференции учебно-научного инновационного комплекса «Модели, методы и программные средства». Нижний Новгород. 27-30 ноября 2007 г., С. 321-324.
 12. Баландин В.В., Брагов А.М., Глазова Е.Г., Кочетков А.В., Крылов С.В., Повереннов Е.Ю. Моделирование импульсных процессов в мягких и мерзлых грунтовых средах // Сборник материалов Всероссийской научно-технической конференции «Фундаментальные основы баллистического проектирования». Санкт-Петербург. 23-26 июня 2008 г., т.2, С. 12-13.
 13. Глазова Е.Г., Кочетков А.В., Крылов С.В., Повереннов Е.Ю. Численное исследование удара и проникания цилиндрических тел в мерзлый грунт // Тезисы докладов VIII Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем». Нижний Новгород. 22-26 сентября 2008 г., т.2, С. 295.
 14. Кочетков А.В., Повереннов Е.Ю. Численное моделирование проникания ударников в мерзлые грунты // Сборник материалов 47-й Международной конференции «Актуальные проблемы прочности». Нижний Новгород. 1-5 июля 2008 г., т.1, С. 286.
 15. Кочетков А.В., Крылов С.В., Повереннов Е.Ю. Решение задачи внедрения металлических ударников в мерзлый грунт конечно-разностным методом с использованием квазиравномерных сеток // Тезисы докладов Всероссийской конференции по математике и механике, посвященной 60-летию механико-математического факультета Томского государственного университета. Томск. 22-25 сентября 2008 г., С. 263.
 16. Повереннов Е.Ю. Эффективный алгоритм численного решения задач проникания тел в мерзлые грунты // Сборник материалов II Всероссийской молодежной научной конференции «Современные проблемы математики и механики». Томск. 12-14 октября 2011г., С. 293-297.