

На правах рукописи



Артемьева Анастасия Анатольевна

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ
ПРОЦЕССОВ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ,
ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ И ЗАКРИТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ
ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПРИ КОМБИНИРОВАННЫХ
НАГРУЖЕНИЯХ И БОЛЬШИХ ДЕФОРМАЦИЯХ**

**Специальность 01.02.06 –
Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры**

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород –2013

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (НИИМ Нижегородского университета)

Научные руководители: Заслуженный деятель науки РФ, д.ф.-м.н., проф.
Баженов Валентин Георгиевич
к.ф.-м.н., доцент
Нагорных Елена Владимировна

Официальные оппоненты: **Капустин Сергей Аркадьевич**,
д.ф.-м. н., проф., НИИМ Нижегородского
университета, зав. лабораторией
Шклярчук Федор Николаевич,
Заслуженный деятель науки РФ, д.т.н., проф.,
Институт прикладной механики РАН, главный
научный сотрудник

Ведущая организация: Институт проблем машиностроения РАН,
Нижний Новгород

Защита состоится «26» декабря 2013 года в 12.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.166.09 при Нижегородском государственном университете им. Н. И. Лобачевского по адресу: 603950, Н.Новгород, пр. Гагарина, 23, корпус 6.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского

Автореферат разослан «21» ноября 2013 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 212.166.09
кандидат физико-математических наук

Горохов В. А.



Актуальность темы

Тонкостенные оболочки широко используются в современной технике. Они находят применение в строительстве сооружений, машиностроении, авиастроении, ракетостроении, судостроении и других отраслях. Их преимущество заключается в повышенной жёсткости, малом удельном весе и высоких эксплуатационно-прочностных качествах. С развитием уровня техники возрастает сложность применяемых конструкций и требование к их прочности и надежности. Наряду с экспериментальными исследованиями, элементы таких конструкций следует подвергать тщательному теоретическому анализу и расчетному обоснованию прочности и устойчивости.

Применение аналитических методов ограничено рамками грубой идеализации, поэтому эффективное решение прикладных задач динамического деформирования оболочек вращения в условиях интенсивного нагружения возможно лишь с привлечением численных методов. Применение численного моделирования позволяет сократить расходы на дорогостоящие эксперименты, оптимизировать процесс проектирования и значительно сократить сроки внедрения в производство. Однако, при расчете конструкций, необходимо учитывать геометрическую и физическую нелинейность задачи; различные условия закрепления и нагружения и др., что делает численное моделирование нетривиальной и трудоемкой задачей. Ввиду наличия вырожденной координаты расчеты по трехмерной теории зачастую являются неэффективными, что приводит к необходимости введения оболочечной модели.

К настоящему моменту, отсутствуют программные продукты, которые способны описать с достаточной точностью моделирование процессов деформирования оболочек при действии внутреннего давления и (или) растяжения с кручением. Эти задачи характерны для экспериментальных исследований поведения металлических трубчатых образцов при больших деформациях и неоднородном сложном напряженно-деформированном состоянии. Постановка и решение таких обобщенных осесимметричных упругопластических задач с кручением в литературе отсутствуют. Таким образом, исследования, направленные на разработку и совершенствование вычислительных моделей, являются актуальными как для фундаментальной, так и прикладной механики.

Цель диссертационной работы - разработка и программная реализация методики численного решения нелинейных нестационарных задач

осесимметричного упругопластического деформирования оболочек вращения с учетом кручения при комбинированных нагружениях и больших деформациях.

Для достижения поставленной цели рассматриваются следующие **задачи**:

1. Постановка задачи и разработка методики численного решения нелинейных нестационарных задач осесимметричного упругопластического деформирования оболочек вращения общего вида с учетом кручения при комбинированных нагружениях и больших деформациях.

2. Программная реализация методики, ориентированная на решение широкого класса нестационарных задач при комбинированных нагружениях и больших деформациях.

3. Верификация разработанной методики и ее программной реализации.

4. Численное исследование процессов деформирования и предельных состояний оболочечных конструкций, находящихся в условиях неоднородного напряженного состояния при сложном нагружении.

Научная новизна

Осуществлена постановка и разработка методика численного решения обобщенных двумерных нестационарных задач кручения составных упругопластических оболочек вращения с произвольным очертанием меридиана при больших деформациях. Предложенная модель основана на геометрически нелинейной теории оболочек типа Тимошенко. Для учета сложного пути нагружения и эффекта Баушингера при описании пластических деформаций используется теория течения с нелинейным кинематическим и изотропным упрочнением. Вращение элементов как жесткого целого при кручении учитывается введением коротационной производной Яуманна при умеренных сдвиговых деформациях. Для численного решения задачи применяется метод конечного элемента в сочетании с вариационным принципом Журдена.

Программная реализация разработанной методики осуществлена на языке Java, предоставляющем кроссплатформенность и легкую масштабируемость приложения.

Проведены исследования предельных состояний упругопластических процессов деформирования оболочек вращения под действием внутреннего давления и последующего кручения, при комбинированном нагружении растяжением-кручением и кручением-сжатием, рассмотрено поведение цилиндрических оболочек, подкрепленных кольцевыми ребрами жесткости.

Достоверность разработанной методики подтверждается хорошим согласованием с экспериментальными и аналитическими данными, приведенными в литературе, и результатами исследований других авторов.

Практическая ценность

Разработанная методика и алгоритм позволяют существенно расширить класс задач при исследовании процессов упругопластического деформирования и предельных состояний элементов конструкций.

Диссертационная работа выполнена при поддержке

Гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-4807.2010.8, грант НШ-2843.2012.8), гранта РФФИ (12-08-31190-мол_а), Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение 14.132.21.1812).

За полученные результаты автор дважды премирован стипендией Министерства образования Нижегородской области им. академика Г.А. Разуваева, стипендией президента РФ для аспирантов и стипендией президента РФ для научных сотрудников.

Апробация работы

Работа получила высокую оценку в молодежном научно-инновационном конкурсе Фонда содействия развитию малых форм предприятий в научно-технической сфере У.М.Н.И.К. (контракт № 9930 р / 14310, № 11757 р/17164) и региональном конкурсе проектов по разработке и освоению новых видов наукоемкой продукции и технологий «У.М.Н.И.К.-НН-12».

Результаты диссертационной работы докладывались на следующих конференциях и симпозиумах: X Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Н.Новгород, 2011), XVIII Международном симпозиуме «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Ярополец, 2012), IX Всероссийской конференции «Сеточные методы для краевых задач и приложения» (Казань, 2012), XXV Международной конференции «Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов (Санкт-Петербург, 2013), Международной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных

технологий» (Чувашия, 2013), XVI Нижегородской сессии молодых ученых, технические науки (Красный плес, 2011), XVII Нижегородской сессии молодых ученых, математические науки (Арзамасский р-н, 2012), XI молодежной научной школе-конференции «Лобачевские чтения – 2012» (Казань, 2012), украинско-российском научном семинаре «Нестационарные процессы деформирования элементов конструкций, обусловленные воздействием полей различной физической природы» (Львов, 2012).

Благодарности

Автор выражает признательность к.т.н. В. К. Ломунову за консультации в процессе выполнения работы.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-8], 3 из которых статьи в журналах и сборниках, рекомендуемых ВАК. На основе разработанной методики выпущено учебно-методическое пособие для студентов старших курсов и аспирантов естественнонаучных и технических высших учебных заведений.

Личный вклад соискателя

Соискателем осуществлены:

- а) обобщенная постановка задачи и методика численного решения нелинейных нестационарных задач осесимметричного упругопластического деформирования оболочек вращения с учетом кручения;
- б) разработка алгоритмов и программная реализация методики;
- в) верификационные расчеты;
- г) численное исследование процессов деформирования и предельных состояний упругопластических гладких и подкрепленных оболочек вращения.

В. Г. Баженову принадлежит постановка задач и руководство исследованиями. Е. В. Нагорных участвовала в выводе определяющей системы уравнений и проведении верификационных расчетов.

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Основной печатный текст составляет 101 страниц. Для иллюстрации методики и результатов решения в диссертации приведены 35 рисунков и 11 таблиц. Список цитируемой литературы (119 наименования) занимает 11 страниц.

Краткое содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы и сформулированы основные направления исследований.

В первой главе дается краткий обзор математических моделей оболочек, теорий пластичности, численных методов решения задач деформирования тонкостенных оболочек и формулируются основные цели и задачи диссертационной работы.

Линейная теория однородных изотропных оболочек произвольной формы, базирующаяся на гипотезах Кирхгофа, была разработана А. Лявом. Дальнейшим развитием теории и оценкой области применимости занимались В.З. Власов, А.Л. Гольденвейзер, А.И. Лурье, В.В. Новожилов, П.М. Нахди и многие другие. Необходимость учета деформации поперечного сдвига впервые отметил С.П. Тимошенко. Он предложил заменить гипотезу нормальности прямолинейного элемента к срединной поверхности на условие прямолинейности этого элемента и ввести закон изменения напряжений по толщине пластинки, что позволило учесть влияние поперечной деформации сдвига и инерцию вращения. Нелинейная теория оболочек, основанная на модели типа Тимошенко, получила развитие в работах Л.Я. Айнола, В.Б. Спиро, Э. Рейсснера, П.М. Нахди, К.З. Галимова, А.С. Вольмира и других ученых. Развернутый анализ различных вариантов геометрически линейной и нелинейной теории оболочек можно найти в работах Я.М. Григоренко, В.И. Гуляева, Э.И. Григолюка и И.Т. Селезова.

При решении задач устойчивости особого внимания требует выбор критерия потери устойчивости. Оболочки сильно чувствительны к несовершенствам формы, поэтому могут терять устойчивость как в эйлеровых точках бифуркации, так и в предельных точках для несовершенных систем. При анализе оболочечных конструкций в качестве критической нагрузки следует принять максимальную нагрузку, которую выдерживает конструкция перед наступлением катастрофического выпучивания. Такой подход был предложен в 1945 г. В.Т. Койтером и развит в работах его последователей. Критерии потери устойчивости при динамических нагрузках требуют оценки неустановившейся реакции оболочки при различных уровнях нагрузки. Наиболее общие динамические критерии основаны на использовании графиков зависимости максимальной амплитуды выпучивания от величины нагрузки. Критической считается нагрузка, соответствующая резкому возрастанию амплитуд перемещений.

Для исследования процессов упругопластического деформирования и предельных состояний оболочки необходимо определить кинетику её напряженно-деформированного состояния. Первые работы по теории пластичности относятся к концу XIX – началу XX века и связаны с именами Треска, Сен-Венана, Леви, Мизеса, Прандтля и Рейса. Далее теория пластичности продолжает интенсивно развиваться по двум главным направлениям: теория пластического течения и деформационная теория. Основополагающие постулаты и гипотезы деформационной и общей теории пластичности были сформулированы А. А. Ильюшиным, В. Г. Зубчаниновым, Р. А. Васиным и др. В монографии А. А. Поздеева, П. В. Трусова и Ю. И. Няшина теория упругопластических процессов обобщена на случай, когда пластические деформации нельзя считать малыми. Деформационная теория нашла широкое применение при получении бифуркационных нагрузок идеальных пластин и оболочек методом Эйлера (работы А. А. Ильюшина, В. Г. Зубчанинова, В. И. Мяченкова, В. С. Гудрамовича, А. Н. Паутова и др.). Уравнения деформационной теории пластичности хорошо описывают пластическое деформирование при простом нагружении, однако их использование при сложных непропорциональных путях нагружения может приводить к неудовлетворительным результатам.

Обобщение теории пластичности типа течения на учет изотропного и кинематического упрочнения предложено в работах Б. Д. Аннина, Л. М. Качанова, В. В. Новожилова, Ю. И. Кадашевича, Ю. Г. Коротких, В. С. Бондаря и др. Многочисленные исследования показали, что результаты расчетов по теории течения с комбинированным упрочнением правильно описывают процессы упругопластического деформирования средней кривизны. Следует подчеркнуть, что соотношения дифференциальных теорий пластичности имеют вид дифференциальных неинтегрируемых соотношений, что отражает фундаментальный факт зависимости НДС упругопластического тела от истории нагружения.

Построение модели больших упругопластических деформаций предполагает определение тензоров напряжений и скоростей изменения необратимых деформаций. Для тензоров деформаций и напряжений, используемых при построении определяющих соотношений, желательным является свойство объективности, т.е. неизменность компонент тензоров при преобразованиях, соответствующих жесткому движению тела. Скорости изменения тензоров в фиксированных материальных точках, измеряемые производными их компонент в системах координат, совершающих движение относительно системы отсчета, называются конвективными производными.

Если подвижная система координат совершает чистый поворот (с возможным переносом, но без деформирования), то конвективная производная относительно такой системы координат называется коротационной производной. Моделирование процессов деформирования с учетом больших упругопластических деформаций и исследование корректности применения коротационных производных приведены в работах В. Прагера, R. Naghdabadi, X. Zhou, С. Н. Коробейникова, K.J. Bathe и др.

Основные численные методы решения задач нестационарной динамики тонкостенных оболочек включают в себя следующие методы: конечно-разностный, вариационно-разностный и метод конечного элемента. Метод конечных разностей – широко известный и простейший метод интерполяции. Его суть заключается в замене дифференциальных операторов на разностные, что позволяет свести решение дифференциального уравнения к решению его разностного аналога. Большой вклад в теорию разностных схем внесли К.И. Бабенко, А.А. Самарский, В.С. Рябенький, М.Л. Уилкинс и другие.

Вариационно-разностный метод основан на вариационных принципах механики. Построение разрешающих соотношений схемы сводится к конечно-разностной аппроксимации вариационного уравнения и приравнивания к нулю коэффициентов при вариациях узловых перемещений. При простейших аппроксимациях вариационно-разностный метод и МКЭ могут быть идентичны. Вариационно-разностные методы развиты в работах С.Г. Михлина, Л.А. Оганесяна, Г.И. Марчука, В.И. Агошкова, В.Г. Баженова и других авторов.

Основная идея метода конечного элемента заключается в возможности построения решения в отдельных подобластях конечных размеров. Непрерывные функции заменяются приближенными функциями, гладкими в пределах конечного элемента. В итоге исходные дифференциальные уравнения сводятся к системе алгебраических уравнений. Большой вклад в становление метода конечных элементов внесли Р. Курант, Дж. Аргирис, Р. Клаф, О. Зенкевич, Э. Вилсон, М. Айронс, Дж.Т. Оден, Л.А. Розин, А.С. Сахаров, В.А. Постнов, Р.Б. Рикардс, С.А. Капустин, А.И. Голованов и другие.

Во второй главе приводится определяющая система уравнений для описания процессов деформирования упругопластических элементов конструкций и конечно-элементная методика ее решения.

Обобщенная осесимметричная задача с кручением формулируется в цилиндрической системе эйлеровых координат Orz , Oz – ось вращения. Для каждого оболочечного элемента введем местную сопутствующую (лагранжеву) систему координат s, ξ (Рис. 1). Здесь s – длина дуги меридиана оболочечного элемента ($0 \leq s \leq L$), ξ – координата, отсчитываемая от срединной поверхности и нормальная к ней ($-h/2 \leq \xi \leq h/2$), $h = h(s, t)$ – толщина оболочки, t – время.

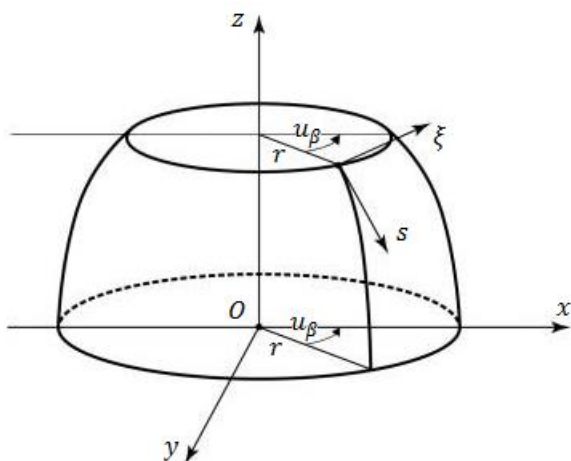


Рис. 1. Местная система координат в случае осесимметричного нагружения

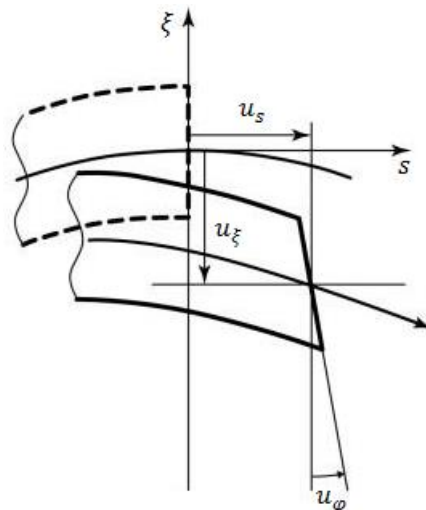


Рис. 2. Перемещения срединной поверхности при деформации оболочки

Общая и местная системы координат связаны соотношениями:

$$s = r\psi_z - z\psi_r, \quad \xi = r\psi_r + z\psi_z,$$

где $\psi_z = -r_{,s}$, $\psi_r = -z_{,s}$ – направляющие косинусы нормали к срединной поверхности, символ $()_{,s}$ означает дифференцирование по пространственной переменной s .

Оболочечные элементы полагаем тонкими, изменением метрики по толщине пренебрегаем. Деформации поперечного сдвига и изгиба считаем малыми, а деформации срединной поверхности – большими. Распределение скоростей перемещений по толщине оболочки представим в виде:

$$\tilde{u}_s(s, \xi, t) = \dot{u}_s(s, t) + \xi \dot{u}_\varphi(s, t),$$

$$\tilde{u}_\xi(s, \xi, t) = \dot{u}_\xi(s, t), \quad \tilde{u}_\beta(s, \xi, t) = r \dot{u}_\beta(s, t).$$

Здесь $\dot{u}_s(s, t)$, $\dot{u}_\xi(s, t)$ – скорости перемещений срединной поверхности в направлении касательной и нормали; $\dot{u}_\varphi(s, t)$ – угловая скорость поворота поперечных сечений в плоскости меридионального сечения (Рис. 2); $\dot{u}_\beta(s, t)$ – угловая скорость поворота относительно оси вращения; символ $(\dot{})$ означает дифференцирование по времени.

Кинематические соотношения формулируются в скоростях и строятся в метрике текущего состояния, что позволяет учитывать большие деформации и формоизменения оболочки. Распределение компонент скоростей деформаций (симметричной части градиента скорости перемещений) по толщине примем в виде:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{ii} &= \dot{\varepsilon}_{ii}^0 + \xi \dot{\varepsilon}_{ii}^I, & i = s, \beta \\ \dot{\varepsilon}_{s\xi} &= \dot{\varepsilon}_{s\xi}^0 (1 - (2\xi/h)^2), & \dot{\varepsilon}_{s\beta} = \dot{\varepsilon}_{s\beta}^0,\end{aligned}\quad (1)$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij}^0$ – компоненты скорости деформации срединной поверхности, $\xi \dot{\varepsilon}_{ii}^I$ – компоненты скорости деформации изгиба.

Компоненты тензора скоростей деформации и скорость вращения $\dot{\omega}_{s\beta}$ элемента выразим через компоненты обобщенных скоростей перемещений $\dot{u}_r, \dot{u}_z, \dot{u}_\varphi, \dot{u}_\beta$

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{ss}^0 &= \dot{u}_{r,s} \psi_z - \dot{u}_{z,s} \psi_r, & \dot{\varepsilon}_{\beta\beta}^0 &= \dot{u}_r r^{-1}, \\ \dot{\varepsilon}_{ss}^I &= \dot{u}_{\varphi,s}, & \dot{\varepsilon}_{\beta\beta}^I &= \dot{u}_\varphi \psi_z r^{-1}, & \dot{\varepsilon}_{s\beta}^0 &= \frac{1}{2} r \dot{u}_{\beta,s}, \\ \dot{\varepsilon}_{s\xi}^0 &= \frac{1}{2} (\dot{u}_\varphi + \dot{u}_{r,s} \psi_r + \dot{u}_{z,s} \psi_z), & \dot{\omega}_{s\beta} &= -\frac{1}{2} r \dot{u}_{\beta,s}.\end{aligned}\quad (2)$$

Учет упругопластических свойств материала оболочки (металлы, сплавы) осуществляется в рамках теории течения с нелинейным изотропным и кинематическим упрочнением. Предполагается, что упругие деформации малы, а пластические деформации могут быть большими. Компоненты тензора скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ можно представить в виде суммы упругой $\dot{\varepsilon}_{ij}^e$ и пластической $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ составляющих, а изменение объема элемента тела упруго:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad \dot{\varepsilon}_{ii}^p = 0, \quad i, j = s, \beta, \xi.$$

Компоненты тензора напряжений Коши, нормальные к срединной поверхности оболочки, принимаются равными нулю ($\sigma_{\xi\xi} = 0$). Из этого условия и обобщенного закона Гука определяются компонента $\dot{\varepsilon}_{\xi\xi}^e$, компоненты скоростей напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ и напряжения σ_{ij} :

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{\xi\xi}^e &= \frac{\mu}{\mu-1} (\dot{\varepsilon}_{ss}^e + \dot{\varepsilon}_{\beta\beta}^e), \\ \dot{\sigma}_{ss} &= \frac{E}{1-\mu^2} (\dot{\varepsilon}_{ss}^e + \mu \dot{\varepsilon}_{\beta\beta}^e), & \dot{\sigma}_{\beta\beta} &= \frac{E}{1-\mu^2} (\dot{\varepsilon}_{\beta\beta}^e + \mu \dot{\varepsilon}_{ss}^e), \\ \dot{\sigma}_{s\beta} &= \frac{E}{1+\mu} \dot{\varepsilon}_{s\beta}^e, & \dot{\sigma}_{s\xi} &= \frac{E}{1+\mu} \dot{\varepsilon}_{s\xi}^e, \\ D_j \sigma_{ij} &= \dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{jk} \dot{\omega}_{ki} + \sigma_{ik} \dot{\omega}_{kj}, & i, j, k &= s, \beta, \\ \sigma_{ij} &= \int_0^t D_j \sigma_{ij} dt, & i, j &= s, \beta, & \sigma_{s\xi} &= \int_0^t \dot{\sigma}_{s\xi} dt,\end{aligned}$$

где E – модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона, символ D_j обозначает производную по Яуманну, которая учитывает поворот элемента оболочки за счет сдвиговой деформации как квазижесткого целого относительно нормали к её срединной поверхности при кручении.

Уравнение поверхности текучести принимается в форме Мизеса. Скорости пластических составляющих деформации определяются ассоциированным законом течения:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{ij}^p &= \dot{\lambda} n_{ij}, & n_{ij} &= \sigma'_{ij} / \sqrt{\sigma'_{ij} \sigma'_{ij}}, & \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} &= \sigma_T^2(\kappa), \\ \sigma'_{ij} &= \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} - \rho_{ij}, & \sigma &= \frac{1}{3} (\sigma_{ss} + \sigma_{\beta\beta}), \\ \dot{\rho}_{ij} &= g_1 \dot{\varepsilon}_{ij}^p - g_2 \rho_{ij} \dot{\kappa}, & \rho_{ij} &= \int_0^t \dot{\rho}_{ij} dt, & \kappa &= \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t \sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p} dt,\end{aligned}$$

здесь $\sigma_T(\kappa)$ – радиус поверхности текучести; κ – параметр Одквиста, δ_{ij} – символ Кронекера, ρ_{ij} – тензор микронапряжений, определяющий координаты центра поверхности текучести, g_1, g_2 – экспериментально определяемые модули анизотропного упрочнения. Введение модулей g_1, g_2 позволяет моделировать исчезающую память переменной ρ_{ij} . Причем, первый член пропорционален скорости пластических деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ и представляет анизотропную часть упрочнения, а второй пропорционален полной величине ρ_{ij} и описывает потерю памяти. Параметр $\dot{\lambda}$, тождественно равный нулю при упругом деформировании, определяется при пластическом деформировании из условия прохождения мгновенной поверхности текучести через конец вектора догрузки.

Вариационные уравнения движения оболочки следуют из уравнения баланса виртуальных мощностей работы механики сплошных сред:

$$\delta \mathcal{E} - \delta A = 0.$$

Вариацию внутренней энергии деформации оболочки $\delta \mathcal{E}$ и элементарную работу внешних сил δA , с учетом сил инерции и принятых гипотез теории оболочек, запишем в виде

$$\begin{aligned}& \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{ss} \delta \dot{\varepsilon}_{ss} + \sigma_{\beta\beta} \dot{\varepsilon}_{\beta\beta} + 2\sigma_{s\xi} \delta \dot{\varepsilon}_{s\xi} + 2\sigma_{s\beta} \delta \dot{\varepsilon}_{s\beta}) r ds d\xi - \int_0^L (p_r \delta \dot{u}_r + \\ & p_z \delta \dot{u}_z) r ds + \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \left((\ddot{u}_r - r \dot{u}_{\beta}) \delta \dot{u}_r + \ddot{u}_z \delta \dot{u}_z + \xi^2 \ddot{u}_{\varphi} \delta \dot{u}_{\varphi} + \right. \\ & \left. (r \ddot{u}_{\beta} + 2\dot{u}_r \dot{u}_{\beta}) r \delta \dot{u}_{\beta} \right) r ds d\xi - [r (P_r \delta \dot{u}_r + P_z \delta \dot{u}_z + M^{\text{II}} \delta \dot{u}_{\varphi} + \\ & P_{\beta} \delta \dot{u}_{\beta})]_{s=0,L} = 0.\end{aligned}\tag{3}$$

Здесь ρ – плотность материала, P_r, P_z, P_β, M^H – внешние усилия и изгибающий момент, приложенные к контуру оболочки; p_r, p_z – поверхностные нагрузки.

Выполняя интегрирование по толщине ξ и подставляя (1) и (2) в (3), получим уравнение мощностей работ относительно вариаций скоростей перемещений $\delta\dot{u}_r, \delta\dot{u}_z, \delta\dot{u}_\varphi, \delta\dot{u}_\beta$:

$$\int_0^L \left\{ (Q\psi_r + N_s\psi_z)\delta\dot{u}_{r,s} + (Q\psi_z - N_s\psi_r)\delta\dot{u}_{z,s} + M_s\delta\dot{u}_{\varphi,s} + rT\delta\dot{u}_{\beta,s} + (M_\rho\ddot{u}_z - p_z)\delta\dot{u}_z + [r^{-1}N_\beta + M_\rho(\ddot{u}_r - r\dot{u}_\beta^2) - p_r]\delta\dot{u}_r + (Q + r^{-1}M_\beta\psi_z + J_\rho\ddot{u}_\varphi)\delta\dot{u}_\varphi + r^2M_\rho\ddot{u}_\beta\delta\dot{u}_\beta \right\} rds - [r(P_r\delta\dot{u}_r + P_z\delta\dot{u}_z + M^H\delta\dot{u}_\varphi + P_\beta\delta\dot{u}_\beta)]_{s=0,L} = 0$$

где $N_s, N_\beta, T, Q, M_s, M_\beta$ – внутренние усилия и моменты; M_ρ, J_ρ – масса и момент инерции, определенные интегралами:

$$N_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ii} d\xi, \quad M_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ii} \xi d\xi, \quad i = s, \beta, \\ Q = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{s\xi} \left(1 - \left(\frac{2\xi}{h} \right)^2 \right) d\xi, \quad (4)$$

$$T = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{s\beta} d\xi, \quad M_\rho = \int_{-h/2}^{h/2} \rho d\xi, \quad J_\rho = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \xi^2 d\xi.$$

Вариационное уравнение движения составной тонкостенной конструкции, состоящей из A оболочечных элементов, запишется в виде

$$\sum_{a=1}^A \left\{ \int_0^L \left\{ (Q\psi_r + N_s\psi_z)\delta\dot{u}_{r,s} + (Q\psi_z - N_s\psi_r)\delta\dot{u}_{z,s} + M_s\delta\dot{u}_{\varphi,s} + rT\delta\dot{u}_{\beta,s} + (M_\rho\ddot{u}_z - p_z)\delta\dot{u}_z + [r^{-1}N_\beta + M_\rho(\ddot{u}_r - r\dot{u}_\beta^2) - p_r]\delta\dot{u}_r + (Q + r^{-1}M_\beta\psi_z + J_\rho\ddot{u}_\varphi)\delta\dot{u}_\varphi + r^2M_\rho\ddot{u}_\beta\delta\dot{u}_\beta \right\} rds - \eta [r(P_r\delta\dot{u}_r + P_z\delta\dot{u}_z + M^H\delta\dot{u}_\varphi + P_\beta\delta\dot{u}_\beta)]_{s=0,L} \right\}^a = 0. \quad (5)$$

Параметр η принимает значение 0 или 1 в соответствии с тем, примыкает контур оболочечного элемента к узлу сочленения или нет.

Уравнение движения конструкции необходимо дополнить начальными условиями:

$$u_\alpha(0) = u_\alpha^0, \quad \dot{u}_\alpha(0) = \dot{u}_\alpha^0, \quad \alpha = r, z, \beta, \varphi,$$

где $u_\alpha^0, \dot{u}_\alpha^0$ – перемещения и скорости перемещений оболочечных элементов в начальный момент времени. Полученное вариационное уравнение включает в себя уравнение движения всей конструкции и статические граничные условия для контурных сечений элементов, не входящих в узлы сочленения.

Для решения полученного вариационного уравнения используется явная конечно-разностная схема «крест». Срединная поверхность каждого оболочечного элемента аппроксимируется T_1 узлами вдоль меридиана. Кроме

этого, вводится промежуточная сетка, смещенная на половину шага по отношению к основной. Значения компонент тензоров деформаций и напряжений вычисляются в узлах промежуточной сетки, а перемещения и скорости перемещений – в узлах основной разностной сетки. Для определения напряжений и пластических деформаций оболочечный элемент разбивается на T_2 узлов по толщине. Внутренние усилия и моменты определяются путем численного интегрирования напряжений по толщине. Процесс деформирования во времени разбивается на временные слои $t^0, t^1, \dots, t^k, \dots$ с шагом $\Delta t^{k+1} = t^{k+1} - t^k$. Интегрирование уравнения (5) при дискретизации заменяется суммированием величин виртуальных работ по всем ячейкам сетки, покрывающей конструкцию. Собирая коэффициенты при вариациях скоростей перемещений $(\delta \dot{u}_r)_j, (\delta \dot{u}_z)_j, (\delta \dot{u}_\beta)_j, (\delta \dot{u}_\varphi)_j$, получим

$$\sum_{j=1}^N \left[(\Phi_M \ddot{u}_r - \Phi_r)_j (\delta \dot{u}_r)_j + (\Phi_M \ddot{u}_z - \Phi_z)_j (\delta \dot{u}_z)_j + (\Phi_J \ddot{u}_\varphi - \Phi_\varphi)_j (\delta \dot{u}_\varphi)_j + (\Phi_Y \ddot{u}_\beta - \Phi_\beta)_j (\delta \dot{u}_\beta)_j \right] = 0,$$

где N – суммарное количество узлов дискретной модели конструкции. Учитывая произвольность и независимость вариаций, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую движение дискретной модели оболочки:

$$\begin{aligned} (\Phi_M \ddot{u}_r)_j &= (\Phi_r)_j, & (\Phi_M \ddot{u}_z)_j &= (\Phi_z)_j, \\ (\Phi_J \ddot{u}_\varphi)_j &= (\Phi_\varphi)_j, & (\Phi_Y \ddot{u}_\beta)_j &= (\Phi_\beta)_j. \end{aligned}$$

Здесь $\Phi_r, \Phi_z, \Phi_\varphi, \Phi_\beta$ – обобщенные силы, действующие на расчетный узел j ; Φ_M, Φ_J, Φ_Y – узловые массы и моменты инерции.

Решение полученной системы уравнений строится по явной конечно-разностной схеме второго порядка точности. Скорости, перемещения и координаты узлов сетки вычисляются по рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} \dot{f}_j^{k+\frac{1}{2}} &= \dot{f}_j^{k-\frac{1}{2}} + (\Phi_\alpha)_j^k / (\Phi_\zeta)_j^k \Delta t^{k+\frac{1}{2}}, & f_j^{k+1} &= f_j^k + \dot{f}_j^{k+\frac{1}{2}} \Delta t^{k+1}, \\ \Delta t^{k+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} (\Delta t^{k+1} + \Delta t^k), & \alpha_j^{m+1} &= \alpha_j^0 + \sum_{p=1}^{m+1} (u_\alpha)_j^p, \\ f &= u_\alpha, & \alpha &= r, z, \varphi, \beta, & \zeta &= M_\rho, J_\rho, Y_\rho, & j &= \overline{1, T_1}. \end{aligned} \quad (6)$$

В третьей главе описываются алгоритм и реализация разработанной математической модели.

Изложенная выше явная разностная схема имеет на гладких решениях второй порядок точности от шагов сетки по пространству и времени при

задании кинематических граничных условий. Оценки устойчивости схемы имеют вид

$$\begin{cases} \Delta t \leq \Delta s/c, h \geq \Delta s, \\ \Delta t \leq h/c, \Delta s > h, \end{cases}$$

где h - толщина оболочки, c – скорость звука.

При решении большинства задач достаточная точность достигается при использовании пространственного шага сетки вдоль срединной поверхности порядка толщины оболочки. Но с точки зрения эффективности вне зоны краевых эффектов целесообразно применять сетки с большими размерами ячеек. В этом случае ограничение на временной шаг $\Delta t \leq h/c$ становится весьма обременительным. Поскольку оно определяется длинноволновыми высокочастотными сдвиговыми колебаниями, то целесообразной становится регуляризация разностной схемы, позволяющая понижать частоты этих форм колебаний. В. Г. Баженовым и Д. Т. Чекмаревым предложен и обоснован метод повышения эффективности явных численных схем интегрирования уравнений теории оболочек типа Тимошенко путем введения регуляризирующего множителя к инерции вращения¹:

$$\begin{cases} 1, & \Delta s/h \leq 1, \\ ((1 + (\Delta s/h)^2)^{-1}), & \Delta s/h > 1. \end{cases}$$

В результате при $\Delta s/h = n \gg 1$ удается без понижения точности существенно (в n раз) увеличить шаг интегрирования по времени.

Перед началом расчета напряженно-деформированного состояния конструкции необходимо выбрать расчетную схему, т.е. выделить оболочечные элементы и узлы сочленения. При решении задачи расчетная область разбивается на конические конечные элементы. Узлы сопряжения конечных элементов с толщинами $h_{i+\frac{1}{2}}$ определяются координатами $r_i, z_i, i = \overline{1, T_1}$. Пользователь может задать равномерную сетку или сетку со сгущениями для более точного описания мест локализации деформаций. Для оболочечных элементов задаются начальные и граничные условия, поверхностные нагрузки.

По известному на момент времени $t = t^m$ распределению параметров напряженно-деформированного состояния из уравнения движения при помощи соотношений (6) определяются компоненты скоростей перемещений $(\dot{u}_\alpha)_j^{m+\frac{1}{2}}$, перемещений $(u_\alpha)_j^{m+1}$ и новая геометрия оболочки.

¹ Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. Решение задач нестационарной динамики пластин и оболочек вариационно-разностным методом. — Н.Новгород : Изд. ННГУ, 2000.

Исходя из условий кинематической совместности, вычисляются скорости перемещений и перемещения в контурных узлах оболочечных элементов, примыкающих к узлам сочленения.

Дальнейшим этапом расчета на временном слое является вычисление компонент тензора скоростей деформаций по формулам (1), (2). На каждом слое разбиения по толщине проверяется условие текучести Мизеса и определяются пластические деформации. Для нахождения приращений пластических деформаций в оболочечном элементе организуется итерационный процесс «посадки» компонент девиатора напряжений на поверхность текучести.

Далее по формулам численного интегрирования находятся усилия и моменты в оболочечных элементах (4). Исходя из напряженно-деформированного состояния конструкции, формируются коэффициенты уравнений движения $(\Phi_\alpha)_i^{m+1}$ для следующего временного слоя, где процесс вычислений повторяется. Решение определяющей системы уравнений при заданных начальных и граничных условиях производится по явной конечно-разностной схеме интегрирования по времени типа «крест».

Используемый вариационно-разностный метод дискретизации численного решения задачи совпадает с методом конечных элементов при линейной аппроксимации функций формы и постоянных тензорах деформаций и напряжений внутри конечного элемента.

На основе приведенного алгоритма была разработана программа ShellSolver. Эта программа предназначена для численного решения нелинейных динамических и квазистатических задач осесимметричного упругопластического деформирования составных оболочек вращения с учетом кручения при комбинированных нагружениях и больших деформациях. В широко распространенных коммерческих расчетных программах ABAQUS, ANSYS, COSMOS/M, LS-DYNA, NASTRAN, как правило, реализованы лишь классические модели неупругого поведения материала. В этих пакетах представлена возможность решения осесимметричных задач лишь при отсутствии кручения, что ограничивает область их практического применения. Недостаточность предоставляемых моделей особенно заметна при анализе больших деформаций, исследовании сложных режимов нагружения, решении нестандартных задач, связанных с проведением научных исследований. Поэтому возникает необходимость развития оригинального программного обеспечения.

Программа написана на языке Java. Объектная ориентированность языка способствует наиболее эффективной организации зависимых элементов

модели. Полиморфизм, наследование и инкапсуляция позволяют естественным образом отразить многосторонние связи между отдельными объектами и осуществлять дальнейшее расширение классов без необходимости исправления существующего кода. Кроссплатформенность языка позволяет запускать программу без дополнительных модификаций на любой операционной системе с предустановленной виртуальной java-машиной. Благодаря динамическому выделению памяти в программе отсутствуют внутренние принципиальные ограничения на количество оболочек и число расчетных элементов. Среда (Eclipse) и средства разработки (JDK) находятся в открытом доступе и не требуют покупки дополнительных лицензий.

В четвертой главе приведена верификация вычислительной модели. Показана корректность применения производной Яумана для поставленной задачи.

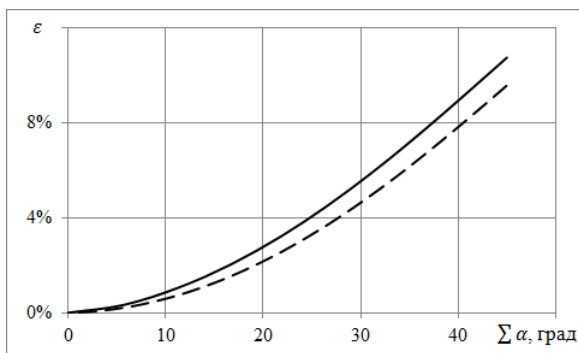


Рис. 3. Погрешности вычисления углов сдвига с использованием производной Яуманна по сравнению с аналитическим значением $\varepsilon = (\sum 2\omega - \sum \alpha) / \sum \alpha$. Сплошной линией показан расчет с шагом по окружной координате 0.3° , штриховой линией – расчет с шагом 0.06° , $\sum \alpha$ – суммарные углы сдвига.

Для проверки точности определения поворота элемента ω как квазижесткого целого с помощью производной Яуманна осуществляется сравнение результатов расчета с углами сдвига, найденными из геометрических вычислений

$$\alpha = \arccos \frac{r_1^2 + z_2 z_3 + r_2 r_3 \cos(\beta_2 - \beta_3) - r_1 r_2 \cos \beta_2 - r_1 r_3 \cos \beta_3}{\sqrt{(r_1^2 + r_2^2 + z_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \beta_2)(r_1^2 + r_3^2 + z_3^2 - 2r_1 r_3 \cos \beta_3)}}, \quad \omega \approx \alpha / 2.$$

Здесь (r_i, z_i, β_i) – цилиндрические координаты, определяющие начальное и конечное положение касательной к меридиональному сечению оболочки

Исследования проводились для цилиндрической оболочки ($R_0 = L_0$) с шагом по окружной координате $\Delta\beta = 0.6^\circ, 0.3^\circ, 0.06^\circ, 0.03^\circ$. На рис. 3 приведены погрешности вычисления углов сдвига $\varepsilon = (\sum 2\omega - \sum \alpha) / \sum \alpha$. Результаты сравнения показали приемлемую точность вычисления ω при суммарных углах поворота $\sum \alpha$ до 45° . Погрешность вычисления ε составила менее 10% и уменьшалась с измельчением шага по окружной координате.

Следует отметить, что деформации сдвига при кручении тонких оболочек ограничены 6° из соображений устойчивости осесимметричного процесса деформирования. Поэтому введение производной Яуманна вполне обосновано при использовании явной схемы интегрирования с малыми шагами по времени.

Решены тестовые задачи о поперечном колебании балки и круглой пластины в упругой постановке. Проведено исследование упругопластического выпучивании цилиндрических и конических оболочек при продольном ударе, сферической оболочки при внешнем равномерном давлении и цилиндрической оболочки при кручении. При решении квазистатических задач скорости нагружения принимались такими, чтобы скорость деформации составляла 10 с^{-1} , а начальное распределение скоростей перемещений по длине бралось линейным. Это обеспечивало пренебрежимо малый вклад сил инерции в решение квазистатической задачи. Достоверность полученных результатов подтверждается хорошим согласованием с экспериментальными данными, а так же результатами расчётов по другим методикам.

Для верификации методики при комбинированном нагружении теоретически и экспериментально рассматривалось совместное действие растяжения и кручения на цилиндрическую оболочку. Образец выполнен из стали марки 12Х18Н10Т. При численном моделировании использовалась диаграмма деформирования, полученная из эксперимента на растяжение. Геометрические размеры оболочки: длина рабочей части $L_0 = 92 \text{ мм}$, средний радиус $R_0 = 14.5 \text{ мм}$, толщина $h = 1 \text{ мм}$. Один торец оболочки жестко защемлялся, другой – перемещался и закручивался относительно оси с постоянными осевой \dot{u}_z и угловой скоростью \dot{u}_β . Отношение скорости деформации кручения к скорости деформации растяжения равнялось 6.

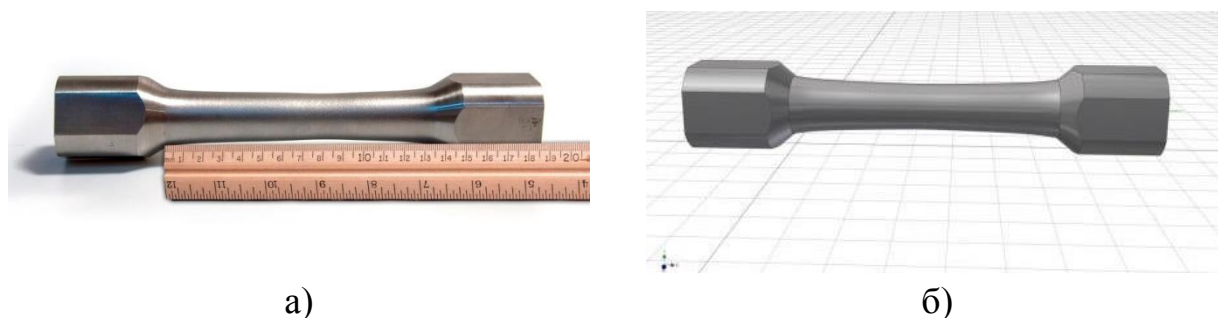


Рис. 4. Остаточная форма образца при нагружении растяжением-кручением, полученная в эксперименте (а) и при численном моделировании (б).

Полученные в численном расчете результаты сравнивались с экспериментальными данными². На рис. 4 приведена форма образца после потери устойчивости пластического деформирования, полученная при расчете и в эксперименте. Погрешность в определении внешнего диаметра деформированного образца по предложенной в работе методике составляет менее 1% (23.68 мм при численном расчете и 23.6 мм в эксперименте).

На рис. 5 представлены графики зависимостей осевой силы от относительного удлинения образца и крутящего момента от угла закручивания, полученные при численном расчете и в эксперименте. Некоторое различие в графиках наблюдается только на начальном этапе нагружения при малых деформациях, что объясняется особенностями проведения эксперимента.

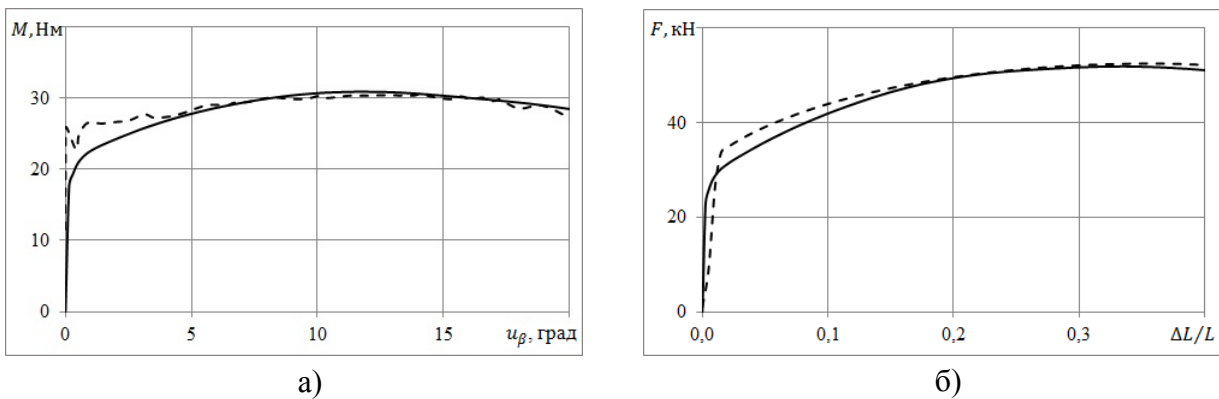


Рис. 5. Графики зависимости крутящего момента от угла закручивания u_β (а) и осевой силы от относительного удлинения образца $\Delta L/L$ (б). Сплошной линией показаны результаты численного расчета, пунктиром – экспериментальные значения.

В пятой главе исследуется влияние кручения на устойчивость и закритическое поведение оболочек вращения. На базе разработанной методики рассматривается решение нелинейных динамических и квазистатических задач осесимметричного упругопластического деформирования составных оболочек вращения при комбинированных нагружениях и больших деформациях.

Рассмотрена задача раздачи цилиндрической оболочки с неподвижно защемленными торцами под действием линейно нарастающего внутреннего давления q . Образец выполнен из стали марки 12X18H10T. Геометрические размеры оболочки: длина рабочей части $L = 92$ мм, средний радиус $R = 14.5$ мм, толщина $h = 1$ мм. Для исследования процесса деформирования

² Эксперимент проводился Д. А. Казаковым на экспериментальной базе НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского.

вводится параметр $q^* = qR/h\sigma_T$, характеризующий текущий уровень давления. Относительные прогибы оболочки, полученные при значениях параметра $q^* = 1.5, 1.7, 1.9, 2.0$, сопоставлялись с данными, приведенными в работе В. Г. Баженова и В. К. Ломунова³. Различие по полученным прогибам не превышает 1%.

Далее осуществляется исследование раздачи цилиндрической оболочки при сложном нагружении. На оболочку действовало внутреннее давление, затем при неизменном давлении один торец оболочки закручивался с постоянной угловой скоростью \dot{u}_β , а второй оставался неподвижно заземленным. На рис. 6 представлены максимальные прогибы оболочки при нагружении давлением в зависимости от параметра q^* и при нагружении давлением-кручением в зависимости от угла закручивания u_β .

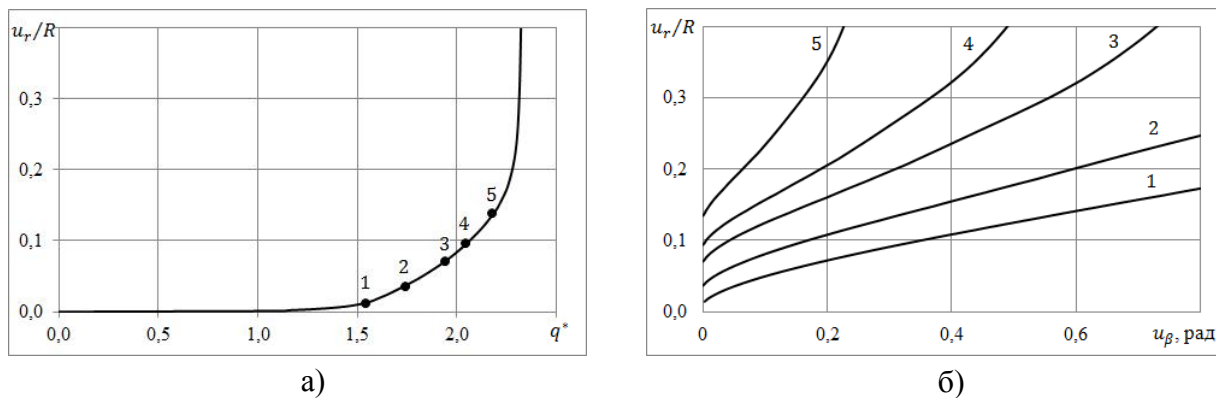


Рис. 6. Зависимость максимального прогиба оболочки от давления $q^* = qR/h\sigma_T$ (а) и от суммарного угла закручивания u_β (б). Маркерами отмечены величины давления, по достижению которых оболочка подвергалась кручению.

Численное решение задачи показывает увеличение прогиба оболочки при кручении и неизменном давлении. Таким образом, в зависимости от предварительно достигнутого уровня давления при наложении кручения могут быть достигнуты предельные состояния оболочки.

Далее исследуется потеря устойчивости цилиндрической оболочки при квазистатическом нагружении растяжением-кручением. Один торец оболочки жестко заземлялся, другой – перемещался и (или) закручивался относительно оси с постоянными осевой скоростью \dot{u}_z и угловой скоростью \dot{u}_β . Для оценки взаимного влияния двух видов нагружения на процесс деформирования вводятся следующие параметры:

³ Баженов В. Г., Ломунов В. К. Влияние статического давления на устойчивость упругопластических цилиндрических оболочек при продольном ударном нагружении // Прикладные проблемы прочности и пластичности. – 1979. – Вып. 12. – С. 39-42.

$$q = R_0 u_\beta / \sqrt{3} u_z, \quad \bar{\varepsilon}_{zz} = u_z / L_0,$$

$$F = 2\pi R_0 \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{zz} d\xi, \quad M = 2\pi R_0^2 \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\beta z} d\xi,$$

здесь $\bar{\varepsilon}_{zz}$ - осевая деформация; u_z и u_β - осевые перемещение и угол закручивания между торцами, F - осевая сила, M - крутящий момент. Кинематический параметр q характеризует «долю кручения и растяжения» (при чистом кручении $q = \infty$, при одноосном растяжении $q = 0$, при комбинированном нагружении $0 < q < \infty$).

В предположении $q = const$, суммарную работу осевой силы и крутящего момента можно выразить через обобщенную силу W :

$$A = \int_0^{u_z} F du_z + \int_0^{u_\beta} M du_\beta = \int_0^{\bar{\varepsilon}_I} W d\bar{\varepsilon}_I.$$

В качестве критерия потери устойчивости процесса однородного пластического деформирования оболочки с локализацией деформаций в виде шейки принимается условие $dW/d\bar{\varepsilon}_I = 0$, характеризующее момент достижения обобщенной силой W максимальных значений. Данное условие является обобщением известного условия А. Консидера. Силы и моменты, полученные при решении задачи, приведены на рис. 7.

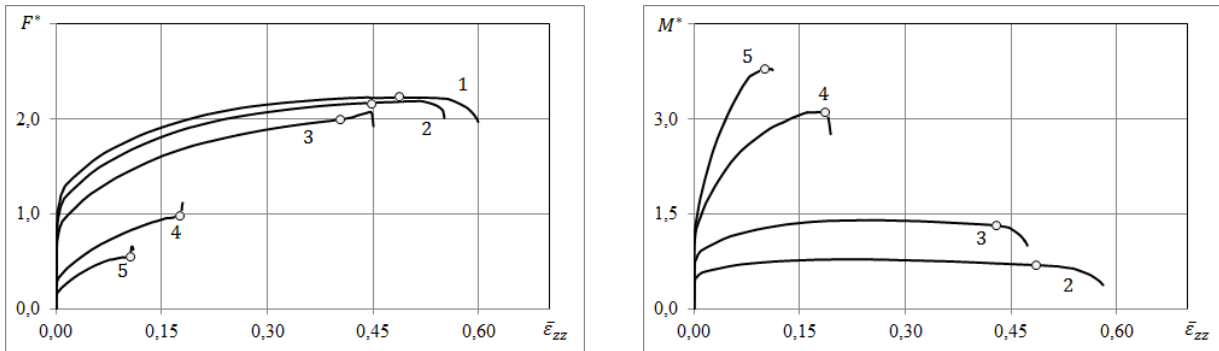


Рис. 7. Зависимость условной осевой силы $F^* = F/F_T$, $F_T = 2\pi R_0 h \sigma_T$ и крутящего момента $M^* = M/M_T$, $M_T = 2\pi h R_0^2 \sigma_T / \sqrt{3}$ от осевой деформации $\bar{\varepsilon}_{zz}$ при значениях параметра $q = 0, 0.5, 1, 4, 8$ (кривые 1-5 соответственно). Маркерами на кривых отмечены моменты потери устойчивости оболочки.

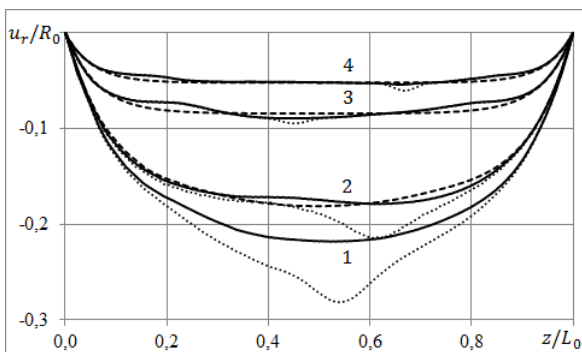


Рис. 8. Изменение радиуса u_r/R_0 вдоль оси оболочки z/L_0 при $q = 0, 1, 4, 8$ (кривые 1-4). Сплошными линиями обозначены формы оболочек в моменты потери устойчивости, точками отмечены выпучины при дальнейшем нагружении. Пунктирные линии соответствуют формам оболочек, полученным при чистом растяжении.

На рис. 8 показаны распределения относительного изменения радиуса вдоль оси оболочки при различных значениях кинематического параметра q . До момента потери устойчивости форма оболочки определяется только ее относительным удлинением $\bar{\varepsilon}_{zz}$ и не зависит от доли кручения. При одноосном растяжении потеря устойчивости происходит при $\bar{\varepsilon}_{zz} = 0.5$. Увеличение доли кручения вызывает потерю устойчивости на более ранней стадии растяжения.

Далее проводится исследование потери устойчивости оболочки при динамическом нагружении. Свободный торец оболочки перемещается с линейно возрастающей скоростью $\dot{u}_z = a \cdot t$, где коэффициент a варьируется от 0 до 25 м/с². При динамическом растяжении оболочки, также как и при сжатии, область локализации деформаций смещается к нагружаемому торцу, пропорционально коэффициенту ускорения a (рис. 9). Аналогичные результаты получаются при комбинированном пропорциональном нагружении растяжением-кручением.

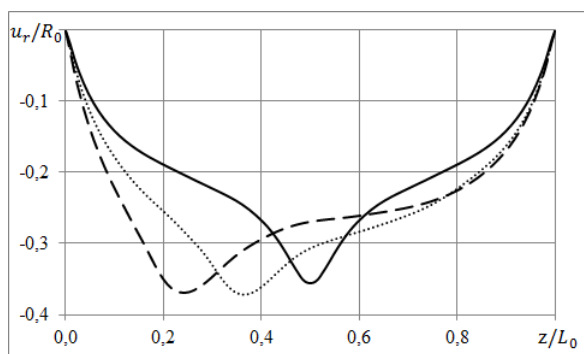


Рис. 9. Зависимость формы потери устойчивости от скорости нагружения. Сплошной линией отмечена форма оболочки после потери устойчивости при квазистатическом растяжении, пунктирной и штриховой – при ускорении $a = 5$ м/с² и 20 м/с² соответственно.

Исследуется деформирование гладких и подкрепленных кольцевыми ребрами цилиндрических оболочек, выполненных из дюралюминия Д16Т, под действием монотонного кинематического нагружения. Ребра моделируются как присоединенные оболочки. Геометрические параметры оболочки и ребер: средний радиус $R_0 = R_p = 1 \cdot 10^{-1}$ м; длина $L_0 = 2.4 \cdot 10^{-1}$ м, $L_p = 2 \cdot 10^{-2}$ м; толщина $h_0 = h_p = 5 \cdot 10^{-3}$ м.

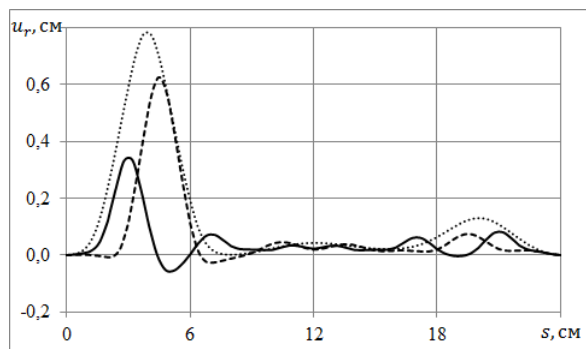


Рис. 10. Распределение прогибов u_r по длине оболочки после потери устойчивости. Точками, пунктиром и сплошной линией показаны прогибы гладкой оболочки и оболочек с 7 и 11 подкрепляющими ребрами соответственно.

Рассматривается сжатие цилиндрической оболочки с разным числом (0, 5, 7, 11) подкрепляющих ребер. Один торец оболочки ($s = L_0$) жестко защемляется, второй ($s = 0$) движется с постоянной скоростью $u_z = 1$ м/с вдоль оси вращения. На рис. 10 представлено распределение прогибов u_r по длине оболочек после потери устойчивости. Исследование показывает, что при дальнейшем увеличении числа кольцевых ребер сохраняется форма потери устойчивости с образованием двух главных выпучин, а их амплитуда и область локализации уменьшается. Результаты расчета для оболочки, подкрепленной 7 ребрами, сопоставлялись с данными, полученными В. К. Ломуновым⁴. Погрешность расчета по прогибам составила 4%, а по осевым и радиальным деформациям – 6%.

Далее рассматривается поведение цилиндрической оболочки при комбинированном нагружении кручением-сжатием. Один торец оболочки ($s = L_0$) жестко защемляется, второй ($s = 0$) перемещается и закручивается вокруг оси с постоянной осевой $\dot{u}_z = 1$ м/с и угловой $\dot{u}_\beta = q \cdot \dot{u}_z / R_0$ скоростью ($q = 0, 1, 5, 10$). На рис. 11 приведено распределение прогибов u_r оболочек при разных значениях параметра закручивания q . Исследование показывает, что при параметре $q \leq 1$ кручение не существенно влияет на процесс деформирования. С увеличением доли кручения уменьшается роль краевых эффектов, а амплитуды выпучин на концах оболочки сближаются. Это связано с уменьшением вклада упругой разгрузки по толщине оболочки, т.к. кручение приводит к догрузению всего поперечного сечения и уменьшению моментных составляющих напряжений. Качественно картина не зависит от числа подкрепляющих ребер.

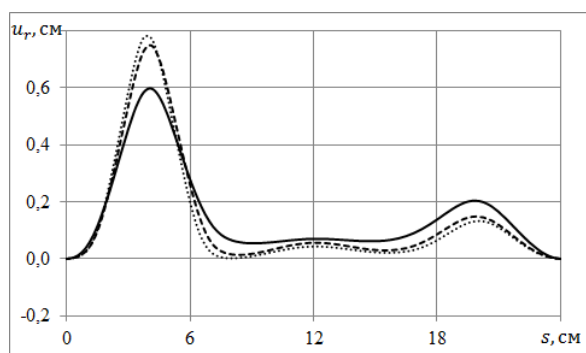


Рис. 11. Распределение прогибов u_r гладкой и подкрепленной цилиндрической оболочки при разных значениях параметра закручивания q . Точками, пунктиром и сплошной линией обозначены прогибы при $q \leq 1$, $q = 5$, $q = 10$ соответственно.

В заключении приводятся основные результаты и выводы

⁴ Ломунов В. К. Упруго-пластическое выпучивание гладких, составных и подкрепленных оболочек вращения при осевом ударе. Дисс. канд. тех. наук. — Горький, 1979.

1. Осуществлены постановка задачи и развитие методики численного решения нелинейных нестационарных задач осесимметричного упругопластического деформирования оболочек вращения общего вида с учетом кручения при комбинированных нагружении и больших деформациях. Она основывается на геометрически нелинейной теории оболочек типа Тимошенко и теории пластичности с изотропным и кинематическим упрочнением. Решение задачи осуществляется вариационно-разностным методом в сочетании с явной схемой интегрирования уравнений движения по времени.

2. Разработан алгоритм и программа, реализующие данную методику.

3. На тестовых задачах осуществлена верификация методики. Рассмотрено деформирование цилиндрических, сферических, конусообразных оболочек в упругой и упругопластической постановке при различных квазистатических и динамических нагружениях. Достоверность полученных результатов подтверждается хорошим согласованием с численными решениями и экспериментальными данными другим авторов.

4. Рассмотрена задача раздачи цилиндрической оболочки с неподвижно защемленными торцами под действием линейно нарастающего внутреннего давления и последующего кручения. Показано, что при неизменном внутреннем давлении при наложении кручения происходит дальнейшее расширение оболочки, и могут быть достигнуты предельные состояния.

5. Исследована потеря устойчивости цилиндрической оболочки при квазистатическом и динамическом нагружении растяжением-кручением. Результаты расчетов показали, что:

- До момента потери устойчивости форма оболочки определяется только ее относительным удлинением и не зависит от доли кручения.
- Увеличение доли кручения вызывает потерю устойчивости деформирования на более ранней стадии растяжения.
- При динамическом нагружении оболочки растяжением-кручением с увеличением скорости нагружения область локализации деформаций расширяется и смещается к нагружаемому торцу.

6. Исследована потеря устойчивости гладких и подкрепленных кольцевыми ребрами цилиндрических оболочек при комбинированном нагружении кручением-сжатием. При добавлении кольцевых ребер сохраняется форма потери устойчивости с образованием двух главных выпучин на концах оболочки, а их амплитуда и область локализации уменьшается. С увеличением доли кручения уменьшается роль изгибных краевых эффектов, и амплитуды выпучин на концах оболочки сближаются.

Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК

1. Баженов В.Г., Павленкова Е.В., Артемьева А.А. Численное решение обобщенных осесимметричных задач динамики упругопластических оболочек вращения при больших деформациях // Вычислительная механика сплошных сред. - 2012. - Т.5, №4. – С.427-434.

2. Баженов В.Г., Павленкова Е.В., Артемьева А.А., Иванов В.А., Жестков М.Н. Решение осесимметричной задачи устойчивости упругопластических оболочек вращения при комбинированном нагружении МКЭ // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. - 2013. – Т.1(3). – С.19-24.

3. Артемьева А.А., Баранова М.С., Кибец А.И., Романов В.И., Рябов А.А., Шошин Д.В. Конечно-элементный анализ устойчивости упругопластической сферической оболочки при всестороннем сжатии// Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Механика. Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского. 2011. №3 (1). С.158-162.

В других изданиях

4. Артемьева А. А. Численное моделирование осесимметричных процессов динамического деформирования упругопластических пластин и оболочек. Учебно-методический материал. Н. Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского. 2011. С.19.

5. Баженов В.Г., Нагорных Е.В., Артемьева А.А., Жестков М.В. Экспериментально-теоретическое исследование процессов осесимметричного упругопластического деформирования и потери устойчивости оболочек при комбинированных нагружениях // Материалы 25-й Международной конференции «Математическое моделирование в механике деформируемых сред и конструкций. Методы граничных и конечных элементов». г. Санкт-Петербург, 23-26 сентября 2013 г. С. 21-22.

6. Баженов В.Г., Артемьева А.А., Нагорных Е.В. Численное решение осесимметричной задачи устойчивости и закритического поведения составных оболочек вращения при комбинированном нагружении // Сборник статей по материалам международной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемого твердого тела, математического моделирования и информационных технологий». г. Чебоксары, 12-15 августа, 2013 г. С.7-13.

7. Баженов В.Г., Павленкова Е.В., Артемьева А.А. Численное решение обобщенных осесимметричных задач динамики упругопластических

оболочек вращения при больших деформациях // Материалы IX Всероссийской конференции «Сеточные методы для краевых задач и приложения». г. Казань, 17-22 сентября, 2012. С.50-54.

8. Баженов В.Г., Кибец А.И., Павленкова Е.В., Артемьева А.А. Нелинейные задачи динамики и устойчивости упругопластических оболочек // Материалы украинско-российского научного семинара «Нестационарные процессы деформирования элементов конструкций, обусловленные воздействием полей различной физической природы». г. Львов, 12-15 сентября, 2012. С.16-20.