

*На правах рукописи*



ПЕТРОВ АНДРЕЙ НИКОЛАЕВИЧ

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СОСТАВНЫХ  
ПОРОУПРУГИХ ТЕЛ НА ОСНОВЕ МЕТОДА  
ГРАНИЧНО-ВРЕМЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Специальность 01.02.04 –  
Механика деформируемого твердого тела

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород – 2013

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» (НИИМ Нижегородского университета)

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,  
профессор  
Игумнов Леонид Александрович

Официальные оппоненты: Калинчук Валерий Владимирович,  
доктор физико-математических наук,  
профессор, Южный научный центр  
РАН, заместитель председателя по  
науке

Ерофеев Владимир Иванович,  
доктор физико-математических наук,  
профессор, институт проблем  
машиностроения РАН, заместитель  
директора

Ведущая организация: Московский авиационный институт  
(Национальный исследовательский  
университет), г. Москва

Защита состоится 26 декабря 2013 г. в 14:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.166.09 при Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского по адресу: 603950, Н.Новгород, пр. Гагарина, 23, корп.6.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке Нижегородского государственного университета.

Автореферат разослан 25 ноября 2013 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета Д 212.166.09  
кандидат физико-математических наук

 Горохов В.А.

**Актуальность работы.** Компьютерное моделирование динамики элементов конструкций и деталей машин, современный мониторинг поверхностных геоволн требуют адекватного математического, методического и программного обеспечения. В связи с этим, применение теории Био-Френкеля определено, во-первых, острой потребностью практики в использовании более сложных моделей материала по сравнению с широко практикуемыми физическими соотношениями упругости или вязкоупругости; во-вторых, возможностями математического аппарата теории пороупругости в создании высокоточных компьютерных моделей исследуемых волновых картин.

Использование теории Био-Френкеля в сочетании с обобщенными формулами Грина-Бетти-Сомильяны и интегральным преобразованием Лапласа позволяет строить шаговые гранично-элементные схемы решения начально-краевых задач трехмерной теории пороупругости с учетом блочного характера распределения механических свойств изотропного материала составного тела. В основу получения шаговых схем положен шаговый метод численного обращения преобразования Лапласа, который опирается на квадратурные формулы для интеграла, получаемого из теоремы операционного исчисления об интегрировании оригинала. Компьютерные гранично-элементные модели используют методическое и программное обеспечение метода граничных элементов, создаваемое в НИИ механики Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского.

**Цель работы** состоит в создании гранично-элементного методического и программного обеспечения на основе шагового метода численного обращения интегрального преобразования Лапласа для решения начально-краевых трехмерных задач динамики пороупругих составных тел при смешанных краевых условиях, а также в проведении численных исследований динамики составных пороупругих тел.

**Методика исследований основана** на граничных интегральных уравнениях прямого подхода трехмерной изотропной линейной теории

пороупругости, математическая модель которой записывается в терминах четырех базовых функций – перемещения упругого скелета и порового давления; на интегральном преобразовании Лапласа и шаговом методе его численного обращения; на методе граничных элементов как способе компьютерного моделирования искомых решений.

**Достоверность** исследований основана на строгом математическом соответствии решений, используемых граничных интегральных уравнений, с решениями рассматриваемых начально-краевых задач; на корректно построенных дискретных аналогах компьютерных моделей граничных интегральных уравнений; на использовании протестированного программного обеспечения; на подтверждении результатов компьютерного моделирования известными решениями и корректным апостериорным анализом.

**Научная новизна работы** состоит в гранично-элементном моделировании решений динамических начально-краевых задач составных пороупругих тел в трехмерной постановке с использованием шагового подхода; использовании для шаговых гранично-элементных моделей динамики составных пороупругих трехмерных тел согласованной аппроксимации на обобщенных четырехугольных граничных элементах; шаговом решении задач о действии импульсной силы на составное пороупругое полупространство, составное пороупругое призматическое тело, а также на пороупругое тело на пороупругом полупространстве; шаговых гранично-элементных оценках пороупругих решений исследуемых задач на основе дренированных и недренированных моделей материалов.

**Практическая значимость** результатов состоит в создании методического и программного гранично-элементного обеспечения шагового компьютерного моделирования динамики составных пороупругих трехмерных тел; шаговом гранично-элементном решении задач о действии нестационарной силы на составное пороупругое

полупространство, пороупругое составное тело и пороупругое тело на пороупругом полупространстве; применении дренированных и недренированных моделей материалов для получения численных оценок рассматриваемых задач.

### **Основные положения, выносимые на защиту**

1. Методическое и программное обеспечение метода граничных элементов для шагового решения краевых задач динамики составных пороупругих тел.
2. Шаговое гранично-элементное моделирование эффекта возбуждения медленной волны в откликах порового давления и потока.
3. Шаговое гранично-элементное моделирование решений следующих задач:
  - о действии силы в виде функции Хевисайда по времени на торцы составных пороупругих призматических тел;
  - о действии вертикальной силы в виде функции Хевисайда по времени на поверхности составных пороупругих полупространств;
  - о действии вертикальной силы на пороупругое призматическое тело, взаимодействующее с пороупругим полупространством.
4. Шаговые гранично-элементные оценки пороупругих решений на основе дренированных и недренированных моделей материалов.

### **Апробация работы**

Результаты диссертационной работы докладывались на XIV, XV, XVI, XVIII Нижегородских сессиях молодых ученых – математические науки (Н.Новгород, 2009, 2010, 2011, 2013); XV Нижегородской сессии молодых ученых – технические науки (Н.Новгород, 2010); XIII, XIV, XVI, XVII Международных конференциях «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 2009, 2010, 2012, 2013); XXIII, XXV Международных конференциях «Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов» (С.-Петербург, 2009, 2013); XVII, XVIII, XIX Международных симпозиумах «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г.Горшкова

(Ярополец, 2011, 2012, 2013); X Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Н.Новгород, 2011), Международной конференции «Современные проблемы механики и математики» (Львов, 2013), форуме молодых ученых (Нижний Новгород, 2013).

**Публикации.** Опубликовано 33 работы, из них по теме диссертации – 29 работы. В журналах, рекомендуемых ВАК для защит кандидатских диссертаций, результаты опубликованы в 5 работах в соавторстве [1-5]. Результаты работ [1-5] принадлежат А.Н. Петрову кроме постановок задач и постпроцессорных представлений результатов исследований.

### **Структура и объем работы**

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы из 230 наименований. Общий объем диссертации составляет 135 страниц машинописного текста, включая 150 рисунков.

На различных этапах работа поддерживалась грантами Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (№ НШ-3367.2008.8 2008-2009гг.; № НШ-4807.2010.8 2010-2011гг.; НШ-2843.2012.8 2012-2013гг.); средствами ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009 - 2013 годы (№ П1185 от 27 августа 2009г.; № П2222 от 11 ноября 2009г.; №14.740.11.0872 от 29 апреля 2011г.; № 14.В37.21.1137 от 14 сентября 2012г.; № 14.В37.21.2019 от 14 ноября 2012г.; № 14.В37.21.2013 от 14 ноября 2012г.; № 14.В37.21.1249 от 14 сентября 2012г.); грантами РФФИ (№ 10-08-01017, № 12-08-00984, № 12-01-00698, № 13-08-00658, № 12-08-31572, № 13-08-97091).

## **СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

**Введение** посвящено вопросу применения метода граничных элементов к решению краевых задач трехмерной динамической теории пороупругости; обоснованию актуальности темы диссертационной;

формулировкам цели диссертационной работы и основных положений, выносимых на защиту.

Из активно работающих ученых, внесших заметный вклад в развитие интегрального метода применительно к задачам механики деформируемого твердого тела, отметим Б.Д.Анина, В.А.Бабешко, А.О.Ватульяна, Е.В.Глушкова, Р.В.Гольдштейна, И.Г.Горячеву, Л.А.Игумнова, В.В.Калинчука, Н.Ф.Морозова, О.Д.Пряхину, А.Н.Соловьева, М.А.Сумбатяна и др.

Модель пороупругой среды, описывающая волновые процессы, сформулирована в работах Я.И.Френкеля (1944) и М.Био (1956). Помимо работ чаще всего цитируемых в соответствующих обзорах по распространению волн в пороупругих телах и средах отметим работы следующих авторов: А.А.Губайдуллин, А.О.Ватульян, В.И.Ерофеев, Л.А.Игумнов, Л.Б.Маслов, В.Н.Николаевский, Д.В.Тарлаковский, Н.Antes, M.Schanz, L.Banjai, B.Albers, M.Venning, T.Rüberg, P.Urthaler, P.Li и др.

Достаточно взять ряд работ отмеченных авторов, чтобы можно было сделать вывод о том, что метод граничных элементов бурно развивается применительно к решению нестационарных динамических задач пороупругости. Однако гранично-элементные расчеты динамики составных пороупругих тел в трехмерных постановках слабо представлены. Гранично-элементное компьютерное моделирование динамики однородных пороупругих тел, как правило, касается случаев, когда граничная поверхность состоит из участков, параллельных координатным плоскостям.

**В главе I** представлено краткое описание теории пороупругости; сформулирована математическая постановка краевой задачи; описан шаговый метод численного обращения преобразования Лапласа; записаны граничные интегральные уравнения; дан шаговый анализ возбуждения медленной волны на основе решения в изображениях по Лапласу одномерной задачи.

Первый параграф посвящен теории пороупругости. В сжатом виде приводится описание различных моделей и формулировок. Для дальнейших исследований выбрана полная сжимаемая линейная модель Био в  $u_i^s - p$  формулировке, где  $u_i^s$  – смещение скелета,  $p$  – поровое давление.

Второй параграф посвящен математической постановке краевой задачи. Рассматривается кусочно-однородное тело  $\Omega$  в трехмерном евклидовом пространстве  $R^3$  с декартовой системой координат. Граница тела обозначена через  $\Gamma$ . Предполагается, что каждая однородная часть  $\Omega_k$  является изотропным пороупругим телом. Динамика однородной части тела  $\Omega_k$  описывается соответствующей системой дифференциальных уравнений пороупругости в обобщенных перемещениях  $u^k(x, t) = (u_1^k, u_2^k, u_3^k, u_4^k)$ ,  $u_4^k = p$ . Рассматриваются обобщенные смешанные граничные условия на  $\Gamma = \partial\Omega$  и условия обобщенного жесткого контакта на границах однородных частей.

В третьем параграфе приводятся интегральные представления и граничные интегральные уравнения для каждой однородной части  $\Omega_k$ . Активно используется интегральное преобразование Лапласа с параметром  $s$ . Условия контакта позволяют собрать граничные интегральные уравнения для однородных частей в общее граничное интегральное уравнение для кусочно-однородного тела  $\Omega$ . Формальная запись гранично-временного интегрального уравнения и граничного интегрального уравнения (ГИУ) в изображениях по Лапласу для однородной части  $\Omega_k$ , если опустить индекс « $k$ » в записи ядер и граничных функций, имеет вид:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} c_{ij} & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(x, t) \\ p(x, t) \end{bmatrix} + \int_0^t \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} T_{ij}^s(x, t - \tau) - Q_j^s(x, t - \tau) \\ T_i^f(x, t - \tau) - Q^f(x, t - \tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(x, \tau) \\ p(x, \tau) \end{bmatrix} d\Gamma d\tau = \\ & = \int_0^t \int_{\Omega} \begin{bmatrix} U_{ij}^s(x, t - \tau) - P_j^s(x, t - \tau) \\ U_i^f(x, t - \tau) - P^f(x, t - \tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_i(x, \tau) \\ q(x, \tau) \end{bmatrix} d\Gamma d\tau. \end{aligned} \quad (1)$$



$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} c_{ij} & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(x, s) \\ p(x, s) \end{bmatrix} + \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} T_{ij}^s(x, s) - Q_j^s(x, s) \\ T_i^f(x, s) - Q^f(x, s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i(x, s) \\ p(x, s) \end{bmatrix} d\Gamma = \\ & = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} U_{ij}^s(x, s) - P_j^s(x, s) \\ U_i^f(x, s) - P^f(x, s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t(x, s) \\ q(x, s) \end{bmatrix} d\Gamma, \quad (2) \\ & i, j = \overline{1, 3}, \end{aligned}$$

где  $\begin{bmatrix} U_{ij}^s(x, t) - P_j^s(x, t) \\ U_i^f(x, t) - P^f(x, t) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} T_{ij}^s(x, t) - Q_j^s(x, t) \\ T_i^f(x, t) - Q^f(x, t) \end{bmatrix}$  – матрицы фундаментальных и сингулярных решений исходной системы дифференциальных уравнений;

$\begin{bmatrix} U_{ij}^s(x, s) - P_j^s(x, s) \\ U_i^f(x, s) - P^f(x, s) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} T_{ij}^s(x, t) - Q_j^s(x, t) \\ T_i^f(x, t) - Q^f(x, t) \end{bmatrix}$  – изображения по Лапласу матриц фундаментальных и сингулярных решений исходной системы дифференциальных уравнений.

Детально представлены в изображениях по Лапласу компоненты матриц фундаментальных и сингулярных решений изотропной трехмерной динамической теории пороупругости.

Запись ГИУ (1) позволяет организовать шаговый процесс, опирающийся на формулировку теоремы о свертках оригиналов. Запись ГИУ (2) позволяет воспользоваться теоремой об интегрировании оригинала и на ее основе также организовать шаговый процесс.

В четвертом параграфе на основе аналитического одномерного пороупругого решения с использованием шаговой процедуры численного обращения преобразования Лапласа продемонстрирован эффект возбуждения медленной волны в пороупругом стержне на примере откликов поровых давления и потока. Результат исследования сравнивался с аналитическим решением и численным решением, полученным с использованием метода Дурбина. Продемонстрированы преимущества шагового метода по сравнению с методом Дурбина: не уступая в точности, метод дает численные решения, не содержащие нефизических (наведенных) колебаний.

**В главе II** представлена методика гранично-элементного решения на основе шагового метода численного обращения преобразования Лапласа и приведены результаты модельных гранично-элементных расчетов.

В первом параграфе дано описание применяемой гранично-элементной дискретизации. Методическое обеспечение опирается на использование регуляризованного ГИУ. Для проведения процедуры регуляризации записана статическая матрица сингулярных решений, компоненты которой имеют разные порядки поведения по координатам. Граничная поверхность исследуемого тела разбивается обобщенными восьмиузловыми четырехугольными элементами. Так как применяется согласованная поэлементная аппроксимация, то обобщенные граничные функции первого рода аппроксимируются билинейно, а обобщенные граничные функции второго рода принимаются постоянными на элементе. Коллокационные точки решения ГИУ совпадают с узлами интерполяции неизвестных граничных функций. При попадании коллокационной точки на элемент интегрирования проводится процедура раскрытия особенности. Для повышения точности интегрирования на элементе, не содержащем коллокационную точку, кроме формул интегрирования Гаусса применяется иерархический алгоритм интегрирования – элемент подразбивается до тех пор, пока заданная точность не будет достигнута. Возникающие дискретные аналоги решаются методом Гаусса. Организуется шаговый процесс получения значений граничных функций, основанный на шаговом алгоритме численного обращения преобразования Лапласа.

Во втором параграфе кратко описана программная гранично-элементная разработка. Программное обеспечение использует программные модели гранично-элементного моделирования динамики составных пороупругих тел, созданных на основе применения алгоритма Дурбина численного обращения преобразования Лапласа. Реализация

осуществлена на алгоритмическом языке Фортран.

В третьем и четвертом параграфах приведены результаты гранично-элементного решения модельных задач. В третьем параграфе рассмотрена задача о действии силы на торец однородного пороупругого тела. Результаты расчетов сравниваются с аналитическим решением и решением других авторов. Шаговое гранично-элементное решение трехмерной задачи обладает теми же преимуществами в сравнении с гранично-элементным решением в сочетании с методом Дурбина, что и преимущества применения к одномерному решению шагового алгоритма по сравнению с применением метода Дурбина. В четвертом параграфе решена задача о действии силы на торец составного пороупругого тела. Результаты сравниваются с гранично-элементным решением, полученным на основе использования алгоритма Дурбина.

**В главе III** приведены результаты гранично-элементных решений в трехмерной поставке краевых задач динамической пороупругости и даны гранично-элементные оценки пороупругих решений на основе применения в расчетах дренированных и недренированных моделей материалов.

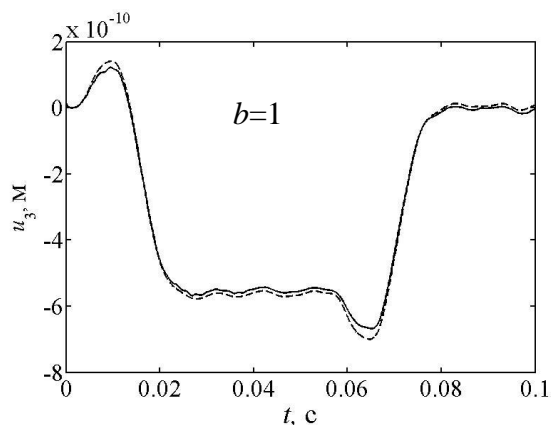
В первом параграфе представлены задачи о действии вертикальной силы на дневную поверхность пороупругого полупространства и приведены результаты расчетов по дренированной и недренированной моделям материала с целью получения гранично-элементных оценок пороупругого решения. Приведены результаты исследований для нагрузки хевисайдовского вида и разности функций хевисайдовского вида. В рамках выбранной шаговой гранично-элементной модели получены результаты гранично-элементного решения влияния параметра проницаемости на роль эффекта третьей волны в динамическом отклике порового давления и потока. Проведено исследование отклика перемещений в зависимости от расстояния до источника. Проведено сравнение с гранично-элементными решениями других авторов.

Во втором параграфе представлены задачи о действии вертикальной

силы на поверхность пороупругого полупространства, ослабленного под площадкой приложения силы сферической или кубической полостью. Рассматриваются варианты нагрузки: хевисайдовского вида и разницы хевисайдовского вида функций. Приводятся отклики граничных перемещений и давлений на дневной поверхности полупространства. Численно даны оценки результатов по дренированной и недренированной моделям материала.

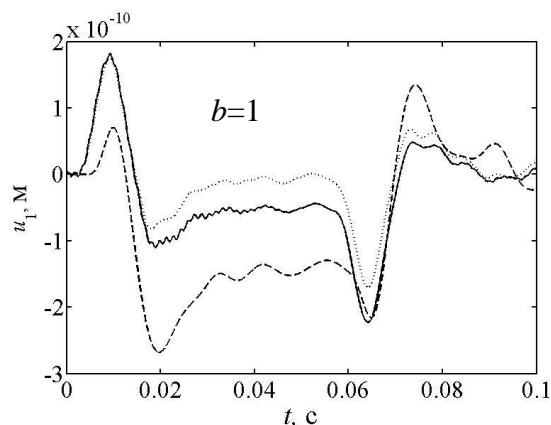
Третий и четвертый параграфы посвящены задачам о действии давления внутри сферической или кубической полости, расположенной в пороупругом полупространстве. Приведены численные оценки результатов по дренированной и недренированной моделям материала.

В пятом параграфе приведено численное решение задачи о действии вертикальной силы на пороупругое тело, взаимодействующее с пороупругим полупространством. Рассматривается нагрузка вида  $P(t) = P_0(1_+(t) - b1_+(t - \alpha))$ ,  $P_0 = 1 \text{ H} / \text{m}^2$ ,  $\alpha = 0,055 \text{ c}$ ,  $b = 0$  или  $b = 1$ . Перемещения снимаются на дневной поверхности в точке  $x_1 = x_2 = 2,33 \text{ м}$ . За начало координат выбран центр контактной грани. Приведено сравнение с гранично-элементным результатом, полученным на основе метода Дурбина: один из графиков приведен на рис. 1. Дана оценка пороупругих решений по дренированным и недренированным моделям материалов: один из графиков приведен на рис. 2.



— шаговой метод  
 - - - - - метод Дурбина

Рис. 1



— пороупругая модель  
 - - - - - дренированная модель  
 ..... недренированная модель

Рис. 2

В шестом параграфе решена задача о действии вертикальной силы в виде функции Хевисайда по времени на поверхность двухслойного пороупругого полупространства. Рассматривается случай, когда верхний слой является более мягким. При условии полного контакта слоев выбирались следующие краевые условия: на дневной поверхности составного полупространства на участке размером  $1\text{ м} \times 1\text{ м}$  действует сила, а остальная часть дневной поверхности свободна от поверхностной силы при нулевом значении порового давления на всей дневной поверхности. Исследовался динамический отклик на дневной поверхности полупространства при удалении от источника силы на  $10\text{ м}$ . Толщина верхнего слоя принималась  $h=10\text{ м}$ . Гранично-элементная сетка на четверти геометрии состоит из 768 элементов для верхнего слоя и 384 элемента для нижнего слоя. Дано сравнение гранично-элементных результатов с результатами других авторов.

**В заключении** сформулированы основные результаты, полученные в диссертации.

### **Основные результаты и выводы**

1. Создано методическое и программное обеспечение метода граничных элементов для шагового решения краевых задач динамики составных пороупругих тел.
2. Получено шаговое гранично-элементное моделирование эффекта возбуждения медленной волны в откликах порового давления и потока.
3. Получено шаговое гранично-элементное моделирование решений следующих задач:
  - о действии силы в виде функции Хевисайда по времени на торцы составных пороупругих призматических тел;
  - о действии вертикальной силы в виде функции Хевисайда по времени на поверхности составных пороупругих полупространств;

- о действии вертикальной силы на пороупругое призматическое тело, взаимодействующее с пороупругим полупространством.
- 4. Даны шаговые гранично-элементные оценки пороупругих решений на основе дренированных и недренированных моделей материалов.

Основные результаты и защищаемые положения диссертации опубликованы в следующих работах:

*Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК РФ*

1. Ермолаев М.Д., Петров А.Н. Расчет методом граничных элементов динамики составных вязкоупругих тел: Доклады X Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Сер. Механика. Н.Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета. 2011. №4(4). С.1694-1696.
2. Игумнов Л.А., Карелин И.С., Петров А.Н. Гранично-элементное исследование влияния коэффициента проницаемости на динамический отклик в составном пороупругом теле // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз.сб. Н.Новгород: Изд-во ННГУ. 2011. С.98-104.
3. Игумнов Л.А., Карелин И.С., Метрикин А.В., Петров А.Н., Банаев М.С. Численное моделирование третьей волны в трехмерном пористо-упругом теле // Проблемы прочности и пластичности. Межвуз. сб. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ. 2012. Вып. 74. С. 146-153.
4. Белов А.А., Аменицкий А.В., Литвинчук С.Ю., Петров А.Н. Гранично-элементное решение задачи о действии призматического тела на полупространстве в пористо-упругой постановке // Проблемы прочности и пластичности. Межвуз. сб. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ. 2012. Вып. 74. С. 154-159.

5. Игумнов Л.А., Карелин И.С., Петров А.Н., Петров А.Е. Гранично-элементное исследование поверхностных пористо-упругих волн // Проблемы прочности и пластичности. Межвуз. сб. Нижний Новгород: Изд-во ННГУ. 2013. Вып. 75(2). С. 137-144.

*Другие публикации*

6. Белов А.А., Петров А.Н., Шишкова Е.А. Гранично-элементная схема на основе быстрого преобразования Фурье и ее применение в решении задач трехмерной динамической теории упругости // Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов. Сборник докладов XIII Междунар.конф. ВЕМ-FEM. – СПб: 28 сентября – 1 октября 2009г. / Изд-во ООО «НИЦ МОРИНТЕХ». С. 315-320.
7. Белов А.А., Петров А.Н., Шишкова Е.А. Гранично-элементная схема на основе быстрого преобразования Фурье и ее применение в решении задач трехмерной динамической теории упругости // Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов. Тезисы докладов XIII Междунар.конф. ВЕМ-FEM. – СПб: 28 сентября – 1 октября 2009г. / Изд-во ООО «НИЦ МОРИНТЕХ». С. 42-43.
8. Игумнов Л.А., Петров А.Н. Гранично-элементное моделирование динамики вязкоупругих тел на основе нового метода обращения преобразования Лапласа // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды XIII международной конф., 12-14 октября 2009 г. Ростов-на-Дону, 2009. С. 106-110.
9. Игумнов Л.А., Петров А.Н. Гранично-элементное моделирование динамики вязкоупругих тел на основе нового метода обращения преобразования Лапласа // Современные проблемы механики сплошной среды. Тезисы докладов XIII международной конф., 12-14 октября 2009 г. Ростов-на-Дону, 2009. С. 37.

10. Игумнов Л.А., Шишкова Е.А., Петров А.Н. Применение линейной и квадратичной интерполянт изображений в численном обращении преобразования Лапласа // 14 Нижегородская сессия молодых ученых – математические науки. Н.Новгород: Изд-во Гладкова О.В., 2009 г. – С. 37.
11. Лебедева Е.А., Литвинчук С.Ю., Петров А.Н. Вариант гранично-элементной схемы на основе интегрального преобразования для решения задач трехмерной динамической теории упругости // 15 Нижегородская сессия молодых ученых – технические науки. Н.Новгород: Изд-во Гладкова О.В., 2010 г. – С. 52.
12. Игумнов Л.А., Петров А.Н., Чувильдеева А.В. Граничные интегральные уравнения с двойным применением теоремы взаимности для описания распространения волн // 15 Нижегородская сессия молодых ученых – математические науки. Н.Новгород: Изд-во Гладкова О.В., 2010 г. – С. 51.
13. Белов А.А, Игумнов Л.А., Петров А.Н. Численное моделирование динамики пористо-упругих тел и сред // Материалы XVII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г.Горшкова. М.: ООО «ТР-принт». 2011. Т.1. С. 30-31.
14. Петров А.Е., Петров А.Н. Численные решения одномерных пороупругих динамических задач // 16 Нижегородская сессия молодых ученых – математические науки. Н.Новгород: Изд-во Гладкова О.В., 2011 г. – С. 52-53.
15. Петров А.Н., Ермолаев М.Д. Расчет методом граничных элементов динамики составных вязкоупругих тел // Современные методы механики. X Всероссийский съезд по фундаментальным и прикладным проблемам теоретической и прикладной механики. Вторая Всероссийская школа молодых ученых-механиков. Тезисы докладов (Нижний Новгород, 24–30 августа 2011 г.). Нижний



- Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского. 2011. С. 130-131.
16. Игумнов Л.А., Петров А.Н. Фундаментальные решения трехмерной динамической теории пороупругости. Электронное методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2011. – 23с.
17. Игумнов Л.А., Карелин И.С., Петров А.Н., Белов А.А. Численное моделирование динамики составного пороупругого тела // Материалы XVIII Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г.Горшкова. Ярополец 13-17 февраля 2012. М.: ООО «ТР-принт». 2012. Т.1. С. 87.
18. Игумнов Л.А., Петров А.Н., Аменицкий А.В. Моделирование волн пороупругого полупространства // Труды XVI Международной конференции Современные проблемы механики сплошной среды. Ростов-на-Дону 16-19 октября 2012. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ. 2012. Т.1. С.123-127.
19. Игумнов Л.А., Петров А.Н., Аменицкий А.В. Моделирование волн пороупругого полупространства // Тезисы докладов XVI Международной конференции Современные проблемы механики сплошной среды. Ростов-на-Дону 16-19 октября 2012. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ. 2012. С. 48.
20. Аменицкий А.В., Игумнов Л.А., Марков И.П., Петров А.Н. Волны от действия ударной силы по телу на полупространстве в пороупругой постановке // Материалы XIX Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г.Горшкова. Ярополец, 18-22 февраля 2013г. М.: ООО «ТР-принт», 2013. Т.1. С.8-9.
21. Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Петров А.Н., Белов А.А. Численно-аналитическое моделирование медленной волны в пороупругом теле

// Материалы XIX Международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г.Горшкова. Ярополец, 18-22 февраля 2013г. М.: ООО «ТР-принт», 2013. Т.1. С.112-113.

- 22.Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Петров А.Н. Моделирование поверхностных волн на упругих, вязко- и пористо-упругих полупространствах // Современные проблемы механики и математики / Под общ. ред. Р.М.Кушнира, Б.И.Пташника. – Львов: Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С.Подстригача НАН Украины, 2013. С.34-36.
- 23.Марков И.П., Литвинчук С.Ю., Петров А.Н., Белов А.А. Гранично-элементные схемы с переменным шагом в трехмерных краевых задачах пороупругой динамики // Труды VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твердого тела. Ростов-на-Дону, 15-18 октября 2013. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ. 2013. Т.II. С.91-95.
- 24.Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Петров А.Н., Ипатов А.А. Численное моделирование динамики составного пороупругого тела // Труды VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твердого тела. Ростов-на-Дону, 15-18 октября 2013. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ. 2013. Т. I. С.243-246.
- 25.Марков И.П., Литвинчук С.Ю., Петров А.Н., Белов А.А. Гранично-элементные схемы с переменным шагом в трехмерных краевых задачах пороупругой динамики // Тезисы докладов VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твердого тела. Ростов-на-Дону, 15-18 октября 2013. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ. 2013. С.108.
- 26.Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Петров А.Н., Ипатов А.А. Численное моделирование динамики составного пороупругого тела //

Тезисы докладов VII Всероссийской (с международным участием) конференции по механике деформируемого твердого тела. Ростов-на-Дону, 15-18 октября 2013. Ростов-на-Дону: Изд-во ЮФУ. 2013. С.76.

27.Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Петров А.Н., Белов А.А. Гранично-элементное моделирование динамики пороупругого полупространства ослабленного полостью // Тезисы докладов XXV Международной конференции «Математическое моделирование в механике деформируемых сред и конструкций. Методы граничных и конечных элементов». Санкт-Петербург 23-26 сентября 2013г. Т.1. С.96-98.

28.Ипатов А.А., Литвинчук С.Ю., Петров А.Н. Гранично-элементное моделирование влияния коэффициента проницаемости на динамический отклик в пористо-упругом призматическом теле // Материалы 18 Нижегородской сессии молодых ученых. Естественные, математические науки. Н.Новгород: НИУ РАНХиГС, 2013 г. С. 231–234.

29.Петров А.Н. Гранично-элементное моделирование взаимодействия пороупругого тела с пороупругим полупространством // Форум молодых ученых: тезисы докладов. Н.Новгород 16-18 сентября 2013. Том 1. Н.Новгород: Изд-во ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2013. С.81-82.

Подписано в печать \_\_\_\_ .11.2013 г. Формат 60×84 1/16.  
Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 1. Заказ № \_\_\_\_\_. Тираж 100 экз.

Отпечатано с готового оригинал-макета в отделе дизайна и цифровой печати  
РИУ ННГУ им. Н.И.Лобачевского  
603000, г. Нижний Новгород, ул. Б. Покровская, 37