На правах рукописи

КАССИНА НАТАЛЬЯ ВАСИЛЬЕВНА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ГИДРАВЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ И ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Специальность 01.02.06 –

Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени

Кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород, 2006

Работа выполнена в Научно-исследовательском институте механики государственного образовательного учреждения высшего профессионального Образования «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Научный руководитель:
доктор технических наук, профессор **Смирнов Л.В.**

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор **Ерофеев В.И.**
доктор технических наук, профессор **Комаров В.Н.**

Ведущая организация – Нижегородский государственный технический университет

Защита состоится « 28 » декабря 2006 года в 12 часов на заседании диссертационного совета Д 212.166.09 при Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского по адресу: 603950, Н. Новгород, просп. Гагарина, 23, корп. 6.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского

Автореферат разослан « 24 » ноября 2006 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета Д 212.166.09
Кандидат технических наук Трухин Б.В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Комплексы сооружений, аппаратов и различных устройств, соединенных между собой транспортирующими жидкость или газообразную среду трубопроводами, которые называют гидросистемами (ГС), или гидравлическими сетями, являются важной частью многих объектов и систем новой техники. Примерами могут служить системы водо- и газоснабжения, циркуляции теплоносителя и рабочей среды в энергетике и различных производствах. Серьезные отклонения в их работе обычно недопустимы с точки зрения технологического процесса и могут привести к авариям с тяжелыми экологическими, экономическими и социальными последствиями. Большое значение имеет также обеспечиваемое работой ГС экономное, рациональное использование топливно-энергетических и водных ресурсов. Например, оптимальное проектирование и обеспечение расчетных гидравлических режимов в процессе эксплуатации муниципальных распределительных сетей теплоснабжения и горячего водоснабжения являются одним из наиболее эффективных способов решения проблем надежности, безопасности и рационального потребления ресурсов.

В качестве теоретической основы для решения проблем, встающих при проектировании и эксплуатации ГС, применяется метод математического моделирования. В связи с этим разработка адекватных математических моделей стационарного и нестационарного течения рабочей среды в ГС, а также развитие аналитических и численных методов исследования этих моделей являются актуальными. Практически важными являются и результаты исследований, дающие не только количественные, но и четкие качественные представления об общих динамических свойствах ГС, и их поведении при эксплуатации в стационарных и переходных режимах.

Цели диссертационной работы

1. Обобщение и развитие основанного на методах аналитической механики и теории нелинейных колебаний нетрадиционного для прикладной гидромеханики подхода к описанию и исследованию динамики гидравлических процессов в сложных ГС
2. Аналитические исследования динамики сложных ГС, включая возможную многозначность равновесных режимов и их устойчивость
3. Теоретическое обоснование принципиально нового способа решения задачи нахождения стационарного потокораспределения в ГС, позволяющего использовать современную методику принятия оптимальных решений

4. Исследование динамики гидромеханических процессов в являющейся частным видом ГС типовой системе циркуляции теплоносителя ядерного реактора с целью оценки влияния этих процессов на безопасность.

Научная новизна

Развитие, теоретическое обобщение и конкретная реализация результатов применения методов аналитической механики и теории нелинейных колебаний в прикладной гидромеханике напорных потоков несжимаемой жидкости.

Получение на основании прямого метода Ляпунова качественной информации о структуре многомерного фазового пространства и возможных в нем бифуркациях для гидродинамических процессов при изменении параметров и некоторых внешних воздействиях.

Теоретическое обоснование нового метода решения задачи нахождения стационарного потокораспределения в ГС.

Достоверность полученных результатов основана:

1. На использовании адекватных широко известных математических моделей динамики напорного течения жидкости в ГС, которые в диссертации рассматриваются с новых позиций, отличных от характерных для прикладной гидромеханики напорных течений.
2. На применении при исследованиях строго обоснованных методов классической механики и теории нелинейных колебаний, а при численных расчетах – апробированных, широко использующихся численных методов и программных пакетов.

Практическая ценность

Разработан новый, пригодный для использования в проектно-конструкторских организациях, подход при математическом моделировании динамики гидромеханических процессов в сложных ГС различного назначения.

Получены общие качественные представления о динамических свойствах ГС. Теоретически обоснована отличная от традиционно используемой методика решения задачи стационарного потокораспределения. Эти результаты основаны на применении методов аналитической механики и теории нелинейных колебаний, которые практически не используются инженерных расчетах.

Аналитические и численные результаты изучения динамических процессов в системе циркуляции теплоносителя ядерного реактора, как частного вида ГС, позволяют сделать важные практические выводы и сформулировать рекомендации, необходимые для повышения безопасности проектируемых и эксплуатирующихся ЯЭУ.

Диссертационная работа выполнена в рамках программы Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ России (НШ-1136.2003.8, НШ-6391.2006.8), гранта РФФИ №05-08-50187, фундаментальных и прикладных научных исследований по приоритетным направлениям науки и техники госбюджетных НИР НИИ механики ННГУ 2001–2005 гг. и 2006–2010 гг.

На защиту выносятся:

1. Новая методика математического моделирования динамики гидравлических процессов, основанная на методах и подходах аналитической механики и теории нелинейных колебаний
2. Полученные на основании аналитического исследования качественные представления о структуре многомерного фазового пространства процессов напорного течения жидкости в ГС и возможных в этом пространстве бифуркаций.
3. Результаты исследований динамики сложных ГС и, в частности, типовых систем циркуляции теплоносителя водо-водяных ядерных реакторов с помощью предлагаемой методики.
4. Теоретическое обоснование нового способа нахождения стационарного потокораспределения на основании поиска экстремумов функции Ляпунова специального вида.

Апробация работы

Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались на VI научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Н. Новгород, ННГУ, 2002); на IV сессии молодежной школы-семинара «Промышленная безопасность и экология» (Саров, РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2004); на Десятой междисциплинарной научной конференции «Нелинейный мир» (Н. Новгород, ННГУ, 2005); на VII Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Н. Новгород, ННГУ, 2005); на Тринадцатой Международной конференции «Математика. Компьютер. Образование» (Дубна, ОИЯИ, 2006); на IX Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, 2006). Результаты исследований в виде составной части в заявке на грант РФФИ послужили основанием для прохождения конкурсного отбора заявок и включения продолжения этих исследований в программу работ по проекту № 05-08-50187.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 13 работах [1-13]. Из них 4 – статьи в журналах, включенных в перечень ВАК; 7 – тезисов и аннотаций докладов на различных конференциях, включая аннотацию доклада на IX

Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике, 1 научно-технический отчет, 1 полный текст доклада в сборнике трудов конференции.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, 4 глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 118 страниц, диссертация содержит 21 рисунок. Список цитируемой литературы состоит из 64 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы и сформулированы основные направления исследований.

В первой главе обсуждается проблема теоретического изучения динамики гидромеханических процессов в ГС, дается обзор исследований, и формулируются основные цели и задачи диссертационной работы.

Математическое моделирование является одним из основных методов, используемых для обоснования проектных решений и эксплуатационных режимов работы ГС. Как следует из изучения имеющихся публикаций, основные решаемые задачи – это нахождение обычно предполагающегося единственным стационарного потокораспределения, определяющего расходы на участках и давления в узлах соединения и разделения потоков.

Необходимые для технических приложений расчёты ГС при рассмотрении напорного течения жидкости относительно медленных процессов, когда сжимаемость несущественна, обычно проводятся с использованием уравнения Бернулли для целого потока. Это уравнение служит основой так называемого гидравлического подхода при рассмотрении нестационарного напорного течения жидкости в ГС. Сущность этого подхода состоит в рассмотрении одномерного течения с использованием осреднённых по поперечному сечению потока характеристик и феноменологического описания потерь на трение. Получающаяся при этом модель сложной ГС представляет собой высокого порядка и достаточно общего вида систему нелинейных уравнений в полных производных. Математическая модель неустановившегося течения жидкости в такой системе, получаемая методами прикладной гидромеханики, содержит так называемые уравнения Бернулли для потока на каждом участке:

$$\tau \dot{Q} = P_1 - P_2 + \rho g(z_1 - z_2) - \Delta P(Q), \quad \tau = \rho \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{S(x)} dx,$$
$$\Delta P(Q) = \Delta P_{тр}(Q) - \rho \frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{S_1^2} - \frac{1}{S_2^2}\right). \quad (1)$$

где Q – объемный расход жидкости на участке; x – координата вдоль оси потока; P_k, S_k, z_k – соответственно давление, площадь сечения прохода и высота центра сечения прохода на входе ($k = 1$) и выходе ($k = 2$) участка, интегрирование проводится вдоль оси потока; r – плотность жидкости; $\Delta P(Q)$ – суммарная гидравлическая характеристика участка с учетом потерь на трение $\Delta P_{тр}(Q)$ и разности скоростных напоров на концах; g – ускорение силы тяжести.

Обычно ГС содержат насосы, запорно-регулирующую арматуру, то есть элементы механической природы. Переменные, характеризующие состояние этих элементов, входят в качестве аргументов в гидравлические характеристики $\Delta P(Q)$, и необходимы либо соответствующие уравнения, либо закон изменения этих переменных.

Для каждого из узлов соединения или разделения потоков используется уравнения в виде закона сохранения вещества:

$$\sum_{j=1}^{M_k} Q_j = 0, \quad k = \overline{1, L}, \tag{2}$$

где M_k – общее число соединяющихся в k-ом узле участков. Расход положителен, если жидкость поступает в узел. Во внешних узлах должны быть заданы либо расходы среды, либо давления, которые могут быть фиксированными или представлять собой известные функции времени. В случае замкнутой ГС внешних узлов нет.

В реальных ГС число участков, узлов и других конструктивных элементов велико, поэтому изучение общих свойств решений полученных при моделировании ГС уравнений движения и зависимости этих свойств от параметров и структуры системы является сложной задачей. Решению подобных задач посвящено много работ. Как правило, исследования нестационарных процессов в сложных инженерных системах при их проектировании и в процессе эксплуатации проводятся путем численного исследования получаемых моделей. С этой целью разрабатываются сложные вычислительные комплексы, симуляторы и системы моделирования ГС. В ряде случаев такие программные продукты позволяют успешно справиться с поставленными задачами, но область их применения часто оказывается весьма ограниченной.

В работах А.П. Меренкова, В.Я. Хасилева и других авторов используются геометрические, или алгебраические, методы, которые основаны на представлении структуры гидравлической системы в виде плоского, связного орграфа с определенным набором вершин (узлов), ребер (ветвей) и граней (контуров). При этом рассматриваются гидравлические цепи с сосредоточенными параметрами при установившемся напорном течении несжимаемой жидкости и используются линеаризованные соотношения, аналогичные законам Кирхгофа для электрической цепи, а также нелинейные, в отличие от электротехники, уравнения связи между расходами и перепадами давления на ветвях. Данный подход был разработан в электротехнике. Полученные системы уравнений решаются численно градиентными методами или методом Ньютона. Однако при таком решении имеются ограничения на размерность задач: известные алгоритмы решения стационарной задачи ограничены числом участков до 250. Требуемая точность задания начального приближения очень высока, и при увеличении размерности выбор начального приближения мало отличается от собственно решения в пределах, необходимых для практики. Предложены также модифицированные методы последовательных приближений, позволяющие изучать системы с более высокой размерностью уравнений (число неизвестных от 1000 до 20000). Однако класс задач, решаемых описанными выше методами, невелик, а число ограничений и упрощений существенно. Существует еще одна особенность сложных ГС, связанная с их нелинейной природой. Если гидравлические характеристики участков ГС немонотонны, так, например, часто немонотонны характеристики используемых насосов, то исследуемая система может иметь несколько состояний равновесия, а значит, и несколько режимов работы. Это обстоятельство при расчете сетей с помощью алгебраического подхода обычно не учитывается. В этих исследованиях практически не рассматриваются динамические процессы, происходящие в сложных гидравлических цепях.

Другой, менее разработанный подход, также посвящен рассмотрению главным образом стационарного потокораспределения и связан с использованием тех или иных экстремальных методов, опирающихся на физическую или математическую сущность задачи о потокораспределении для произвольной ГС. Работы М.Я. Квасова, И.С. Панова и др. связаны с минимизацией (или максимизацией) некоторой специальной функции, отвечающей тому или иному вариационному принципу. Большинство из них описывают методы, основанные на решении задач нелинейного программирования, в частности нелинейной транспортной задачи, (Ю.М. Ермольев, И.М. Мельник, Е.М. Васильева, Б.Ю. Левит и др.), либо на применении градиентных или пошаговых методов безусловной минимизации для особым образом подбираемых функций (А.П. Меренков, В.Я. Хасилев, Б.Н. Пшеничный и др.).

Некоторые из перечисленных авторов используют в качестве основы вариационного подхода для расчета ГС теорему Максвелла о принципе наименьшего теплового действия, согласно которому стационарное состояние электрической системы соответствует минимальному выделению тепла. Обобщение этого принципа состоит в том, что потокораспределение в произвольной активной многоконтурной ГС отвечает точке минимума некоторого функционала. В качестве такого функционала выбирают, например, величину энергии, которую система должна затратить для перехода из одного стационарного режима в другой. В частности, в некоторых случаях может быть выбрана величина потенциальной энергии системы. Однако на практике реализация такого экстремального подхода приводит к системам уравнений подобным уравнениям Кирхгофа и практически не дает ничего нового по сравнению с алгебраическим подходом. В работах М.Я. Квасова, И.С. Панова также рассматривается обобщение этого подхода, имеющее понятный физический смысл – целевым функционалом служит полная механическая энергия системы, а в качестве вариационного принципа выбран вариационный принцип наименьшего действия. Такая постановка задачи позволяет адекватно моделировать течение среды не только в пассивных, но и активных участках системы, а также избежать некоторых упрощений и допущений. В этих работах практически не рассматривается влияние механических элементов ГС. Например, узловые напоры и угловые скорости вращения рабочих колес роторов центробежных насосов, положения клапанов запорно-регулирующей арматуры считаются постоянными величинами или наперед заданными функциями времени. Устойчивость и неоднозначность режимов работы системы в случае немонотонности характеристик не рассматривается.

Особую роль исследования нестационарных процессов и влияния возмущений на поведение системы играют в атомной энергетике, так как надежность и безопасность ядерных реакторов в значительной мере зависит от работы систем циркуляции теплоносителя в стационарных, переходных и аварийных режимах. Для решения этой проблемы для систем циркуляции, как частного вида ГС, Л.В. Смирновым был предложен и реализован принципиально новый подход[1]. При этом ГС рассматриваются как совокупность имеющих одну степень свободы тел переменного состава, обменивающихся массой в узлах соединения и разделения потоков.

Математическую модель динамики гидромеханических процессов оказалось возможным представить в виде системы соответствующим образом обобщенных уравнений Лагранжа с избыточными координатами и голономными

[1] Результаты этих исследований обобщены в монографии: Математические модели динамики и устойчивость систем принудительной циркуляции теплоносителя / Л.В. Смирнов. – М.: Энергоатомиздат, 1992. – 128 с.

связями. Это значительно упростило применение для анализа общих свойств решений качественных методов теории нелинейных колебаний и позволило получить необходимую для практики информацию, недоступную для только численных исследований. Это информация о структуре многомерного фазового пространства гидродинамических переменных и её зависимости от параметров и возмущений.

Во второй главе формулируется новый подход при исследовании ГС, который послужил основной исследования, изложенного в данной диссертационной работе, и дается краткая справка о некоторых методах теории нелинейных колебаний, практически не использующихся при инженерных расчетах.

Применение этого подхода к произвольным ГС с напорным течением жидкости потребовало ряда обобщений и предназначено для развития методики вывода уравнений динамики, для получения информации об общих динамических свойствах ГС, а также для разработки новой, отличной от традиционной, методики решения задачи стационарного потокораспределения. Кроме того, представляет интерес и продолжение ранее проведенных исследований по оценке влияния работы системы циркуляции теплоносителя, как частного вида ГС, на безопасность ядерного реактора. Решению этих задач и посвящена настоящая диссертация.

Как было отмечено в первой главе, традиционный, гидравлический, подход при моделировании одномерного напорного нестационарного течения несжимаемой жидкости в ГС предполагает использование уравнений движения жидкости в форме уравнения Бернулли (1) для каждого участка и уравнений неразрывности в узлах (2). Изучение общих свойств решений системы уравнений (1), (2), которая представляет собой систему нелинейных уравнений в полных производных высокого порядка, и зависимости этих свойств от параметров и структуры системы является сложной задачей. Численные методы позволяют отыскать только частные решения системы, но не дают представления об общих свойствах решений и их зависимости от параметров, начальных условий и возмущений. Преодоление затруднений состоит в использовании отличного от традиционного для прикладной гидромеханики напорных течений подхода при получении и анализе уравнений движения. При таком нетрадиционном подходе ГС рассматривается как совокупность тел переменной массы (отдельных участков системы), которые обмениваются массой в «узлах», то есть в местах соединения и разделения потоков. Для описания рассматриваемого в рамках прикладной гидромеханики течения жидкости в каждом участке ГС используется уравнение

Лагранжа для имеющего одну степень свободы тела, обобщённое на случай потока массы через границы:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{h}} - \frac{\partial T}{\partial h} = G + H, \tag{3}$$

где h – обобщённая координата, G – обобщённая сила, выражающиеся через активные потенциальные и непотенциальные силы; $T = \frac{m\bar{v}^2}{2}$ – кинетическая энергия; m, $\bar{v}$ – масса и абсолютная скорость тела соответственно; $H = \sum_{i=1}^{K}\left[\frac{dm_i}{dt}\bar{u}_i\frac{\partial\bar{v}}{\partial\dot{h}} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\bar{v}^2}{2}\cdot\frac{\partial m_i}{\partial\dot{h}}\right) - \frac{\bar{v}^2}{2}\cdot\frac{\partial m_i}{\partial h}\right]$ – добавочная сила, обусловленная потоками массы через границы; $\frac{dm_i}{dt}$, $i=\overline{1,K}$ – потоки массы с абсолютными скоростями $\bar{u}_i$.

При использовании такого подхода для ГС с напорным течением несжимаемой жидкости для каждого участка ГС, расположенного между узлами, в качестве обобщённой скорости $\dot{h}$ выбирается расход среды Q, $K=2$ в соответствии с числом потоков среды через концы участка. В этом случае $H = \frac{rQ^2}{2}\left(\frac{1}{S_1^2} - \frac{1}{S_2^2}\right)$. Для каждого узла ГС имеем уравнение типа (2), которое представляет собой интегрируемую связь обобщенных скоростей.

Таким образом, математическая модель динамики напорного течения несжимаемой жидкости в ГС после представления этой модели в виде системы уравнений Лагранжа представляет собой систему Гельмгольца, что открывает возможность применения для описания и исследования ГС методов аналитической механики и теории нелинейных колебаний. В настоящем исследовании из этих методов используются: метод разделения и раздельного исследования процессов с разными характерными временами, называемый в теории нелинейных колебаний методом разрывных колебаний, прямой (или второй) метод Ляпунова, а также некоторые другие методы качественного исследования автономных нелинейных систем.

В третьей главе получена математическая модель для произвольной ГС, состоящей из N участков и L узлов. Для сложной ГС, содержащей насосы на некоторых участках, кинетическая энергия является суммой двух составляющих – гидродинамической и механической:

$$T(\overline{Q},\overline{w}) = \sum_{i=1}^{N}\frac{t_i Q_i^2}{2} + \sum_{j=1}^{N_1}\frac{J_j w_j^2}{2} \tag{4}$$

Q_i, w_j имеют смысл обобщенных скоростей, N – общее количество участков в системе; N_1 – количество участков системы, содержащих насосы. Математическую модель системы получаем в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&t_i \dot{Q}_i = (P_{i1} - P_{i2}) + r g (z_{i1} - z_{i2}) - \Delta P_i (Q_i, w_i),\ i = \overline{1, N_1};\\
&t_i \dot{Q}_i = (P_{i1} - P_{i2}) + r g (z_{i1} - z_{i2}) - \Delta P_i (Q_i),\ i = \overline{N_1 + 1, N};\\
&\sum_{j=1}^{M_k} Q_j = 0, \quad k = \overline{1, L};\\
&J_i \dot{w}_i = M'_i (w_i, a_i) - M''_i (Q_i, w_i), \quad i = \overline{1, N_1};
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где $t_i = r \int_{x_{i1}}^{x_{i2}} \frac{dx}{S_i(x)}$; $\Delta P_i (Q_i, w_i) = \Delta P'_i (Q_i) + \Delta P''_i (Q_i, w_i) - r \frac{Q_i^2}{2} \left(\frac{1}{S_i^2 (x_{i1})} - \frac{1}{S_i^2 (x_{i2})} \right)$; $i = \overline{1, N_1}$;

$-\Delta P''_i (Q_i, w_i)$ – характеристика насоса на участке; $M'_i (w_i, a_i)$ – движущий момент, в общем случае зависящий от внешних воздействий a_i; $M''_i (Q_i, w_i)$ – определяющийся трением и расходом перекачиваемой среды момент сопротивления; J_i – момент инерции рабочего колеса насоса соответствующего участка и вращающихся элементов, связанных с ним механически. Обобщенные силы, стоящие в правых частях первой группы уравнений (гидродинамическая подсистема) такие же, как в уравнении Бернулли (1), а во второй группе уравнений (механическая подсистема), это суммарный момент на оси насоса, рассматриваемого как тело с закрепленной осью.

Функции ΔP_i, входящие в систему (5), представляют собой суммарные гидравлические характеристики соответствующих участков системы. Согласно данным прикладной гидромеханики и теории гидравлических машин, аналитические выражения этих функций для участка без насоса и с насосом имеют следующий вид:

$$
-\Delta P_i (Q_i, \omega_i) = \begin{cases} -a_1 Q_i^2 + b \omega_i Q_i + c \omega_i^2, & Q_i \ge 0;\\ a_2 Q_i^2 + b \omega_i Q_i + c \omega_i^2, & Q_i < 0; \end{cases}
\tag{6}
$$

$$
\Delta P_i (Q_i) = \begin{cases} d_1 Q_i^2, & Q_i \ge 0;\\ -d_2 Q_i^2, & Q_i < 0; \end{cases}
\tag{7}
$$

где d_1, d_2, a_1, a_2, b, c – положительные коэффициенты, вид которых зависит от гидравлических сопротивлений участков и гидравлических характеристик насосов.

Качественный вид графиков характеристик участков без насоса и с насосом представлен соответственно на рисунке 1 (а и б).

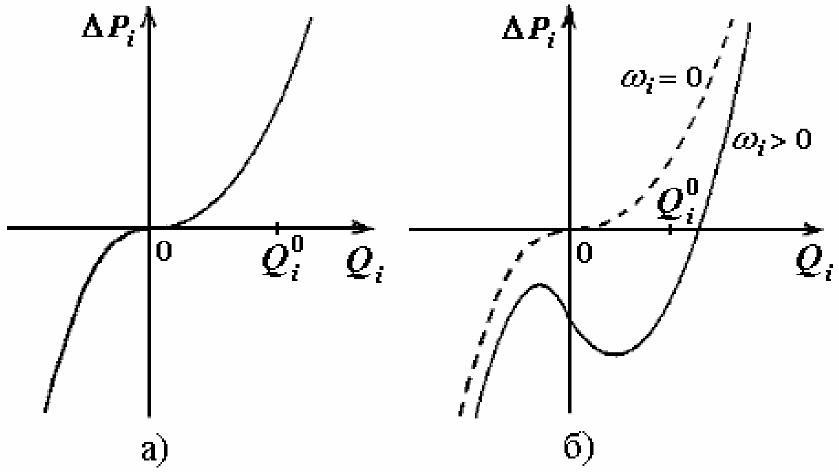


Рис. 1. Качественный вид гидравлических характеристик участков без насоса (а) и с насосом (б)

Таким образом, имеем систему нелинейных дифференциальных уравнений произвольного порядка. При традиционном подходе обычно считается, что механические переменные не меняются, то есть без какого-либо обоснования рассматривается только гидродинамическая подсистема. При исследовании только гидродинамических процессов, конечно, можно предполагать наличие идеального регулятора оборотов рабочего колеса каждого из насосов. С позиций теории динамических систем, обоснованием такого упрощения в рассматриваемом далее исследовании можно считать разделение гидродинамических и механических процессов, имеющих разные характерные временные масштабы. В качестве малого параметра, наличие которого необходимо для разделения движений, используется отношение кинетических энергий гидродинамической и механической подсистем в стационарном режиме. Проведенные оценки для некоторых гидросистем показывают, что гидродинамические процессы являются быстрыми, а механические – медленными.

Для представляющих в большинстве случаев основной интерес гидродинамических процессов воспользуемся уравнениями (5) при постоянных или меняющихся квазистатически механических переменных w_i:

$$\begin{aligned} & t_i \dot{Q}_i = P_{i1} - P_{i2} + rg(z_{i1} - z_{i2}) - \Delta P_i(Q_i, w_i^0),\ i = \overline{1,N}\ ; \\ & \sum_{j=1}^{M_k} Q_j = 0, \quad k = \overline{1,L}; \end{aligned} \qquad (8)$$

Эта система уравнений, записанная в форме уравнений Лагранжа, имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial Q_i} = -\frac{\partial R}{\partial Q_i}, \quad i = \overline{1, N}, \quad T = \sum_{i=1}^{N} \frac{t_i Q_i^2}{2}, \quad \sum_{j=1}^{M_k} Q_j = 0, \ k = \overline{1, L},$$
$$R\left(Q_1, \ldots, Q_n\right) = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{Q_i} \Delta P_i(x)\,dx + \sum_{i=1}^{N} Q_i \left[P_{i1} - P_{i2} + \rho g (z_{i1} - z_{i2})\right] + C_1. \tag{9}$$

Исключение избыточных координат с помощью L интегрируемых уравнений связи приводит к исчезновению второй суммы в выражении для функции R. При этом в уравнениях исчезают P_i и z_i. Определяющий размерность фазового пространства порядок этой системы уравнений $n = N - \tilde{L}$, где $\tilde{L} \le L$ – ранг матрицы уравнений связи, среди которых могут быть уравнения-следствия. Другой важной особенностью этой системы уравнений с точки зрения классической механики является присутствие в ней только обобщенных скоростей.

Представление математической модели динамики ГС в виде системы уравнений Лагранжа послужило основой для исследования качественной структуры фазового пространства $Q_1, \ldots, Q_n$ прямым методом Ляпунова с использованием функции R, определенной с точностью до постоянного слагаемого C_1:

$$R\left(Q_1, \ldots, Q_n\right) = \sum_{i=1}^{N} \int_0^{Q_i} \Delta P_i(x)\,dx + C_1 \tag{10}$$

$\tilde{L}$ координат в правой части (10) являются избыточными и выражаются через остальные координаты с помощью уравнений связи.

Производная по времени от этой функции, вычисленная с использованием системы уравнений (9), имеет вид:

$$\frac{dR}{dt} = -\sum_{i=1}^{N} t_i \dot{Q}_i^2 \tag{11}$$

Функцию R можно также назвать обобщенной функцией Релея.

Качественный вид функций ΔP_i (так же как и приведенные выше их аналитические зависимости) позволяет сделать вывод о том, что функция R ограничена снизу и неограниченно растет при удалении от начала координат, поскольку каждое слагаемое, входящее в выражение (11) для этой функции, также ограничено снизу и неограниченно растет с ростом модуля аргумента Q_i. Константу C_1 в (10) можно выбрать, исходя из условия $R(Q_1^0, \ldots, Q_n^0) = 0$, где $Q_1^0, \ldots, Q_n^0$ – некоторые значения переменных, при которых R имеет глобальный минимум. Поэтому функция Релея положительна всюду в области изменения переменных $Q_1, \ldots, Q_n$, кроме точки $Q_1^0, \ldots, Q_n^0$. В общем случае функция R может иметь несколько локальных минимумов. Из выражения (11) видно, что $\dot{R}$ – отрицательно определённая функция, которая обращается в нуль только в состояниях равновесия исходной системы (8). На основании теорем прямого метода Ляпунова и указанных свойств функций R и $\dot{R}$ можно утверждать:

1) Система (8) диссипативна, то есть все процессы независимо от начальных условий заканчиваются в одном из устойчивых состояний равновесия;

2) Единственность состояния равновесия – необходимое и достаточное условие устойчивости “в целом”;

3) При наличии нескольких состояний равновесия с помощью указанной функции можно выделить устойчивые, в каждом из которых она имеет минимум, и грубо оценить области притяжения.

Таким образом, анализ функции R дает исчерпывающую информацию о качественной структуре n-мерного фазового пространства. При изменении параметров или медленных переменных w_i, $i = \overline{1,n}$, приводящих к деформации гидравлических характеристик участков с насосами, происходят бифуркациии в виде рождения и исчезновения особых точек с нулевым суммарным индексом векторного поля.

Полученные выше результаты исследования позволяют свести задачу нахождения стационарного потокораспределения произвольной ГС без объёмов со свободными уровнями к поиску координат минимумов функции многих переменных R:

$$R(\mathbf{Q}) \to \min, \quad \mathbf{Q} \in D, \; D = \left\{ \mathbf{Q} \in R^n : a_i \le Q_i \le b_i, \, i = \overline{1,n} \right\} \qquad (12)$$

Это является основой для применения так называемых методов и алгоритмов принятия оптимальных решений, вместо исследования системы нелинейных алгебраических уравнений.

<u>В четвертой главе</u> применение указанной методики продемонстрировано на примере исследования динамики системы циркуляции теплоносителя ЯЭУ, являющегося частным видом ГС. Нарушение нормальной, предусмотренной проектом, работы системы циркуляции теплоносителя недопустимо с точки зрения безопасности реактора. Изучение её общих динамических свойств является важной задачей. Результаты её решения имеют самостоятельное значение. С точки зрения математического моделирования ГС, рассмотренный в главе пример демонстрирует применение представленного в предыдущих разделах общего подхода и даёт наглядное, качественное представление о структуре фазового пространства гидродинамических переменных и его зависимости от параметров.

На Рис.2 представлена расчетная модель типовой системы циркуляции.

Теплоноситель, нагревающийся в активной зоне реактора 1, поступает по трубопроводам в параллельно работающие теплообменные петли 2, и после охлаждения в теплообменниках 3 снова подается в активную зону. Течение теплоносителя обеспечивается работой циркуляционных насосов 4, снабженных электродвигателями 5. Стрелками показано направление течения теплоносителя в нормальном эксплуатационном режиме. Эта схема при числе петель, равном четырем, соответствует установке типа ВВЭР-1000. Изменение плотности теплоносителя при нагревании и охлаждении невелико, и оценки, имеющиеся в литературе, показывают, что влиянием этих изменений в рассматриваемых ниже гидромеханических процессах можно пренебречь. Это дает основание изучать гидродинамические процессы независимо от теплофизических.

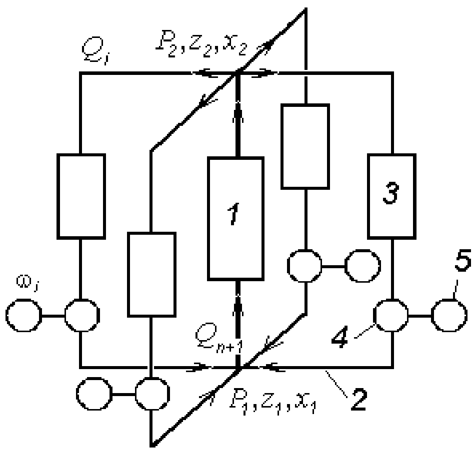


Рис. 2. Расчетная модель системы циркуляции:
1 – активная зона реактора, 2 – теплообменная петля, 3 – теплообменник, 4 – насос, 5 – двигатель

Полная математическая модель динамики гидромеханических процессов, соответствующая представленной расчетной схеме, при произвольном числе петель имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\tau_{n+1}\dot{Q}_{n+1} = (P_1 + \rho g z_1) - (P_2 + \rho g z_2) - \Delta P_{n+1}(Q_{n+1}),\\
&\tau_i \dot{Q}_i = (P_2 + \rho g z_2) - (P_1 + \rho g z_1) - \Delta P_i(Q_i, \omega_i),\ i = \overline{1, n},\\
&J_i \dot{\omega}_i = M_{Дi}(\omega_i, \alpha_i) - M_{Ci}(\omega_i, Q_i),\ i = \overline{1, n}, \qquad (13)\\
&Q_{n+1} = \sum_{j=1}^{n} Q_j,
\end{aligned}$$

где Q_i – объемный расход жидкости, $i = \overline{1, n+1}$; n – число петель с насосами и теплообменниками; P – давление; ρ – плотность жидкости; x – продольная координата вдоль оси потока; g – ускорение свободного падения; z – высота оси потока на участке; $t_i = r\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{S_i(x)}$, $i=\overline{1,n+1}$, $t_{n+1} = r\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{S_{n+1}(x)}$, $S(x)$ – площадь проходного сечения участка; $M_{Дi}$, M_{Ci} – движущий момент и момент сопротивления на валу циркуляционного насоса, определяющиеся характеристиками насосов и приводов; J_i – приведенный момент инерции i-го рабочего колеса насоса; ω_i, $i=\overline{1,n}$, – частоты вращения рабочих колес циркуляционных насосов. Переменные Q_i, и ω_i, имеют смысл обобщенных скоростей, а обобщенные координаты, получающиеся интегрированием по времени, являются скрытыми и в уравнения движения не входят.

Математическая модель (13) с учетом зависимости плотности от температуры является частью более сложной математической модели, используемой для изучения не только гидромеханических, но и теплофизических процессов. При пренебрежении изменением плотности теплоносителя (о чем было упомянуто выше), эта система уравнений является автономной, и пригодна для изучения гидромеханических процессов и общих динамических свойств СЦ. Данная модель отражает динамику двух взаимодействующих процессов разной природы. Это, соответственно, процессы течения теплоносителя и вращения рабочих колес циркуляционных насосов и связанных с ними масс (редуктор, ротор электродвигателя и маховик). Ранее аналитически и численным счетом для параметров типового реактора ВВЭР-1000 показано, что гидродинамические процессы являются быстрыми и могут быть изучены в предположении, что механические переменные ω_i, $i=\overline{1,n}$, постоянны или изменяются квазистатически по отношению к быстрым переменным Q_i, $i=\overline{1,n+1}$. Таким образом, оказывается возможным раздельно изучать быстрые и медленные процессы, то есть понизить порядок исследуемой системы уравнений (13) вдвое.

Для быстрых процессов после исключения Q_{n+1} с помощью последнего из уравнений системы (13) имеем:

$$t_{n+1}\sum_{j=1}^{n}\dot{Q}_j + t_i\dot{Q}_i = -\Delta P_i\left(Q_i, w_i^0\right) - \Delta P_{n+1}\left(\sum_{j=1}^{n}Q_j\right),\ i=\overline{1,n}, \qquad (14)$$

где значения медленных переменных ω^0_i предполагаются постоянными, либо медленно меняющимися в соответствии с решением системы уравнений медленных процессов, следующей из (13), при $t_i = 0,\ i=\overline{1,n+1}.$ Результаты исследования случая произвольного числа петель (n) совпадают с представленными в главе 3. Однако частный случай $n = 2$ дает наглядное представление о связи функции Ляпунова и структуры фазового плоскости.

Уравнения (14) так же как и в общем случае уже не содержат P_1, P_2, z_1, z_2.

Для нахождения состояний равновесия имеем систему уравнений:

$$-\Delta P_i\left(Q_i, w_i^0\right) = \Delta P_{n+1}\left(\sum_{j=1}^{n} Q_j\right),\ i = \overline{1,n}, \tag{15}$$

Решение этой системы уравнений соответствует нахождению стационарного потокораспределения. Задача потокораспределения (15) была решена графически и численно. Эта задача, в отличие от общего случая, рассматриваемого выше, имеет частный вид и решается с помощью несложного графического построения или соответствующего ему разработанного численного алгоритма. На рис.3 представлены результаты такого построения для случая n = 2 и одинаковых зависимостей $-\Delta P_i(Q_i, w_i^0),\ i = 1,2$ (кривая 4). Решение задачи стационарного потокораспределения соответствует точкам пересечения характеристики общего участка ΔP_3 (Q_1 + Q_2) (кривые 1, 2, 3) и получающейся графически или численно суммарной характеристики системы петель $\Phi^{-1}(Q_1 + Q_2)$ (кривая 5). Последняя имеет двойную петлю, отмеченную жирной линией, и каждая точка на ней соответствует двум симметричным режимам, т.к. индексы i = 1,2 входят симметрично.

При изменении нелинейных характеристик ΔP_i (Q_i, ω_i), $i = \overline{1,n}$, $\Delta P_{n+1}(\sum Q_j)$, обусловленном изменением параметров, например, гидравлического сопротивления реактора или величин ω^0_i, $i = \overline{1,n}$, стационарные значения расходов $Q°_i$, $i = \overline{1,n}$, изменяются, что соответствует изменению координат особых точек системы уравнений (14). Могут происходить бифуркации в виде рождения и исчезновения некоторых из этих точек в данной системе. При n = 2 система может иметь одно, пять или три состояния равновесия, что определяется числом точек пересечения кривых. На рис. 3 это продемонстрировано для случая увеличения гидравлического сопротивления реактора $\Delta P_3(Q_1+Q_2)$ (соответственно кривые 1, 2, 3).

Исследование устойчивости системы (14) аналогично проведенному в предыдущей главе и дает те же результаты. В частном случае при n = 2 функция R и её производная по времени имеет вид:

$$R = \sum_{i=1}^{3} \int_0^{Q_i} \Delta P_i(h)dh + C_1; \quad \dot{R} = -\sum_{i=1}^{3} t_i \dot{Q}_i^2, \quad Q_3 = Q_1 + Q_2. \tag{16}$$

Построение и анализ этой функции дают наглядное представление о структуре фазового пространства и об изменениях этой структуры в результате бифуркаций.

Алгоритм графического решения системы (15) был реализован числено. При этом функция $\Phi^{-1}(Q_1+Q_2)$, так же как и гидравлические характеристики участков $\Delta P_i\,(Q_i,\,\omega_i)$, i = 1,2, и $\Delta P_3\,(Q_1+Q_2)$, были построены с помощью ЭВМ для задаваемых с терминала коэффициентов, определяющих вид гидравлических характеристик. Программа реализована в среде разработки *Delphi 6.0*. Полученные при этом иллюстрации позволяют увидеть, как изменяется количество состояний равновесия, при разных значениях угловой скорости вращения рабочего колеса одного из насосов.

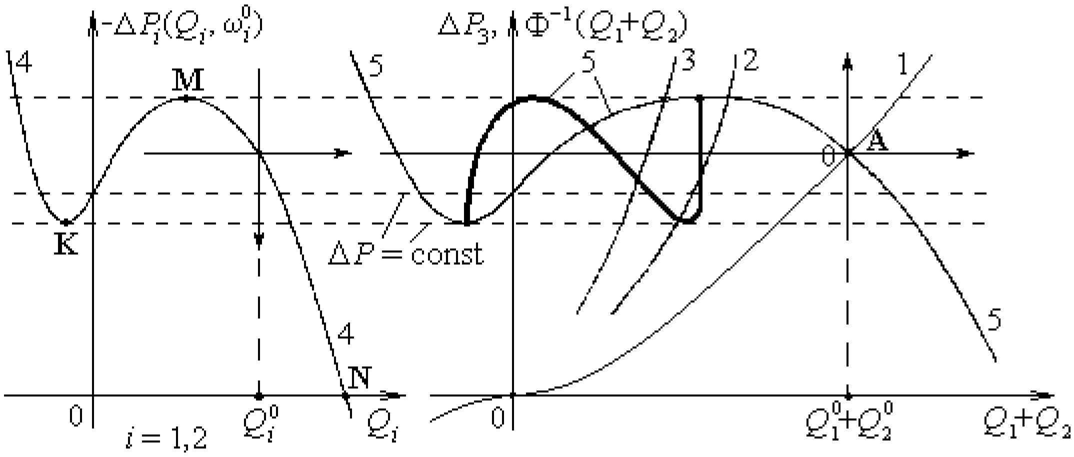
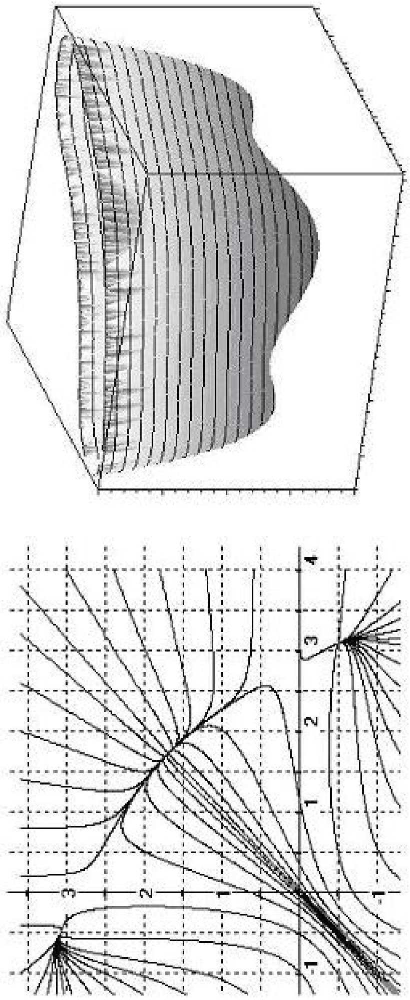


Рис. 3. Нахождение состояний равновесия системы (5): 1,2,3 – зависимости $\Delta P_3\,(Q_1+Q_2)$ в различных случаях, 4 – зависимости $\Delta P_i\,(Q_i,\,\omega^0_i)$, 1, 2, 3, 5 – зависимости $\Delta P_3(Q_1+Q_2)$ и $\Phi^{-1}(Q_1+Q_2)$

Расчеты в случае n = 2 проводились при следующих заданных параметрах характеристик системы (14): a_1 = 1,4; a_2 = – 4; b = 4; c = 6; d_1 = – d_2 = 0,75 (гидравлические характеристики для обеих петель полагались одинаковыми, поэтому коэффициенты a_1, a_2, b, c зависимостей ΔP_i из (6) для i = 1 и i = 2 совпадают).

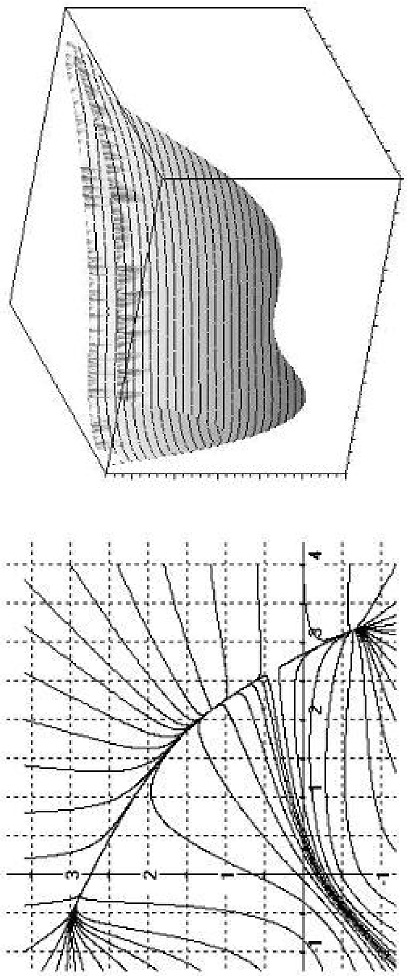
Результаты решения этой задачи для двух случаев $\omega_1=\omega_2=1$ и $\omega_1=1$, $\omega_2=0{,}965$ представлены на Рис. 4 и Рис. 5. На этих же рисунках приведены численно полученные вид фазовой плоскости и функции R для рассматриваемых двух случаев. Поверхность $R\,(Q_1,\,Q_2)$ была построена с использованием математического пакета Maple.

На Рис. 4 – 5 видно, что каждому состоянию равновесия системы (14) соответствует особая точка поверхности $R\,(Q_1,\,Q_2)$, которая соответствует функции Ляпунова. Причем в устойчивых состояниях равновесия она имеет минимум, а в неустойчивых – особенности типа седла. Фазовые траектории ведут себя подобно материальным точкам, скатывающимся по поверхности под действием силы тяжести, направленной вниз.



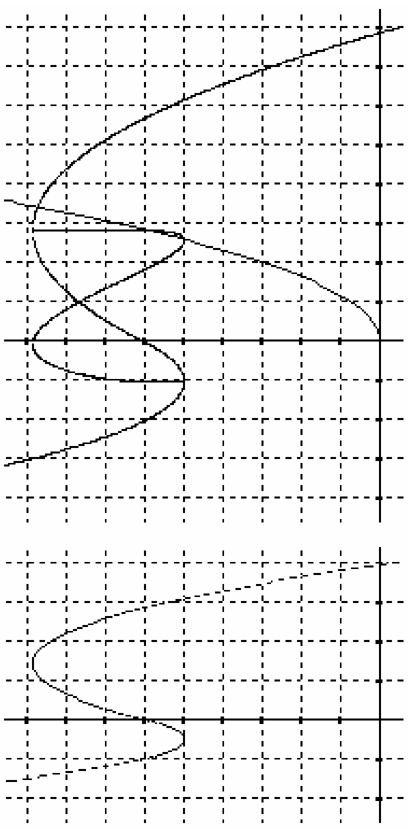
(b) (c)

Рис. 4. Случай одинаковых характеристик и пяти состояний равновесия: (a) Нахождение состояний равновесия системы; (b)

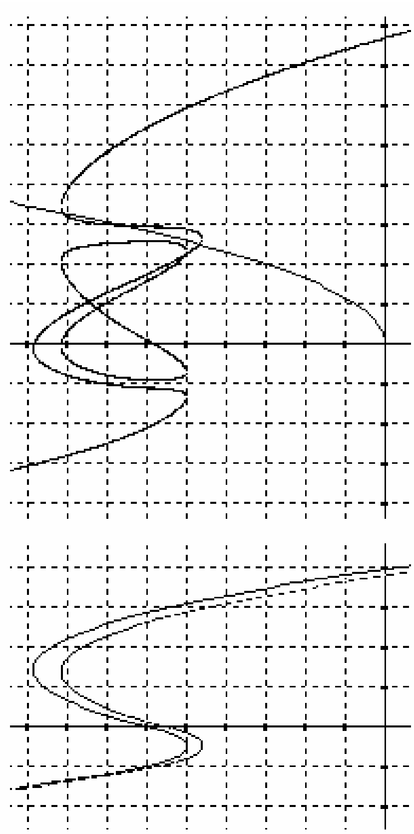


(b) (c)

Рис. 5. случай различных характеристик и трех состояний равновесия: (a) Нахождение состояний равновесия системы; (b) Фазовый портрет



(а)



(а)

Численный поиск экстремумов функции R (q_1, q_2) для приведенных случаев показал полное соответствие с результатами, представленными на этих рисунках. Поиск осуществлен локальным методом Ньютона, начальная точка выбиралась из соответствующей области притяжения, определенной ранее.

Рис. 6 качественно демонстрирует связь структуры фазовой плоскости Q_1, Q_2 и поверхности R (Q_1, Q_2) для системы циркуляции при n = 2 в случае двух одинаковых петель и пяти состояний равновесия (случай соответствует пересечению кривых 5 и 2 на Рис.3). Рис. 6 приводился ранее в монографии, ссылка на которую имеется на стр. 8 реферата. На этом рисунке также показано сечение функции R плоскостью R = const и проекция этого сечения.

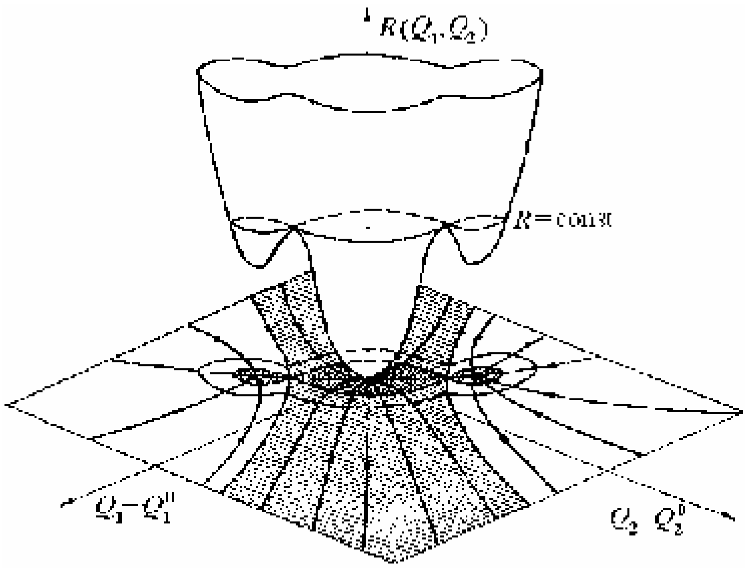


Рис. 6. Качественный вид функции Ляпунова и структура фазовой плоскости. Случай пяти состояний равновесия.

Результаты исследования данной системы (14) при $n = 2$ состоят в следующем:

- Координаты состояний равновесия в представленном на Рис.6 частном случае определяются в соответствии с решением уравнений статики, проведенным графически на Рис.3. для характеристики общего участка 2. Каждая точка пересечения кривой 2 с участком кривой 5, выделенным жирной линией, соответствует на фазовой плоскости двум симметричным относительно линии $Q_1 = Q_2$ состояниям равновесия. Симметричность системы относительно индексов 1, 2 при $n = 2$ следует из вида уравнений (13).
- Диссипативность системы свидетельствует о том, что в системе нет предельных циклов, фазовые траектории идут из бесконечности в некоторую ограниченную область фазового пространства, содержащую все состояния равновесия. На Рис.6 штриховкой выделены область притяжения состояния равновесия $Q_1 = Q_1^0$, $Q_2 = Q_2^0$ и часть областей притяжения устойчивых состояний равновесия, лежащая внутри проекции сечения функции R плоскостью $R = const$ на плоскость Q_1, Q_2.
- Из всех состояний равновесия системы (14) устойчивы те, для которых функция R имеет минимум. Для случая, представленного на Рис.6, система имеет три устойчивых состояния равновесия, которым соответствуют минимумы функции Релея, и два неустойчивых, которым соответствуют седловые точки поверхности R.

В случае неодинаковых характеристик петель результаты аналогичные, но отсутствует симметрия фазового портрета и функции R.

Основным качественным результатом, представляющим интерес с точки зрения общих динамических свойств СЦ, является возможность существования нескольких состояний равновесия. Проектному расчету отвечает состояние равновесия, соответствующее рабочей точке на участке MN характеристики каждой петли на Рис.3. Работа СЦ в стационарных режимах, соответствующих другим состояниям равновесия, с технической точки зрения недопустима, так как при этом в одной из петель расход теплоносителя либо мал, либо отрицателен.

Наиболее часто встречающимся видом возмущения работы СЦ является отключение и медленный выбег одного или нескольких циркуляционных насосов, что вызывает изменение расходов теплоносителя в реакторе и петлях с теплообменниками. В диссертации подробно рассмотрен такой случай, когда из-за уменьшения скорости вращения одного из двух насосов вследствие его отключения меняется характеристика одной петли СЦ. При таком возмущении ω_2 медленно убывает, и этот процесс определяется из последних уравнений системы (13) при $n = 2$ и обращении в нуль движущего момента насоса или при заданном в виде известной функции времени законе изменения $\omega_2(t)$. Такое изменение ω_2 приводит к деформации зависимостей $\Delta P_2\,(Q_2,\, w_2^0)$ и $\Phi^{-1}(Q_1+Q_2)$ и к рождению и исчезновению пар состояний равновесия на фазовой плоскости системы. Следствием является возникновение быстрого гидродинамического процесса во время медленного изменения ω_2.

При анализе начального этапа аварии на Чернобыльской АЭС[2] были отмечены как недостатки проекта, так и ошибки проводившего эксперимент обслуживающего персонала. Эти два фактора в начале работы аварийной защиты реактора привели не к гашению реакции деления, а к ее росту. Проведенное в настоящей диссертации исследование влияния гидродинамических процессов на безопасность ядерного реактора позволяет указать еще на один вид опасного возмущения. Изменение угловых скоростей половины медленно останавливающихся циркуляционных насосов приводит к кратковременному относительно быстрому снижению расхода теплоносителя через реактор и к росту количества пара в активной зоне. Это происходит в момент смены направления течения теплоносителя в петлях с останавливающимися насосами. Во время вызвавшего аварию эксперимента из-за ошибки оператора движение поглощающих нейтроны стержней аварийной защиты зарегистрировано только

[2] Смирнов, Л.В. Качественное исследование Чернобыльской аварии на основе анализа простой математической модели / Л.В. Смирнов, А.Л. Пригоровский, Е.Ф. Сабаев // Вопросы атомной науки и техники (ВАНТ). Сер. Физика ядерных реакторов. – 2004. – Вып.3. – С.61 – 70.

через 36 секунд после отключения по пару турбоэлектрогенератора, питающего часть циркуляционных насосов. Примерно в это же время произошло указанное выше гидродинамическое возмущение. Сложение двух вызвавших рост коэффициента размножения нейтронов в реакторе возмущений могло оказаться решающим фактором на начальном этапе аварии на ЧАЭС.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В работе развит основанный на применении методов аналитической механики и нелинейной теории колебаний подход, используемый при получении и анализе уравнений движения ГС. С его помощью получена новая методика исследования сложных ГС, которая позволяет получить исчерпывающие качественные представления о динамических свойствах ГС. Как следствие, теоретически обоснован новый способ решения задачи потокораспределения ГС. При этом задача нахождения стационарных режимов работы ГС сведена к решению многоэкстремальной задачи нахождения экстремумов функции специального вида.

Полученные на основе анализа частных примеров результаты демонстрируют принципиальную возможность исследования гидромеханических систем более сложного вида, и кроме решения задачи стационарного потокораспределения, позволяют получать информацию об общих динамических свойствах этих систем.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ

1. Смирнов, Л.В. Бифуркации и потеря устойчивости по быстрым движениям системы циркуляции теплоносителя ядерного реактора / Л.В. Смирнов, Н.В. Кассина, А.Г. Прохоров // Нелинейные колебания механических систем: VI научная конференция. Тезисы докладов. Н Новгород, 2002 г. – С.138.
2. Кассина, Н.В. Математическое моделирование динамики напорного течения несжимаемой жидкости в сложных гидравлических системах методами аналитической механик и теории колебаний / Н.В. Кассина // Информационные технологии в науке, проектировании и производстве: Материалы восьмой Всероссийской научно-технической конференции. Тезисы докладов, Н. Новгород: МВВО АТН РФ, 2003 г. – С.12.
3. Кассина, Н.В. Влияние изменения работы ГЦН на режим работы ядерного реактора / Н.В. Кассина, Л.В. Смирнов // ВАНТ. Сер. Физика ядерных реакторов. – 2004. – Вып.3. – С.71 – 78.

4. Кассина, Н.В. Математическое моделирование динамики гидравлических цепей / Н.В. Кассина, Л.В. Смирнов // Вестник ННГУ. Сер. Мат. моделирование и опт. управл. (Н. Новг.) – 2004. – Вып. 1(21), С.132 – 138.
5. Кассина, Н.В. Влияние некоторых гидродинамических процессов на безопасность ядерного реактора / Н.В. // IV сессия молодежной школы-семинара «Промышленная безопасность и экология». Тезисы докладов, РФЯЦ-ВНИИЭФ, Саров, 2004 г. – С.34.
6. Кассина, Н.В. Влияние нестационарных гидродинамических процессов на безопасность ядерного реактора/ Н.В. Кассина// Нелинейный мир. Десятая междисциплинарная научная конференция. Тезисы докладов, Н. Новгород, 27 июня – 2 июля 2005 г. – Вып.10. – С.59.
7. Динамические проблемы, обусловленные взаимодействием механической и гидродинамической подсистем/ Л.В. Смирнов [и др.] //. Труды VII Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем», Н. Новгород, 19 – 23 сентября 2005 г. – С. 19-21.
8. Динамические проблемы, обусловленные взаимодействием механических и гидродинамических процессов в сложных гидросистемах / Л.В. Смирнов [и др.] // Вестник ННГУ. Сер. Механика (Н. Новг.) – 2006. – Вып. 1(7), С.33 – 40.
9. Гидроупругие колебания элементов конструкций энергетических установок / Л.В. Смирнов [и др.] // Вестник ННГУ. Сер. Механика (Н. Новг.) – 2006. – Вып. 1(7), С.41 – 49.
10. Кассина, Н.В. Математическое моделирование разветвленных гидравлических систем / Н.В. Кассина, Л.В. Смирнов // Тринадцатая Международная конференция «Математика. Компьютер. Образование». Сборник научных тезисов, Вып.13, Москва-Ижевск, 2006 г. – С.149.
11. Кассина Н.В. Динамика и устойчивость гидросистем / Н.В. Кассина, Л.В. Смирнов // IX Всеросссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. Т.1 (Нижний Новгород, 22 – 28 августа 2006). Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского, 2006. – С.64 – 65.
12. Математическое моделирование динамики гидросистем: отчет о НИР (промежуточ.) / Научно-исслед. ин-т мех-ки ННГУ (НИИМ ННГУ); рук. Л.В. Смирнов. – Н. Новгород, 2006. – 29 с.; № ГР 01200606854. – Инв. НИИ № 543.
13. Кассина, Н.В. Влияние некоторых гидродинамических процессов на безопасность ядерного реактора / Н.В. Кассина // Промышленная безопасность и экология: Сборник материалов IV сессии школы-семинара, Саров: ФГУП РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2004. – С.212 – 218.