

ЛИТВИНЧУК СВЕТЛАНА ЮРЬЕВНА

**ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ
ТРЕХМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И
ВЯЗКОУПРУГОСТИ**

Специальность 01.02.04 –

Механика деформируемого твердого тела

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород – 2006

Работа выполнена в Научно-исследовательском институте механики государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского»

Научные руководители:

Заслуженный деятель науки РФ,
доктор физико-математических наук,
профессор
кандидат технических наук,
доцент

Баженов Валентин Георгиевич

Игумнов Леонид Александрович

Официальные оппоненты:

доктор технических наук,
профессор
доктор физико-математических наук,
профессор

Угодчиков Андрей Григорьевич

Ерофеев Владимир Иванович

Ведущая организация:

Южный научный центр РАН (г. Ростов на Дону)

Защита состоится 28 декабря 2006 г. в 13:30 часов на заседании диссертационного совета Д 212.166.09 при Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского по адресу: 603950, Н.Новгород, пр. Гагарина, 23, корп.б.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке Нижегородского государственного университета.

Автореферат разослан 25 ноября 2006 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 212.166.09

кандидат технических наук, доцент

Б.В.Трухин

Современные потребности машиностроения, строительства и др. стимулируют изучение распространения волн в трехмерных телах произвольной геометрии. Учет эффектов последействия еще более усложняет волновые картины и снижает эффективность многих расчетных методов. Одним из современных методов численно-аналитического анализа динамических задач трехмерной теории упругости и вязкоупругости является метод граничных элементов (МГЭ). Библиометрический анализ показывает, что МГЭ по востребованности уверенно занимает третью позицию (после метода конечных элементов и метода конечных разностей) среди численных методов. Разработка подходов метода граничных интегральных уравнений (ГИУ) и МГЭ для решения трехмерных динамических задач теории упругости и вязкоупругости представляет актуальную проблему.

Цель работы состоит в развитии МГЭ-методики в сочетании с преобразованием Лапласа для решения трехмерных задач динамики упругих и вязкоупругих многосвязных тел при заданных на их поверхности нестационарных силовых, кинематических или силовых и кинематических условий; в разработке соответствующих алгоритмов и программ и в расчете динамического деформирования трехмерных вязкоупругих тел и сред.

Методика исследований основана на сведении краевых задач трехмерной линейной теории упругости и вязкоупругости к ГИУ (прямого подхода) с применением преобразования Лапласа; на детально проработанных численных МГЭ-схемах в сочетании с методами численного интегрирования по Гауссу, коллокаций, численного обращения преобразования Лапласа и т.п.

Достоверность результатов диссертационной работы основана на строгом использовании математической теории упругости и вязкоупругости; на корректной редукции исходных динамических краевых задач к системам ГИУ; на разработке и использовании устойчивых, высокоточных ГЭ-методик и ГЭ-схем для численного анализа; на сравнении результатов решения модельных и прикладных задач с точными решениями и результатами других исследователей.

Научная новизна работы

На основе МГЭ в сочетании с преобразованием Лапласа развита численная методика для решения трехмерных динамических задач теории упругости и вязкоупругости в случае заданных на поверхности тела нестационарных силовых, кинематических или силовых и кинематических условий. Методика позволяет организовать эффективный процесс определения неизвестных граничных перемещений и поверхностных сил. Реализован алгоритм учета физической симметрии задачи, не приводящий к смене типа краевой задачи и локальный алгоритм вычисления на границе тензора напряжений, не использующий операцию дифференцирования.

В трехмерной постановке проведен анализ нестационарного напряженного состояния ряда вязкоупругих тел и сред. Дано уточнение прежнего представления о волновых картинах для соответствующих задач.

Практическая значимость результатов исследования состоит в детальной методической проработке ГЭ-схемы прямого подхода метода ГИУ в сочетании с преобразованием Лапласа и создании ГЭ программного обеспечения для расчета полей перемещений и напряжений в изотропных трехмерных телах и средах, находящихся под действием нестационарных силовых и кинематических импульсов; решении динамических задач трехмерной изотропной теории упругости и вязкоупругости.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Методика численного решения систем ГИУ прямого подхода и соответствующее программное обеспечение для расчета нестационарных полей перемещений и напряжений в трехмерных изотропных вязкоупругих телах и средах.
2. ГЭ-решение и анализ следующих задач:
 - торцевой удар по призматическому вязкоупругому телу с жестко закрепленным концом;
 - действие давления на кубическую полость в вязкоупругом пространстве;
 - действие давления на границе сферической полости, расположенной внутри вязкоупругого куба;
 - растяжение вязкоупругой плиты с цилиндро-коническим отверстием;
 - действие давления на внутреннюю поверхность корпуса клапана (соединение двух толстостенных вязкоупругих цилиндров).

Апробация работы

Результаты диссертационной работы докладывались на II Всероссийской конференции «Организационные, философские и технические проблемы современных машиностроительных производств» (Рузаевка, 2001); IX Нижегородской сессии молодых ученых (Саров, 2004); Всероссийской научной конференции, посвященной памяти профессора А.И. Весницкого (Н.Новгород, 2004); VI international congress on mathematical modeling (Nizhny Novgorod, Russia, 2004); IX Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Н.Новгород, 2006 г.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-10].

Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы из 132 наименований. Общий объем диссертации составляет 163 страницы машинописного текста.

На различных этапах работа поддерживалась грантом РФФИ (код 94.01-01178); грантами Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ (№ 96-15-98156 1997-1999 гг.; № 00-15-99029 2000-2002 гг.; № НШ-1136.2003.8 2003-2004 гг.; № НШ-6391.1006.8 2006-2007 гг.); ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития науки и техники», мероприятие 1.12. Развитие системы ведущих научных школ как среды генерации знаний и подготовки научно-педагогических кадров высшей квалификации (XII очередь – Научные школы). Приоритетное направление «Энергетика и энергосбережение» (гос. контракт № 02.445.11.7044, шифр «РИ-112/001/404» 2005 г.); программой Минобразования и науки РФ «Развитие потенциала высшей школы (2006–2008 гг.) проект РНП.2.1.2.3556.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение содержит краткий обзор работ по применению МГЭ к решению динамических трехмерных задач теории упругости и вязкоупругости; обоснование актуальности темы диссертационной работы; формулировки целей работы и основных положений, которые выносятся на защиту.

МГЭ в его нынешнем виде появился в работе Н.И. Мухелишвили в 1937 году, а затем в 1940 году в работе А.Я. Горгидзе и А.К. Рухадзе. Терминами ГИУ и МГЭ соответствующие подходы обязаны работам Т.А. Cruse (1973), Р.К. Venerjee, С.А. Brebbia, R. Butterfield, J. Domingues (1977). Математическому обоснованию – работам В.Д. Купрадзе, которые стали возможны благодаря результатам А. Зигмунда, А. Кальдерона, С.Г. Михлина по теории сингулярных интегральных операторов.

Первыми применили ГИУ для упругодинамики Т.А. Cruse и F.J. Rizzo (1968). Использовалось интегральное преобразование Лапласа. Соответствующая формулировка ГИУ с интегральным преобразованием Фурье была представлена J. Dominguez (1978). Первая формулировка граничного элемента непосредственно во временной области была представлена W.J. Mansur (1983) и использовалась для скалярного волнового уравнения и упругодинамики с нулевыми начальными условиями. Обобщение этой формулировки для начальных условий отличных от нуля было представлено Н. Antes (1985). Сравнительное исследование разных формулировок приводится в работе G.D. Manolis (1983).

Сложившиеся два подхода при решении краевых задач для волнового уравнения, двумерной теории упругости – прямой с решением задачи непосредственно во временной области и подход с использованием обратного преобразования при решении задачи в

изображениях по Лапласу (Фурье) – были перенесены на решение трехмерных задач. В большинстве случаев используется метод с применением преобразования Лапласа. Эта формулировка развивается благодаря применению принципа соответствия задач упругости и вязкоупругости. В работе G.V. Naraynan, D.E. Beskos были проанализированы восемь различных методов обращения преобразования Лапласа, и метод Дурбина был выбран как наиболее подходящий для решения нестационарных динамических задач.

Распространению подхода, использующего преобразование Лапласа по временной переменной на численное решение трехмерных динамических задач теории упругости, способствовала работа И.З. Ройтфарба и Чу Вьет Кыонг (1976). Первая численная методика решения трехмерных нестационарных динамических задач изотропной теории упругости с использованием шаговой процедуры была детально разработана и доведена до устойчивых численных результатов в 80-е годы в работах А.Г. Угодчикова, Н.М. Хуторянского с соавторами (Л.А. Игумнов, О.П. Николаев, В.В. Турилов). Среди первых работ по численному анализу трехмерных упругодинамических задач этого направления можно назвать работы D.L. Karabalis, D.E. Beskos, S. Ahmad, P.K. Banerjee.

В дальнейшем применением МГЭ к трехмерным динамическим задачам упругости и вязкоупругости занимались Ш.Н. Айтиалиев, Л.А. Алексеева, В.А. Бабешко, И.М. Буравлев, А.О. Ватульян, Н.Б. Жанбырбаев, Л.А. Игумнов, А.Н. Соловьев, Н.М. Хуторянский, Н. Antes, D.E. Beskos, H.B. Coda, J. Dominguez, L. Gaul, L.J. Gray, M. Kogl, G.D. Manolis, M. Marrero, A.D. Mesquita, G. H. Paulino, M. Shanz, A. Sutradhar и др.

В главе I дана постановка задачи и описано построение ГИУ прямого подхода в сочетании с интегральным преобразованием Лапласа.

Первые вязкоупругие теории были предложены в 1874 Больцманом и Мейером для изотропных вязкоупругих сред. В настоящее время в вязкоупругости доминируют два подхода описания зависимости между напряжениями и деформацией: теория Больцмана–Вольтера – записывается интегральное уравнение наследственного типа и теории Мейера дифференциальных моделей.

В первом параграфе рассматривается однородное тело Ω в трехмерном евклидовом пространстве R^3 с декартовой системой координат $Ox_1x_2x_3$. Границу тела обозначим через Γ . Предполагается, что Ω является изотропным вязкоупругим телом. Вводятся обозначения для параметров материала: ρ – плотность материала, $\lambda(t)$ и $\mu(t)$ – функции Ламе материала. Динамическое состояние тела Ω описывается следующей системой дифференциальных уравнений в перемещениях:

$$\mu(t) * \Delta u(x, t) + (\lambda(t) + \mu(t)) * \text{grad div } u(x, t) = \rho \ddot{u}(x, t), \quad (1)$$

где символ "*" означает свертку Стилтгеса по времени t . В уравнениях (1) $u(x, t)$ – вектор перемещений точки $x = (x_1, x_2, x_3)$ в момент времени t . Конкретный вид функций $\mu(t)$ и $\lambda(t)$ определяется вязкоупругой моделью материала. Рассматривается случай пропорциональных функций памяти и введем обозначения $G_1(t) = rc_1^2(t)$, $G_2(t) = rc_2^2(t)$. Функции памяти классических вязкоупругих моделей (Максвелла, Кельвина–Фойгта, стандартного вязкоупругого тела) имеют вид:

$$G(t) = G(0)e^{-gt_+}, \quad J(t) = J(0)(1 - e^{-bt_+}), \quad G(t) = G(\infty) + (G(0) - G(\infty))e^{-gt_+},$$

где g и b величины, обратные характерным временам релаксации и ползучести соответственно.

Модифицированная теория вязкоупругости предполагает использование наследственных ядер следующего типа:

$$k(t) = j(t) + \frac{1}{4}j(t) * j(t).$$

В работе рассматриваются два случая таких ядер:

$$j(t) = k \ln \frac{1}{t_+}, \quad j(t) = k \frac{t_+^{-a}}{\Gamma(1-a)}, \quad 0 < a < 1.$$

Вводится вектор напряжений $t_n(x, t)$ в точке x на элементарной площадке с единичной нормалью $n(x)$ (если $x \in \Gamma$, то под $n(x)$ понимается единичный вектор внешней по отношению к Ω нормали к границе Γ):

$$t_n(x, t) \equiv T_{n(x)}u(x, t) = n(x)\lambda(t) * \operatorname{div} u(x, t) + 2\mu(t) * \frac{\int u(x, t)}{\int n(x)} + \mu(t) * [n(x) \times \operatorname{rot} u(x, t)]. \quad (2)$$

Рассматриваются следующие типы граничных условий для Ω :

$$u_l(x, t) = f_l(x, t), \quad x \in \Gamma^u; \quad t_l(x, t) = g_l(x, t), \quad x \in \Gamma^s; \quad t_l(x, t) = \alpha_{lj}(x)u_j(x, t), \quad x \in \Gamma^r \quad l = \overline{1, 3}.$$

Здесь Γ^u и Γ^s – части границы Γ тела Ω , по которым заданы соответственно перемещения и поверхностные силы; Γ^r – граница, по которой задана упругая связь. Функции $f_l(x, t)$ и $g_l(x, t)$ являются заданными функциями координат и времени, коэффициенты α_{lj} характеризуют свойства упругой связи. В дальнейшем интегральные представления рассматриваются в терминах преобразования Лапласа с параметром p . Для расчета нестационарных задач в явном времени заключительным является этап обратного преобразования Лапласа.

Во втором параграфе дано описание метода решения: ГИУ с совместным применением интегрального преобразования Лапласа. Вектор перемещений во внутренних точках области связан следующим образом с граничными значениями перемещений и усилий (формула Сомильяны):

$$\bar{u}_l(x, p) = \int_{\Gamma} U_{lj}(x, y, p) \bar{t}_j(y, p) d_y S - \int_{\Gamma} T_{lj}(x, y, p) \bar{u}_j(y, p) d_y S, \quad (3)$$

$$l = 1, 2, 3, \quad x \in \Omega.$$

Здесь U_{lj} и T_{lj} – соответственно компоненты тензоров фундаментальных и сингулярных решений уравнения (1). Тензор T выражается через тензор U с помощью оператора напряжений T_n :

$$T(x, y, p) = [T_{n(x)} U(x, y, p)]^T,$$

где верхний значок “ T ” означает транспонирование.

Формула Сомильяны (3) дает следующее ГИУ:

$$c_{lj}(x) \bar{u}_j(x, p) + \int_{\Gamma} T_{lj}(x, y, p) \bar{u}_j(y, p) d_y S = \int_{\Gamma} U_{lj}(x - y, p) \bar{t}_j(y, p) d_y S, \quad (4)$$

$$l = 1, 2, 3, \quad x \in \Gamma.$$

Интеграл в левой части (4) является сингулярным, то есть понимается в смысле главного значения по Коши, а коэффициент при внеинтегральном члене определяется регуляризацией ГИУ, размером области Ω и формой границы Γ .

ГИУ (4) позволяет разработать эффективную численную методику для определения неизвестных амплитуд граничных перемещений и поверхностных сил. Решением исходной начально–краевой задачи будет вектор–функция $u(x, t)$, полученная путем применения к решению (3), (4) обратного преобразования Лапласа.

В **главе II** описана методика численного решения и приведены результаты тестовых экспериментов.

МГЭ сформировался в современный универсальный численно-аналитический метод благодаря усилиям целого ряда исследователей: С.М. Алейникова, А.Я. Александрова, В.М. Александрова, Л.А. Алексеевой, Ю.П. Артюхина, Ю.Л. Бормота, Э.С. Венцеля, Ю.В. Верюжского, С.П. Гавели, Р.В. Гольдштейна, Д.П. Грибова, Б.М. Зиновьева, Ю.Д. Копейкина, М.И. Лазарева, А.Н. Линькова, В.М. Лиховцева, М.Д. Мартыненко, Ю.А. Мельникова, С.Е. Михайлова, Н.Ф. Морозова, О.П. Николаева, А.О. Ватульяна, М.В. Паукшто, П.И. Перлина, Б.Е. Победри, И.З. Ройтфарба, А.Н. Соловьева, В.И. Тараканова, В.В. Турилова, А.Г. Угодчикова, Н.М. Хуторянского, Г.И. Яха, E. Alarcon, H. Antes, P.K. Banerjee, A.A. Becker, D.E. Beskos, G. Bonnet, R. Butterfield, C.A. Brebbia, T.A. Cruse, J. Domingues, L. Gaul, G.C. Hsiao, M.A. Jaswon, N. Kamiya, S. Kobayashi, M. Kogl, J.C. Lachat, W.J. Mansur, G. de Mey, D. Nardini, K. Onishi, F.J. Rizzo, M. Schanz, R.P. Shaw, M. Symm, M. Tanaka, J.C.F. Telles, W.S. Venturini, J.O. Watson W.L. Wendland, A. Wexler, L.C. Wrobel, и др.

Чтобы ввести ГЭ-дискретизацию, рассматривается регуляризованное по П.И. Перлину ГИУ. Базовый процесс ГЭ-дискретизации состоит в разбиении поверхности на ГЭ

(рис. 1), каждый из которых отображается на базовый элемент (рис. 3). Треугольные элементы (рис. 2) рассматриваются как вырожденные четырехугольники.

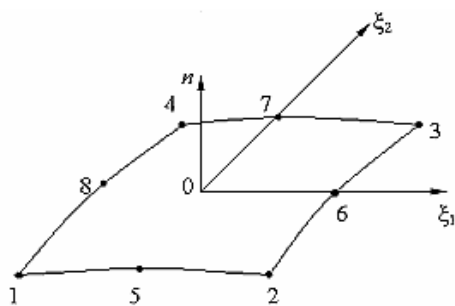


Рис. 1

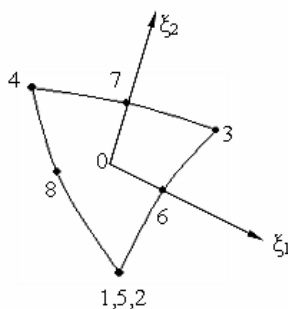


Рис.2

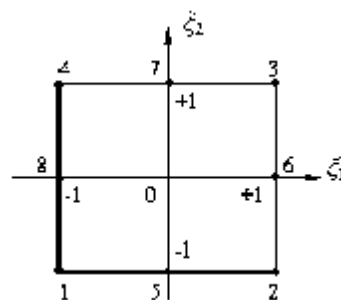


Рис. 3

Элемент границы отображается на свой базовый элемент с помощью геометрических узлов границы области и биквадратичных функций формы. Естественный базис, метрический тензор и единичная нормаль ГЭ определяются однозначно. Неизвестные граничные поля интерполируются через узловые значения: перемещения через угловые узлы, а поверхностные силы выбираются постоянными на элементе. Коллокация ГИУ проводится во всех неизвестных узлах ГЭ-сетки. Решение сводится к системе линейных алгебраических уравнений. Матрица системы для однородного тела полностью заполненная и несимметричная. Элементы матрицы получаются с помощью схем численного интегрирования, выбираемых в зависимости от того, каким является интеграл – несингулярным или сингулярным. Несингулярные интегралы получаются, когда коллокационная точка не принадлежит элементу, что позволяет применять стандартные квадратуры гауссовского типа. В силу поведения фундаментальных и сингулярных решений варьируется количество используемых точек Гаусса в зависимости от расстояния между коллокационной точкой и элементом (относительно характерной длины элемента). Для более точного вычисления коэффициентов дискретных аналогов ГИУ использован адаптивный алгоритм численного интегрирования, когда происходит автоматическое подразбиение ГЭ (рис. 4) и соответствующего базового элемента (рис. 5).

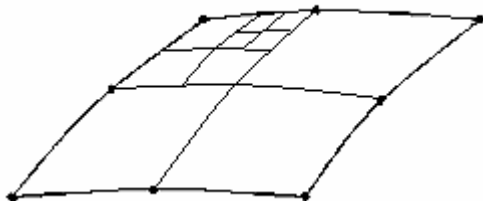


Рис. 4

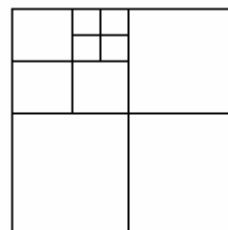


Рис. 5

Сингулярные интегралы появляются в случаях попадания коллокационных точек на элемент интегрирования. Тогда с помощью преобразования в параметрических координатах (Лаша-

Ватсона и Даффи) интегралы сводятся к несингулярным: соответствующие треугольные элементы (рис. 6 и рис. 7) отображаются на базовый элемент в плоскости (h_1, h_2)

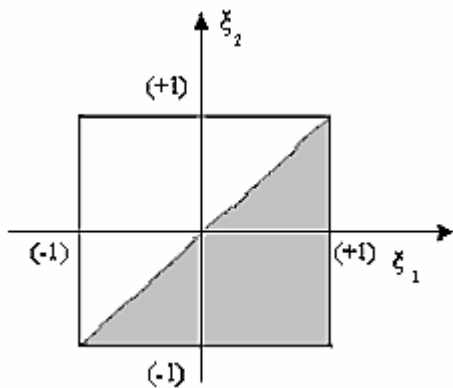


Рис. 6

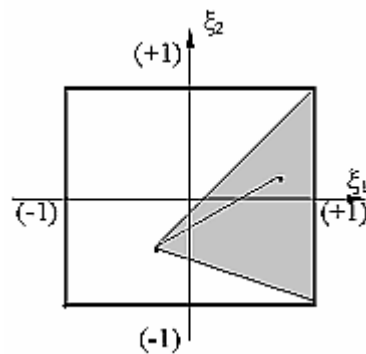


Рис. 7

Итоговая система линейных алгебраических уравнений решается методом Гаусса. Для численного обращения преобразования Лапласа используется алгоритм Дурбина. Для вычисления тензора напряжений на границе тела используется локальный способ, причем дифференцирование не требуется, а используется теорема Стокса.

Для демонстрации возможностей ГЭ-методики приводятся результаты расчета тестовых задач теории упругости и вязкоупругости. МГЭ-решения сравниваются с аналитическими решениями и с результатами других авторов.

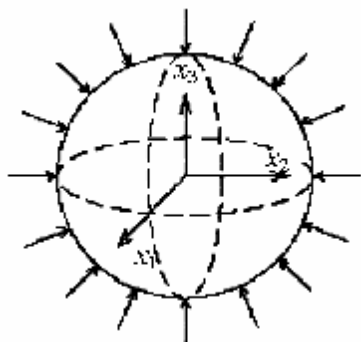


Рис. 8

Действие нестационарной нагрузки на поверхности сферической полости и шара. Сфера (рис. 8) аппроксимирована 384 ГЭ и ее ГЭ-сетка построена в результате проекции с равномерной сетки куба, вписанного в сферу. Выбраны три плоскости симметрии ($x_1=x_2=x_3=0$). Расчеты проведены для следующих видов нагрузок: $p=t$ при $t \in [0,1]$; $p=1$ при $t>1$ и $p=t$ при $t \in [0,1]$; $p=2-t$ при $t \in [1,2]$.

Для модели стандартного вязкоупругого тела длительные модули в четыре раза меньше мгновенных.

На рис. 9, 10 приведены кривые спектральной функции и функции перемещений для упругого случая задачи о шаре соответственно. Форма нагрузки $p=t$ при $t \in [0,1]$; $p=1$ при $t>1$. На рис. 11, 12 представлены аналогичные кривые для модели стандартного вязкоупругого тела, причем кривая 1 соответствует $g = 0,05$; кривая 2 – $g = 0,1$; кривая 3 – $g = 1$; кривая 4 – $g = 100$. На рис. 12 виден процесс перестройки волновых картин перемещений при переходе свойств среды с мгновенных модулей на длительные.

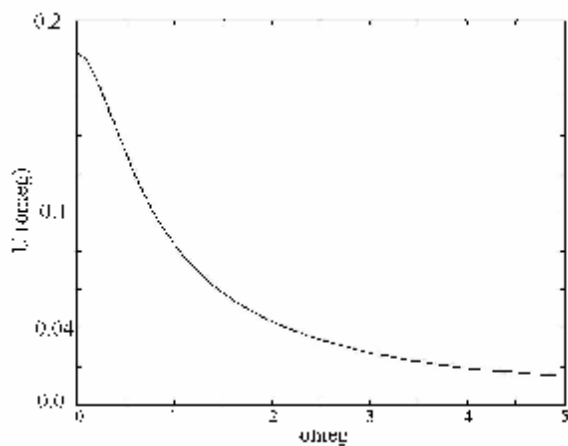


Рис. 9

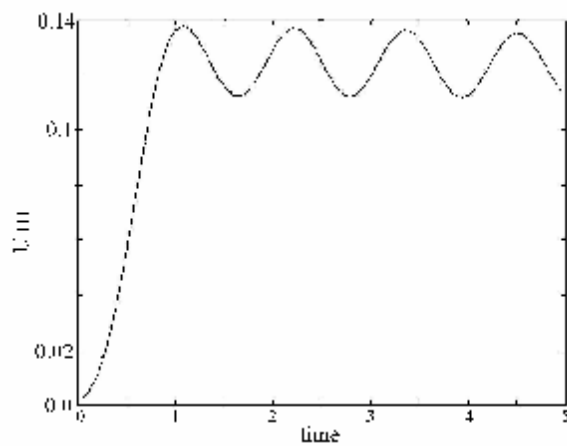


Рис. 10

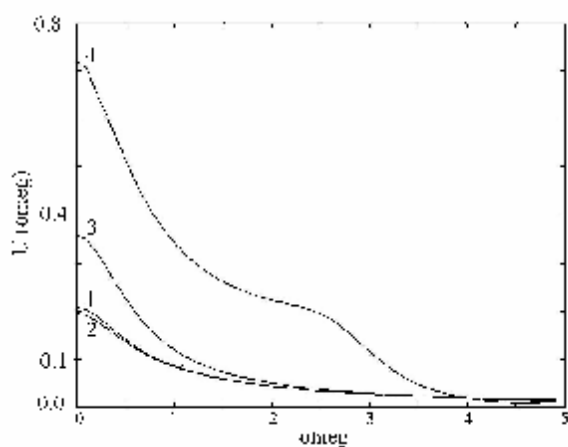


Рис.11

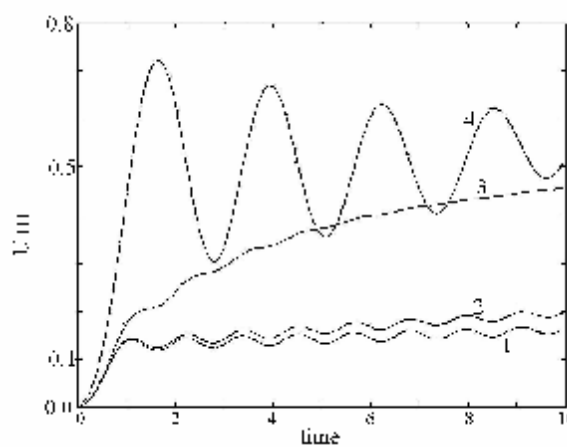


Рис. 12

Результаты численных экспериментов для шара сравнивались с расчетами других авторов. Результаты численных экспериментов для сферы сравнивались с точными решениями. Методика продемонстрировала высокую точность – ошибка численных результатов и разброс решений по граничным элементам меньше 1%.

В главе III приведены ГЭ-решения прикладных задач. При решении задач в приведенных величинах предполагалось, что $t = c_2 t_{\text{реал}} a^{-1}$, $p = p_{\text{реал}} p_0^{-1}$, $u = E u_{\text{реал}} / p_0 a$, где a – характерный геометрический размер, p_0 – максимальная амплитуда нагрузки.

Для задачи о торцевом ударе (рис. 13) по призматическому телу (3×1×1м) с жестко закрепленным концом на рис. 14, 15 показаны результаты решения в упругом случае, причем величина силы $p = 1 \text{ Н/м}^2$, плотность $r = 7850 \text{ кг/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0$, модуль Юнга $E = 2,11 \cdot 10^{11} \text{ Па}$. Использована равномерная сетка с 224 ГЭ. Кривая 2 соответствует ГЭ-решению, а кривая 1 – аналитическому решению. Достигнутая точность выше имеющихся результатов других авторов.

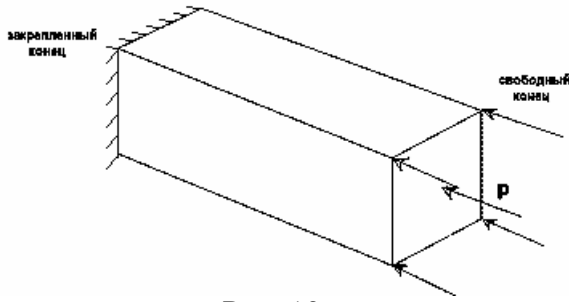


Рис. 13

Поведение перемещений для стойко-вязкого тела продемонстрировано на рис. 16, 17 (для кривой 1 $b = 0,05$; для кривой 2 $b = 0,5$; для кривой 3 $b = 3$; для кривой 4 $b = 100$; для кривой 5 $b = 500$). С уменьшением характерного времени ползучести t_e или ростом $b = 1/t_e$ материал все более

отчетливо начинает вести себя как упругий материал на длительных модулях. При $b \rightarrow \infty$ ($t_e \rightarrow 0$) получаем чисто упругий случай.

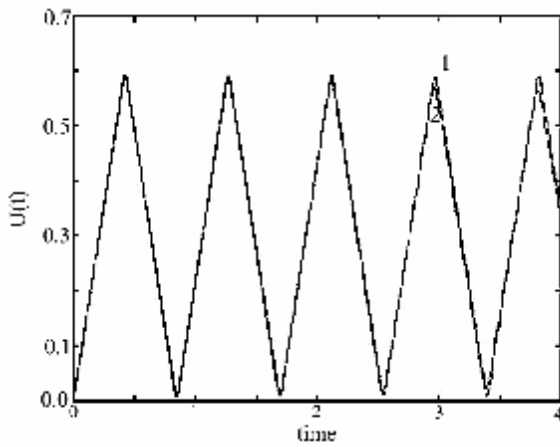


Рис. 14

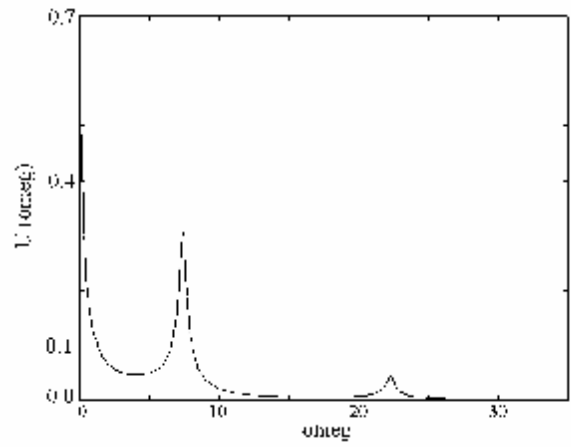


Рис. 15

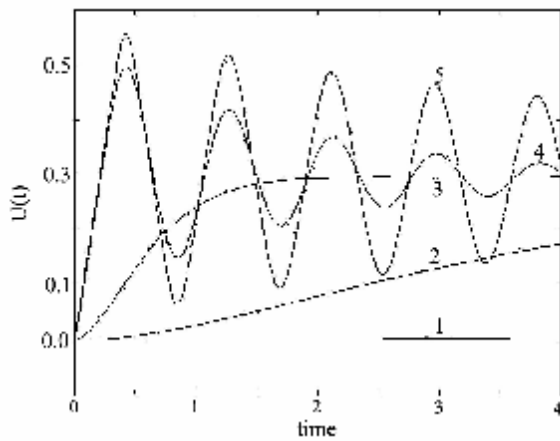


Рис. 16

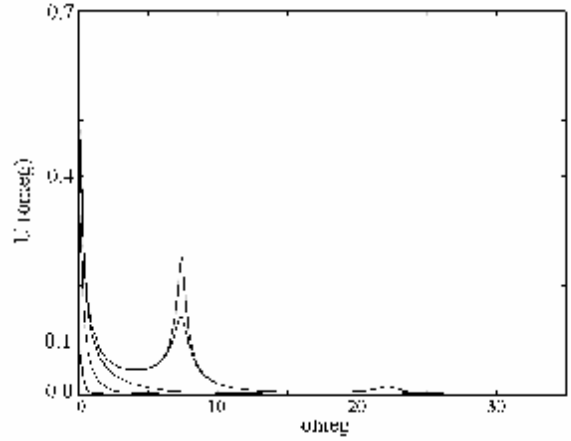


Рис. 17

Поведение перемещений для вязкоупругого тела с мгновенной упругостью продемонстрировано на рис. 18, 19 (для кривой 1 $\gamma = 0,01$; для кривой 2 $\gamma = 0,3$; для кривой 3 $\gamma = 10$; для кривой 4 $\gamma = 100$). С уменьшением характерных времен релаксации t_s или ростом $g = 1/t_s$ материал все более отчетливо начинает вести себя как упругий на длительных модулях. На рис. 18 показано, как перестраивается картина отклика в перемещениях. Отклик

перемещений на длительных модулях имеет и большую амплитуду, и большой период колебаний.

Перемещения для модифицированной степенной модели показаны на рис. 20, 21 (при $k=17$ для кривой 1 $\alpha=0,3$; для кривой 2 $\alpha=0,7$; для кривой 3 $\alpha=0,95$). С приближением наследственного ядра к ядру Больцмана отклик и качественно и количественно описывает упругий отклик.

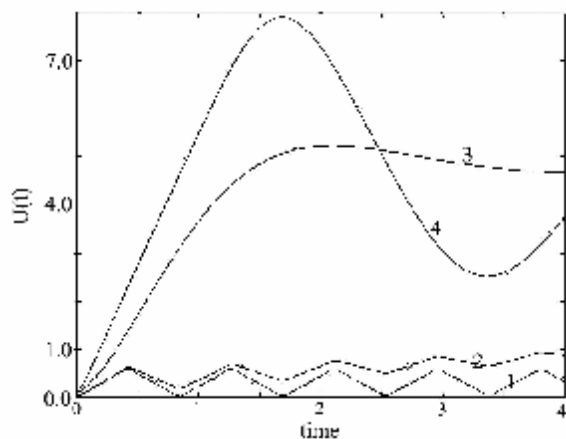


Рис. 18

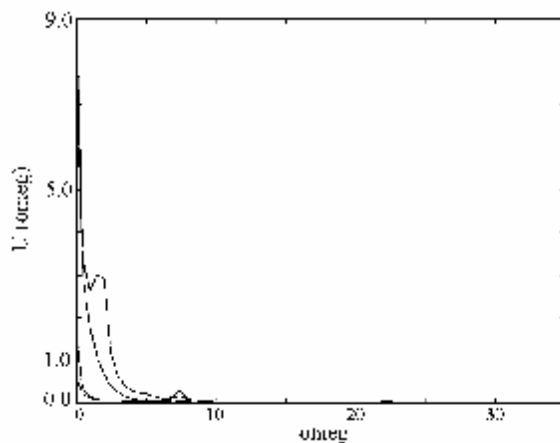


Рис. 19

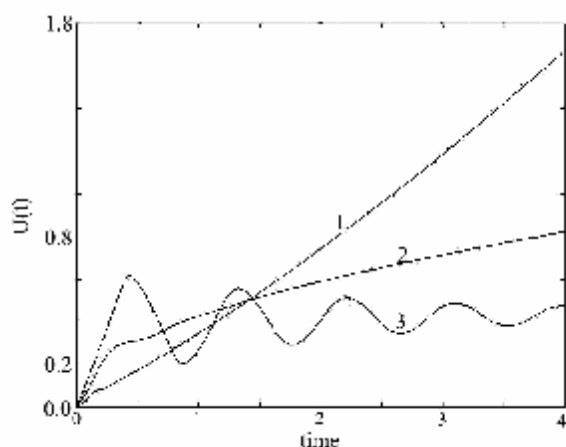


Рис. 20

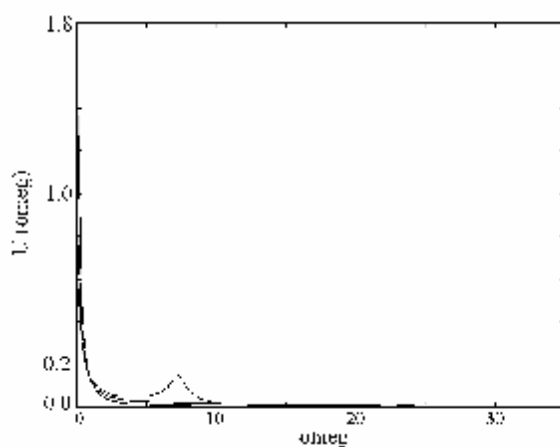


Рис. 21

Соответствующий отклик напряжений в упругом случае, полученный для равномерной ГЭ-сетки с 224 элементами представлен на рис. 22. На аналитическое решение (кривая 1) наложено решение, полученное в исследованиях других авторов на основе метода Lubich (кривая 3), построенное на адаптированной сетке из 324 треугольных ГЭ, и полученное в диссертации (кривая 2), построенное на равномерной сетке из 224 четырехугольных ГЭ. Влияние вязкости на отклик напряжений, снятых с жестко закрепленного конца представлено на рис. 23–25 соответственно для моделей Кельвина-Фойгта (для кривой 1 $\beta=0,05$; для кривой 2 $\beta=3$; для кривой 3 $\beta=100$; для кривой 4 $\beta=500$), стандартного вязкоупругого тела (для кривой 1 $\gamma=0,01$; для кривой 2 $\gamma=0,3$; для кривой 3 $\gamma=10$; для кривой 4 $\gamma=100$) и степенной модели (при $k=17$ для кривой 1 $\alpha=0,3$; для кривой 2

$\alpha=0,7$; для кривой 3 $\alpha=0,95$). Тенденция, выявленная на картинах полей перемещений, прослеживается и в картинах полей напряжений.

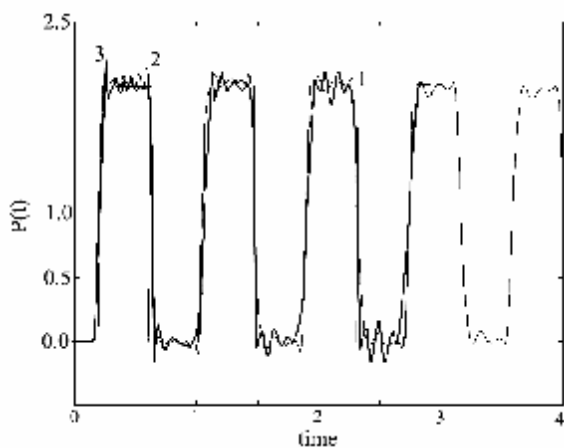


Рис. 22

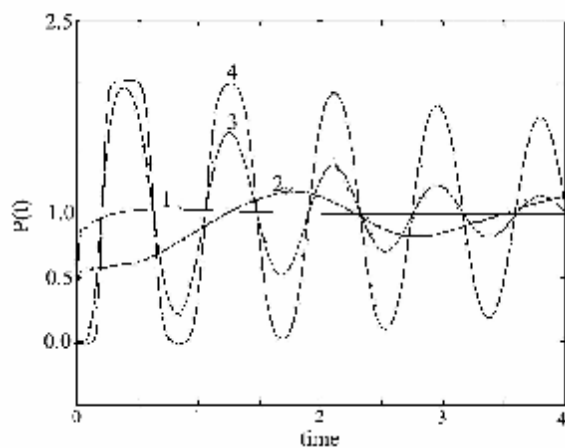


Рис. 23

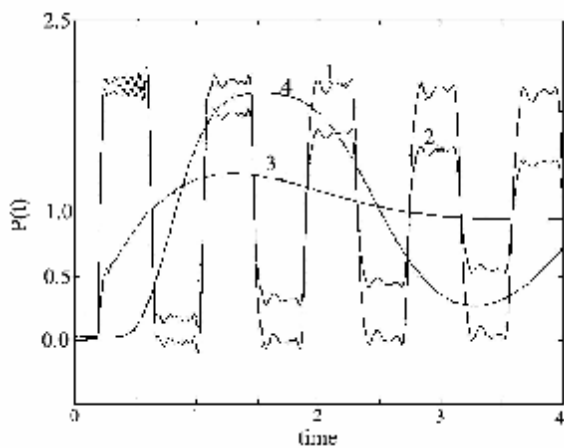


Рис. 24

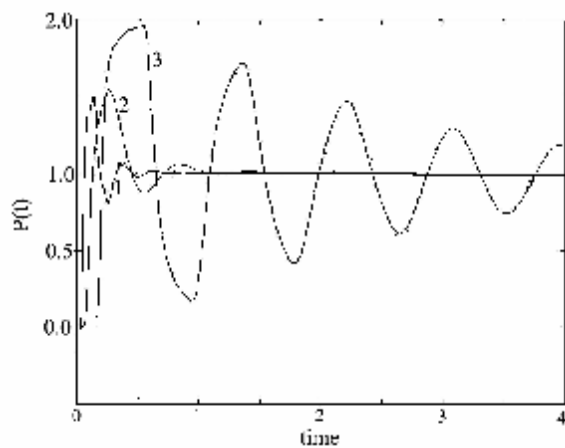


Рис. 25

Решение задачи о давлении на кубическую полость с ребром l (рис. 26) продемонстрировано на рис. 27–30. Интенсивность давления $p(t)=t$, $0 \leq t \leq 1$, $p(t) = 1, t \geq 1$.

Коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$.

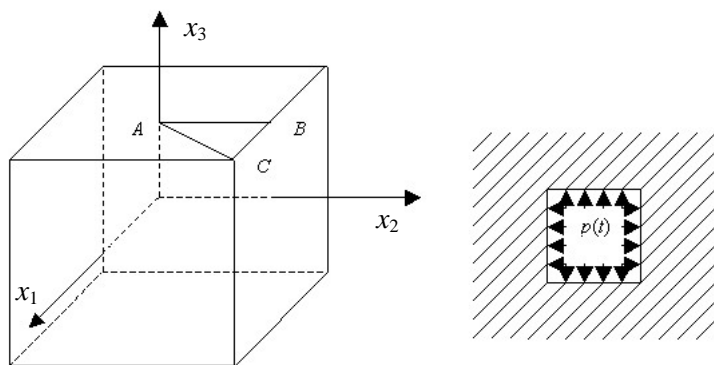


Рис.26

Параметры вязкоупругих моделей выбраны следующие: Максвелла $\gamma = 0,05$; Кельвина–Фойгта $\beta = 5$; стандартного вязкоупругого тела $\gamma = 0,05$ и длительные модули в четыре раза меньше мгновенных; логарифмическая $k = 1$; степенная $k = 1, \alpha = 0,9$. Кроме того, полагалось, что $c_2^0 = 1, r = 1$. Граница полости разбита на 1176 прямоугольных ГЭ. Выбраны три плоскости симметрии ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$). Приведены графики перемещений u_3 граничных точек полости

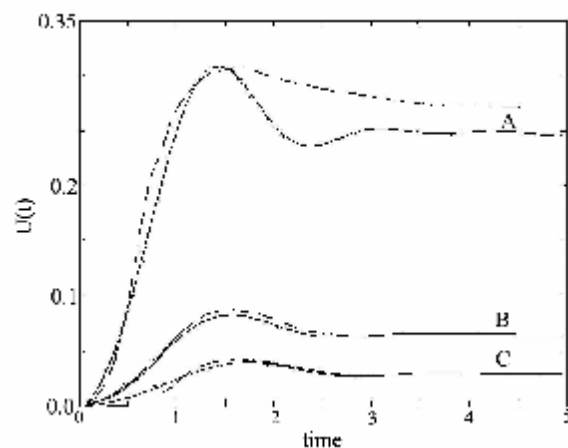


Рис. 27

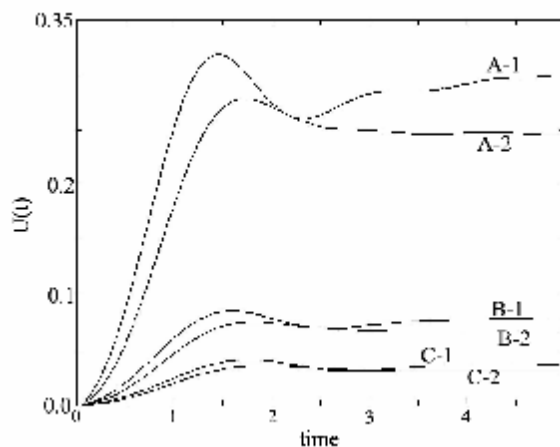


Рис. 28

при $a = 2(1 + \nu)l$. Буквами отмечены кривые, относящиеся соответственно к точкам A, B, C, изображенным на рис. 26. На рис. 27 приведены графики для упругой модели. На рис. 28 кривые 1 соответствуют модели Максвелла, кривые 2 – модели Кельвина–Фойгта. На рис. 29 кривые 1 соответствуют степенной модели, кривые 2 – модели стандартного вязкоупругого тела. На рис. 30 приведены кривые для логарифмической модели. Результаты других авторов приведены в виде пунктирных линий. Для упругой модели, а также моделей Максвелла, Кельвина–Фойгта и стандартного вязкоупругого тела с течением времени граничные

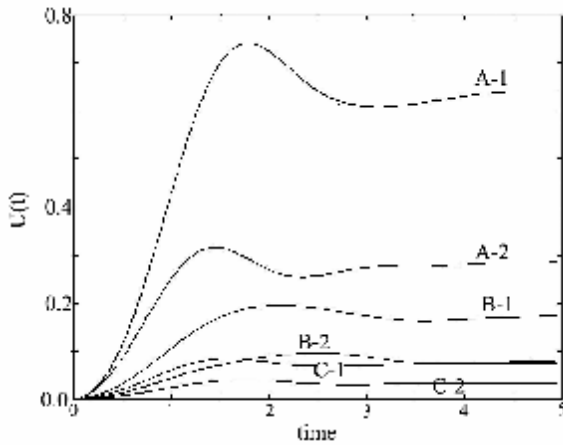


Рис. 29

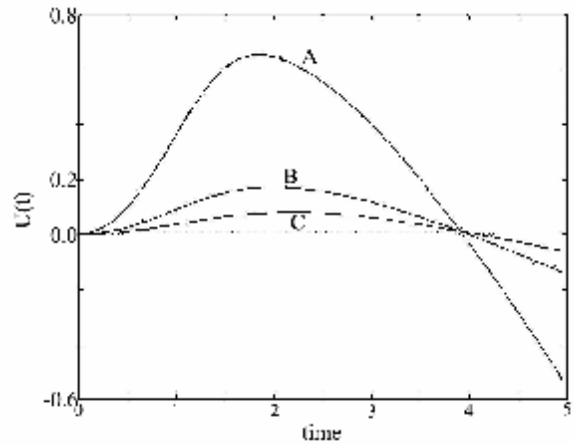


Рис. 30

соответствующим статическим решениям. Использование наследственного ядра в виде слабосингулярной модели может привести как к значительным количественным отличиям вязкоупругих полей перемещений от упругих (степенная модель), так и к значительным качественным и количественным отличиям (логарифмическая модель): начальный этап деформирования повторяет картину поля перемещений для случая степенной модели, но отсутствует статический этап деформирования. Полученные результаты для упругого случая позволяют говорить, что достигнутая точность расчетов выше, чем это было получено на основе шаговой МГЭ-схемы другими авторами.

Решение задачи о действии давления на границе сферической полости, расположенной внутри вязкоупругого куба (рис. 31) продемонстрировано на рис. 32–36.

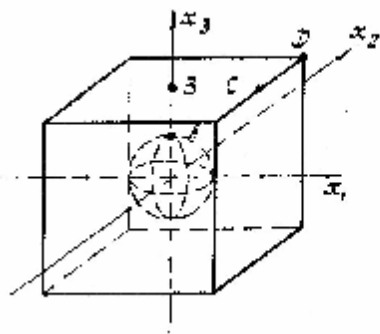
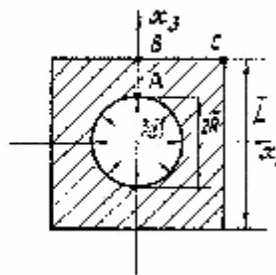


Рис. 31



Взята интенсивность давления $p(t)=t, 0 \leq t \leq 1, p(t)=1, t \geq 1$ и безразмерные параметры задачи $L=2, R=0,5, c_1=2$. Выбраны три плоскости симметрии ($x_1=x_2=x_3=0$). Вся ГЭ-сетка состоит из 1200 элементов.

Параметры вязкоупругих моделей

такие же как в предыдущей задаче. На рис. 32 представлены графики u_3 для упругой модели в точках A и C. На рис. 33 представлены графики u_3 в точках B и D. Наибольшие смещения имеет центральная точка B, а наибольшую амплитуду колебаний точка D. На рис. 34, 35 кривые 1 соответствуют степенной модели, кривые 2 – модели стандартного вязкоупругого тела. На рис. 36 приведены кривые для логарифмической модели. Решение упругой задачи,

полученное другими авторами методом гранично-временных элементов, приведено в виде пунктирных линий.

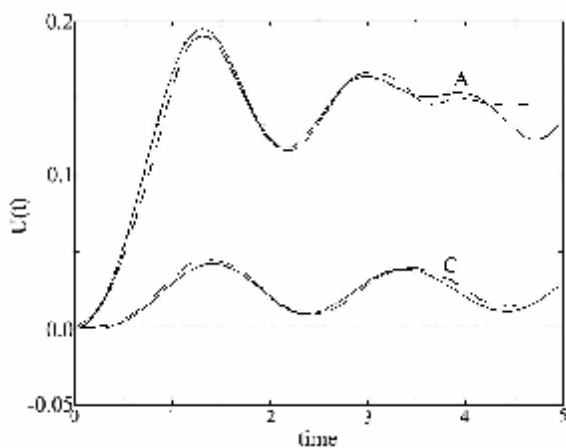


Рис. 32

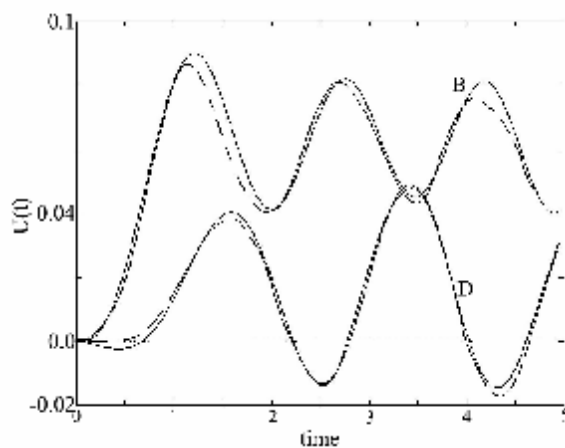


Рис. 33

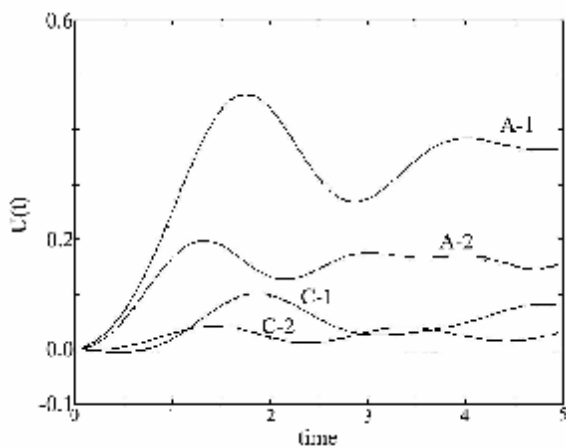


Рис. 34

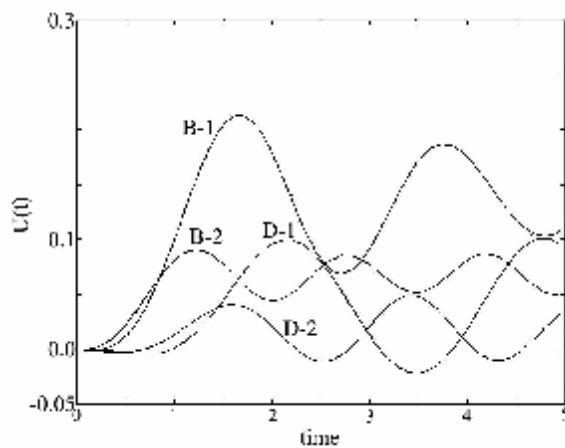


Рис. 35

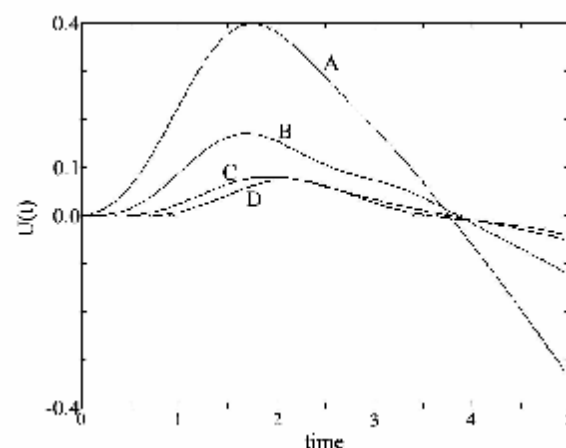


Рис. 36

До момента отражения волн от граней куба перемещения совпадают с аналитическими значениями перемещений в бесконечной среде от действия нормального давления на границе сферической полости. Использование логарифмической модели и качественно и количественно изменило процесс деформирования, притом, что начальный этап деформирования повторил случай степенной модели. Сравнение результатов для упругого случая показало,

что с увеличением временного интервала метод гранично-временных элементов накапливает ошибку (результаты для точки *A*) и происходит усреднение расчетного результата (интервал приведенного времени от 4,5 до 5).

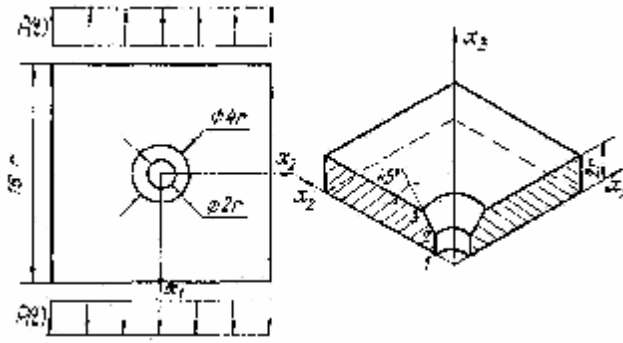


Рис. 37

Решение задачи о растяжении плиты с цилиндро-коническим отверстием приведено на рис. 38–41. Нагрузка равномерно распределена по двум противоположным торцам плиты. Размеры конструкции выражены через радиус $r = 0,01$ м цилиндрической части отверстия и проставлены на рис. 37. Закон изменения во времени интенсивности нагрузки имеет вид

$$p(t) = \frac{p^*}{t^*} t, \quad 0 \leq t \leq t^*, \quad p(t) = p^*, \quad t \geq t^*, \quad \text{где } t^* = 40 \text{ мкс}, \quad p^* = 10^7 \text{ Па}.$$

Расчеты проведены для плиты со следующими характеристиками: плотность $\rho = 2,73 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; модуль сдвига $\mu = 2,75 \times 10^{10} \text{ Па}$. Выбраны две плоскости симметрии ($x_1 = x_2 = 0$). На всей поверхности тела построена сетка из 424 ГЭ. Имеется сравнение полученных результатов для упругого случая с результатами других авторов, полученными методом ГИУ в явном времени.

При решении вязкоупругой задачи выбраны следующие приведенные характеристики упругого материала $\nu = 0,375$; $\mu = 0,375$; $I = 0,75$, что соответствует приведенному $\nu = 0,057$.

Вязкоупругие свойства материала выбирались в рамках регулярных классических моделей (модель Максвелла, Кельвина–Фойгта, стандартного вязкоупругого тела), а также модифицированной степенной модели. На рис. 38 представлены результаты расчетов S_{11} в точке 2 для случая, когда свойства материала описываются моделью стандартного вязкоупругого тела, причем кривая 1 соответствует упругому случаю, кривая 2 – $g = 0,01$; кривая 3 – $g = 0,3$; кривая 4 – $g = 10$ и кривая 5 – $g = 100$. На рис. 39 представлены результаты расчетов S_{11} в точке 3, когда свойства материала описываются моделью стандартного вязкоупругого тела, причем кривая 1 соответствует упругому случаю. На рис. 40 представлены результаты расчетов u_1 в точке 3 для случая, когда свойства материала описываются моделью Кельвина–Фойгта, причем кривая 1 соответствует упругому случаю, кривая 2 – $b = 0,05$; кривая 3 – $b = 0,5$; кривая 4 – $b = 3$ и кривая 5 – $b = 100$. На рис. 41 представлены результаты расчетов u_2 в точке 3, причем кривая 1 соответствует упругой модели, кривая 2 – модели Максвелла ($\gamma = 0,08$), кривая 3 – модели Кельвина–Фойгта ($\beta = 100$), кривая 4 – модели стандартного вязкоупругого тела ($\gamma = 0,01$), кривая 5 – модифицированной степенной модели ($k = 17, \alpha = 0,95$).

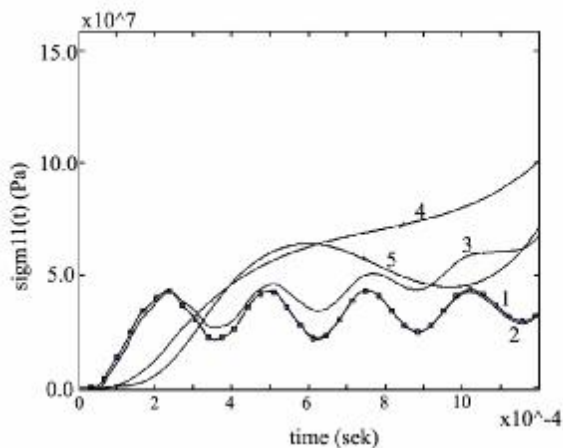


Рис. 38

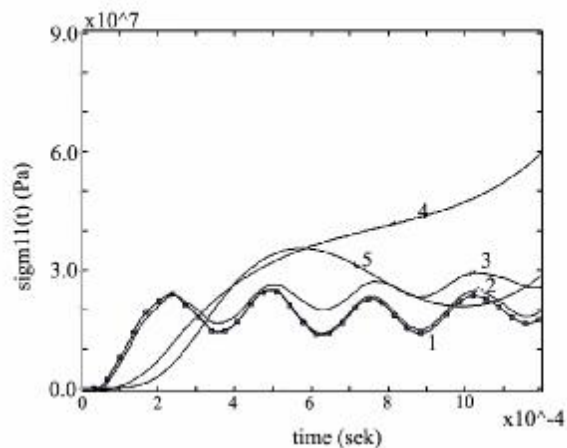


Рис. 39

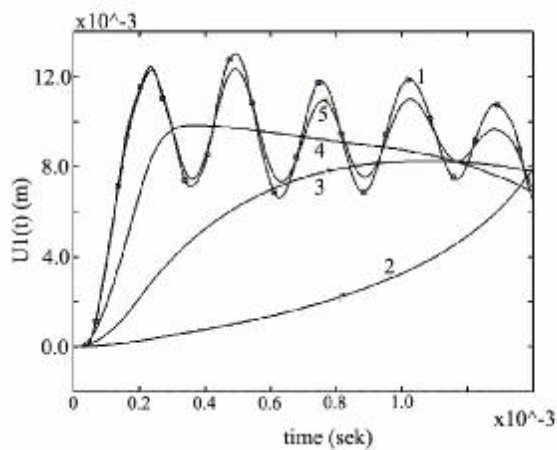


Рис. 40

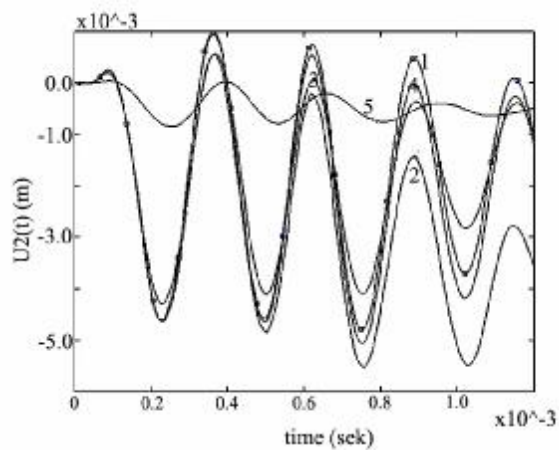


Рис. 41

На рисунках численно описан эффект перестройки волновых картин перемещений и напряжений при переходе с мгновенных модулей на длительные.

Решение задачи о действии давления на внутреннюю поверхность корпуса клапана

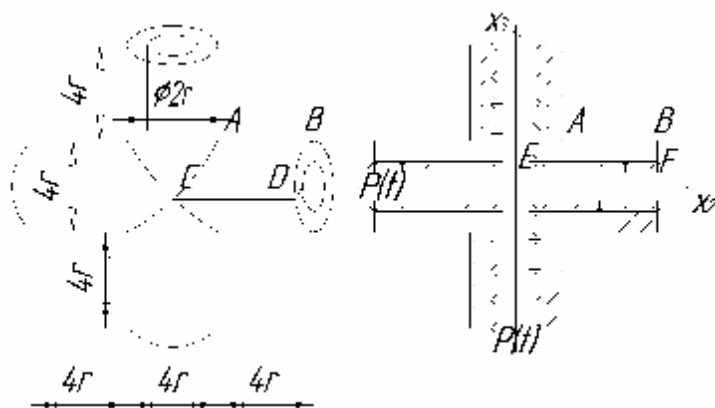


Рис. 42

(соединении двух толстостенных цилиндров) (рис. 42) представлено на рис. 43–45.

Полые толстостенные цилиндры пересекаются под прямым углом (рис. 42). Параметры материала конструкции выбраны следующие:
 плотность $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$;
 коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$;
 модуль сдвига $G = 8,08 \cdot 10^{10} \text{ Па}$.

Интенсивность давления изменяется по закону: $p(t) = t p^* / t^*$ при $0 \leq t \leq t^*$ и $p(t) = p^*$ при $t \geq t^*$, где t^* – время линейного нарастания $p(t)$ от нуля до максимального значения

$p^* = 10^7$ Па. Рассмотрены три значения параметра t^* : $t_1^* = 50$ мкс, $t_2^* = 100$ мкс и $t_3^* = 200$ мкс. Размеры конструкции выражены через радиус $r=0,05$ м внутренней цилиндрической поверхности и показаны на рис. 42. Выбраны четыре плоскости симметрии ($x_1 = x_2 = 0, x_1 = x_3, x_1 = -x_3$), что позволило в качестве основного фрагмента границы взять 1/16 часть поверхности конструкции, которая была разбита на 70 ГЭ. На всей поверхности тела построена сетка из 1120 элементов. Первоначально решалась статическая задача, а затем динамическая. На рис. 43 представлены графики изменения приведенного значения напряжения $\bar{S}_{11} = S_{11} / p^*$, во времени $\bar{t}^* = c_2 t^* / a$ ($c_2 = 3218,5$ м/с, $a = 0,160925$ м) в точке E для трех значений параметра \bar{t}^* (кривая 1 соответствует \bar{t}_1^* , кривая 2 – \bar{t}_2^* , кривая 3 – \bar{t}_3^*). Для всех трех видов нагружения прослеживается сложный колебательный процесс около статического значения $S_{11} = 6,4 \cdot 10^7$ Па. На рис. 44 изображены графики изменения напряжения \bar{S}_{11} для случая \bar{t}_2^* , когда выбрана модель стандартного вязкоупругого тела, причем параметры материала предыдущей упругой задачи взяты как длительные модули модели, а мгновенные модули в четыре раза больше (кривая 2 соответствует $g = 0,01$; кривая 3 – $g = 0,1$; кривая 4 – $g = 1$; кривая 5 – $g = 100$; кривая 6 – $g = 500$; кривая 1 соответствует упругому случаю). Графики на рис. 44 демонстрируют эффект перестройки волновых картин напряжений при переходе с мгновенных модулей на длительные. Результаты численных исследований в упругом случае сравнивались с результатами других авторов, полученные на основе МГЭ подхода в явном времени. На начальном этапе наблюдается хорошее совпадение.

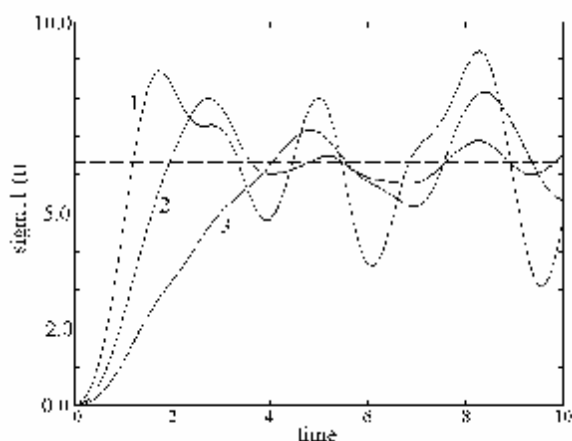


Рис. 43

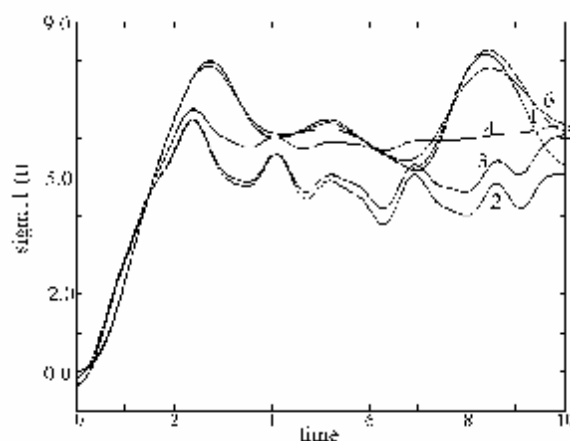


Рис. 44

Основные результаты и выводы

1. Развита методика численного решения систем ГИУ прямого подхода с применением интегрального преобразования Лапласа для расчета нестационарных полей перемещений и напряжений в трехмерных изотропных вязкоупругих телах. Создано ГЭ программное обеспечение.

2. Получены ГЭ-решения и проведен анализ тестовых и прикладных задач, в том числе:
 - торцевой удар по призматическому вязкоупругому телу с жестко закрепленным концом;
 - действие давления на кубическую полость в вязкоупругом пространстве;
 - действие давления на границе сферической полости, расположенной внутри вязкоупругого куба;
 - растяжение вязкоупругой плиты с цилиндро-коническим отверстием;
 - действие давления на внутреннюю поверхность корпуса клапана (соединение двух толстостенных вязкоупругих цилиндров).

Основные результаты и защищаемые положения диссертации опубликованы в следующих работах:

1. Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю. Построение граничных интегральных уравнений для голоморфного вектора при решении методом потенциала трехмерных задач упругого равновесия // Сборник материалов II Всероссийской конференции «Организационные, философские и технические проблемы современных машиностроительных производств». Рузаевка. – 2001. – С. 57.
2. Игумнов Л.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Литвинчук С.Ю., Сенников В.М. Применение интегрального подхода в численно-аналитическом моделировании распространения ударных импульсов в многослойном упругом полупространстве // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сборник / Н.Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та. – 2003. – Вып. 65. – С. 15-25.
3. Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Белов А.А. Численное исследование волновых полей в слоистом полупространстве от действующей по нормали поверхностной сосредоточенной силы // IX Нижегородской сессии молодых ученых. Математические науки: тезисы докладов. Саров. – 2004. – С. 14.
4. Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Ануфриев А.А. Численное решение осесимметричных задач деформирования конструкций методом гранично-временных элементов // IX Нижегородской сессии молодых ученых. Математические науки: тезисы докладов. Саров. – 2004. – С. 11.
5. Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Белов А.А., Ануфриев А.А. Гранично-элементное моделирование динамического деформирования трехмерных элементов конструкций // Волновая динамика машин и конструкций. Всероссийская научная конференция, посвященная памяти профессора А.И. Весницкого, (Н.Новгород, 1-5 июня 2004 г.). Тезисы докладов. Н.Новгород. – 2004. – С. 8.
6. Igumnov L.A., Litvinchuk S.U., Anufriev A.A. Mathematical modeling of deformation processes of three-dimensional elements constructions on the basis of boundary- time

elements method // Book of abstracts VI international congress on mathematical modeling. September 20-26, 2004. Nizhny Novgorod, Russia. – 2004. – P. 313.

7. Игумнов Л.А., Белов А.А., Ануфриев А.А., Литвинчук С.Ю., Аменицкий А.В., Ермолаев М.Д. Гранично-элементная методика расчета трехмерных нестационарных динамических задач теории упругости и вязкоупругости // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сборник. / Н.Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та. – 2005. – Вып. 67. – С. 91-101.
8. Игумнов Л.А., Белов А.А., Литвинчук С.Ю., Аменицкий А.В. Гранично-элементное моделирование нестационарного динамического деформирования трехмерных элементов конструкций // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия Механика. / Н.Новгород: Изд-во ННГУ. – 2006. – Вып. 1(7) – С. 76-89.
9. Литвинчук С.Ю. Гранично-элементные расчеты динамических краевых задач трехмерных теорий упругости и вязкоупругости // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. Т. III (Нижний Новгород, 22-28 августа 2006). Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та. – 2006. – С. 134-135.
10. Игумнов Л.А., Белов А.А., Литвинчук С.Ю. Об исследовании влияния вязкости материала на волновые поля перемещений и напряжений методом граничных элементов // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сборник. / Н.Новгород: Изд-во Нижегородского ун-та. – 2006. – Вып. 68. – С. 120-131.