На правах рукописи

Чугунова Варвара Валерьевна

СИНТЕЗ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО НАДЕЖНОСТИ СХЕМ ПРИ ИНВЕРСНЫХ НЕИСПРАВНОСТЯХ НА ВХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ

Специальность 01.01.09 – дискретная математика и
математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород – 2007

Работа выполнена в государственном образовательном учреждении высшего профессионального образования "Пензенский государственный университет" на кафедре "Дискретная математика".

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, доцент Алехина М. А.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Мошков М. Ю., доктор физико-математических наук, доцент Жильцова Л. П.

Ведущая организация: Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова (механико-математический факультет).

Защита состоится 17 мая 2007 г. в 16^{30} часов на заседании диссертационного совета Д 212.166.06 в Нижегородском государственном университете им. Н. И. Лобачевского по адресу: 603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23, конференц-зал ННГУ, корп. 2.

С диссертацией можно ознакомиться в фундаментальной библиотеке ННГУ

Автореферат разослан «___» _____________ 2007 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физико-математических
наук, доцент Лукьянов В. И.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Настоящая работа относится к одному из важнейших разделов математической кибернетики – теории синтеза, надежности и сложности управляющих систем. Актуальность исследований в этой области обусловлена важностью многочисленных приложений, возникающих в различных разделах науки и техники.

К числу основных модельных объектов математической теории синтеза, сложности и надежности управляющих систем относятся схемы из ненадежных функциональных элементов, реализующие булевы функции. Разработка специальных методов синтеза схем из ненадежных функциональных элементов связана, главным образом, с выбранной математической моделью неисправностей. Одна из основных моделей определяется инверсными неисправностями на входах или на выходах элементов. В диссертации рассматривается задача построения асимптотически оптимальных (асимптотически наилучших) по надежности схем в предположении, что функциональные элементы подвержены инверсным неисправностям только на входах элементов. Решение этой задачи усложняется дополнительным требованием к сложности схем, которое состоит в том, чтобы сложность асимптотически оптимальных по надежности схем по порядку равнялась сложности минимальных схем, построенных только из надежных элементов. Задача решается в неприводимых полных базисах, содержащих функции не более чем двух переменных.

Впервые задачу синтеза надежных схем из ненадежных элементов рассматривал Дж. фон Нейман[1]. Он рассматривал инверсные неисправности на выходах элементов, когда функциональный элемент с приписанной ему булевой функцией $f(\tilde{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в неисправном состоянии, в которое переходит с вероятностью ε ($\varepsilon \in (0;\ 1/2)$), реализует функцию $\overline{f}(\tilde{x})$. С помощью итерационного метода Дж. фон Нейман установил, что при ε ($\varepsilon \in (0;\ 1/6)$) произвольную булеву функцию можно реализовать схемой, на выходе которой вероятность ошибки при любом входном наборе значений переменных не превосходит $c\varepsilon$ (c – некоторая абсолютная константа). Однако сложность такой схемы с ростом числа итераций увеличивается экспоненциально (примерно в 3^k раз, где k – число итераций).

Затем схемы с инверсными неисправностями на выходах элементов исследовались в работах Р. Л. Добрушина, С. И. Ортюкова, Д. Улига и некоторых других авторов, причем главное внимание уделялось сложности таких схем (задача синтеза схем наилучших по надежности не ставилась). Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов в произвольном конечном полном базисе $B = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$, $m \in N$ (множество всех функциональных элементов E_i,

---

[1] von Neuman J. Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms from unreliable components // Automata studies, edited by Shannon C., Mc. Carthy J. Princeton University Press, 1956 (русский перевод: Автоматы. – М.: ИЛ, 1956. – С. 68–139.)

функции которых e_i принадлежат базису B, будем также называть базисом B[2]). Каждому элементу базиса E_i приписано положительное число $\nu(E_i)$ – вес данного элемента. Пусть сложность $L(S)$ схемы S из ненадежных элементов[3], реализующей булеву функцию $f(\tilde{x})$, определяется как сумма весов всех входящих в нее элементов. Предполагается, что все элементы схемы независимым образом с вероятностью ε переходят в неисправные состояния. Ненадежность $P(S)$ схемы S определяется как максимальная вероятность ошибки на выходе схемы при всевозможных входных наборах, т. е. $P(S) = \max_{\tilde{a}} P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S,\tilde{a})$, где $P_{\bar{f}(\tilde{a})}(S,\tilde{a})$ – вероятность появления значения $\bar{f}(\tilde{a})$ на выходе схемы S при входном наборе $\tilde{a}$, а максимум берется по всем возможным входным наборам $\tilde{a}$. Надежность схемы S равна 1 – $P(S)$. Вводится функция Шеннона $L_{p,\varepsilon}(n) = \max_f \min_S L(S)$, характеризующая сложность схем, реализующих функции от n переменных в базисе B, где минимум берется по всем схемам S из ненадежных элементов, реализующим функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ с ненадежностью $P(S) \leq p$, а максимум – по всем булевым функциям f от n переменных.

Пусть $\rho = \min_{E_i}(\nu(E_i)/(n(E_i)-1))$, где минимум берется по всем элементам E_i базиса, для которых $n(E_i) > 1$, $n(E_i)$ – число существенных переменных функции e_i, реализуемой элементом E_i, а $\nu(E_i)$ – вес функционального элемента E_i, $i = 1, ..., m$.

О. Б. Лупанов[4] показал, что для схем, реализующих булевы функции от n переменных и состоящих только из надежных элементов (т. е. при ε = 0 и p = 0), выполняется соотношение $L_{0,0}(n) \sim \rho \cdot 2^n / n$.

С. И. Ортюков[5] для инверсных неисправностей на выходах элементов получил следующий результат: пусть $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $p > q(\varepsilon)L_g$, где L_g – минимальное число надежных элементов, необходимое для реализации функции голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ в базисе B, $q(\varepsilon)$ – некоторая функция такая, что $q(\varepsilon) = \varepsilon + 3\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда существует такая функция $\rho(\varepsilon) \to \rho$ при $\varepsilon \to 0$, что $L_{p,\varepsilon}(n)\,\mathrm{d}\,\rho(\varepsilon)\cdot 2^n/n$.

Д. Улиг[6] для инверсных неисправностей на выходах элементов с вероятностью ошибки ε показал, что для любых, сколь угодно малых чисел

---

[2] Лупанов О. Б. Асимптотические оценки сложности управляющих систем. – М.: Изд-во МГУ, 1984.

[3] Редькин Н. П. Надежность и диагностика схем. – М.: Изд-во МГУ, 1992.

[4] Лупанов О. Б. Об одном методе синтеза схем // Изв. вузов. Радиофизика. – 1958. – Т. 1. – № 1. – С. 120–140.

[5] Ортюков С. И. Об избыточности реализации булевых функций схемами из ненадежных элементов // Труды семинара по дискретной математике и ее приложениям (Москва, 27 – 29 января 1987 г.). – М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1989. – С. 166–168.

[6] Uhlig D. Reliable networks from unreliable gates with almost minimal comlexity // Fundamentals of Computation Theory. Intern. conf. FCT'87 (Kazan, June 1987). Proc. Berlin:

c и b (c, b > 0) существует число ε' ($\varepsilon' \in (0,\ 1/2)$) такое, что при любом ε ($\varepsilon \in (0,\ \varepsilon')$) и любом p, удовлетворяющем условию $p \ge (1+b)\,\varepsilon\, L_g$ (точнее $p \ge q(\varepsilon)\, L_g$), справедливо соотношение $L_{p,\varepsilon}(n) \le (1+c)\rho \cdot 2^n/n$.

Таким образом, в результатах С. И. Ортюкова и Д. Улига имеет место асимптотика функции Шеннона с точностью до множителя, сколь угодно близкого к единице (при этом вероятность сбоя ε ограничена константой), т.е. найденные ими методы синтеза позволяют строить асимптотически оптимальные по сложности схемы, функционирующие с некоторым уровнем надежности.

Из результатов Н. Пиппенджера[7] следует, что при инверсных неисправностях на выходах элементов с вероятностью ошибки $\varepsilon \in (0,\ 1/200]$ любую булеву функцию от n переменных в базисе $\{\&,\ \vee,\ \bar{\ }\}$ можно реализовать такой схемой S, что $P(S) \le 18\varepsilon$, $L(S) \le 170 \cdot 2^n/n$.

С. В. Яблонский[8] рассматривал задачу синтеза надежных схем в базисе $B = \{x_1 \& x_2,\ x_1 \vee x_2,\ \overline{x_1},\ g(x_1, x_2, x_3)\}$. Он предполагал, что элемент, реализующий функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3$, абсолютно надежный, а конъюнктор, дизъюнктор и инвертор – ненадежные, подвержены произвольным неисправностям, ненадежность каждого из них не больше ε. Им доказано, что для любого $p > 0$ существует алгоритм, который для каждой булевой функции $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ строит такую схему S, что $P(S) < p$, $L(S) \le 2^{n-1}/n$.

В. В. Тарасов[9] рассматривал задачу построения схем сколь угодно высокой надежности (когда $P(S) \to 0$). Для базисов из ненадежных функциональных элементов с двумя входами и одним выходом В.В. Тарасовым выявлены необходимые и достаточные условия, при которых произвольные булевы функции можно реализовать схемами сколь угодно высокой надежности. Из полученных им результатов следует невозможность построения сколь угодно надежных схем для произвольных функций при инверсных неисправностях только на входах элементов или только на выходах в базисах из двухвходовых функциональных элементов.

С. И. Аксеновым[10] получена оценка ненадежности схем в произвольном полном базисе B при инверсных неисправностях на выходах элементов. Он доказал, что в произвольном полном базисе B при $\varepsilon \in (0;\ \varepsilon_0)$

Springer-Verl., 1987. – P. 462–469 (Lecture Notes in Comput. Sci.; V. 278) (русский перевод: Автоматы. – М.: ИЛ, 1956. С. 68–139).

[7] Pippenger N. On networks of Noisy Gates // 26 Symposium on Foundation on Computer science, 21 – 23.10.1985, Portland, 30 – 38.

[8] Яблонский С. В. Асимптотически наилучший метод синтеза надежных схем из ненадежных элементов // Banach Center. 1982. –№ 7. – P. 11 – 19.

[9] Тарасов В.В. К синтезу надежных схем из ненадежных элементов // Матем. заметки. – 1976. – Т. 20. – № 3. – С. 391–400.

[10] Аксенов С. И. О надежности схем над произвольной полной системой функций при инверсных неисправностях на выходах элементов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Естественные науки. – № 6 (21). – 2005. – С. 42–55.

любую булеву функцию можно реализовать такой схемой S, что $P(S) \le k\varepsilon + c\varepsilon^2$, где k ($k \le 5$) – минимальное число надежных элементов, необходимое для реализации какой-либо из функций вида $g_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\sigma_1} x_3^{\sigma_3} \vee x_2^{\sigma_2} x_3^{\sigma_3}$, $g_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3} x_4^{\sigma_4}$, $g_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2})\,(x_3^{\sigma_3} \vee x_4^{\sigma_4})$, $\sigma_i \in \{0, 1\}$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, а ε – ненадежность базисного элемента. Константы k, c, ε_0 положительны и зависят от базиса B. Таким образом, в произвольном полном базисе любую булеву функцию можно реализовать схемой, ненадежность которой асимптотически не больше 5ε при $\varepsilon \to 0$. Вопрос о возможности снижения мультипликативной константы 5 в оценке ненадежности для произвольного базиса пока остается открытым.

М. А. Алехина[11] решала задачу построения асимптотически оптимальных (асимптотически наилучших) по надежности схем при однотипных константных неисправностях только на входах или только на выходах элементов. Чтобы сформулировать полученные М. А. Алехиной результаты, введем необходимые определения.

Если неисправность такова, что элемент (реализующий в исправном состоянии приписанную ему булеву функцию) в неисправном состоянии, в которое переходит с вероятностью ε ($\varepsilon \in (0; 1/2)$), реализует константу 0, то она называется неисправностью типа 0 на выходе элемента. Если же элемент в неисправном состоянии реализует константу 1, то такая неисправность называется неисправностью типа 1 на выходе элемента.

Если неисправность элемента такова, что поступающий на его вход нуль не искажается, а поступающая на его вход единица с вероятностью ε ($\varepsilon \in (0; 1/2)$) может превратиться в нуль, то она называется неисправностью типа 0 на входе элемента. Если же неисправность элемента такова, что поступающая на его вход единица не искажается, а нуль с вероятностью ε может превратиться в единицу, то она называется неисправностью типа 1 на входе элемента.

Понятие ненадежности $P(S)$ схемы S в случае однотипных константных неисправностей определяется так же, как для инверсных неисправностей на выходах элементов.

Пусть $P_\varepsilon(f) = \inf\limits_S P(S)$, где инфимум берется по всем схемам S из ненадежных элементов, реализующим функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Схема A из ненадежных элементов, реализующая функцию f, называется асимптотически оптимальной (асимптотически наилучшей) по надежности, если $P(A) \sim P_\varepsilon(f)$ при $\varepsilon \to 0$, т. е. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{P_\varepsilon(f)}{P(A)} = 1$.

М. А. Алехиной доказано, что во всех неприводимых полных базисах (исключая три случая), содержащих функции не более чем двух

[11] Алехина М. А. Синтез асимптотически оптимальных по надежности схем из ненадежных функциональных элементов. – Пенза: Инф.-издат. центр Пенз. гос. ун-та, 2006.

переменных, почти все булевы функции можно реализовать асимптотически наилучшими по надежности схемами, функционирующими с ненадежностью, асимптотически равной $a\varepsilon^t$ при $\varepsilon \to 0$, константы a и t зависят от базиса и типа неисправностей, $a\in\{1, 2, 3\}$, $t\in\{1, 2\}$. Сложность таких схем по порядку равна сложности схем, построенных только из надежных элементов (т. е. увеличивается несущественно).

Также М. А. Алехина[12] рассматривала инверсные неисправности на входах элементов и доказала, что при инверсных неисправностях на входах элементов в базисах $\{x_1|x_2\}$ и $\{x_1{\downarrow}x_2\}$ почти все булевы функции можно реализовать асимптотически наилучшими по надежности схемами, функционирующими с ненадежностью, асимптотически равной 2ε при $\varepsilon \to 0$. Сложность этих схем по порядку равна сложности минимальных схем, состоящих только из надежных элементов.

Вопрос о возможности построения асимптотически наилучших по надежности схем в других, отличных от $\{x_1|x_2\}$, $\{x_1{\downarrow}x_2\}$ базисах из двухвходовых функциональных элементов при инверсных неисправностях на входах, оставался открытым. Ответ на него для всех остальных неприводимых полных базисов из двухвходовых функциональных элементов получен в данной диссертационной работе. Существенное внимание уделяется сложности асимптотически оптимальных по надежности схем.

Цель работы. Решить задачу синтеза асимптотически оптимальных по надежности схем из ненадежных элементов во всех неприводимых полных базисах, содержащих функции не более чем двух переменных, при инверсных неисправностях на входах элементов. Оценить сложность построенных схем и сравнить со сложностью минимальных схем, построенных только из надежных элементов.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми. Укажем наиболее важные из них.

1. Разработаны методы построения асимптотически оптимальных (наилучших) по надежности схем из ненадежных элементов для всех неприводимых полных базисов из двухвходовых функциональных элементов при инверсных неисправностях на входах элементов.

2. Для всех булевых функций в рассматриваемых базисах получены верхние оценки ненадежности схем.

3. В каждом из указанных базисов найдены нетривиальные нижние оценки ненадежности схем, реализующих булевы функции.

4. Доказана асимптотическая точность полученных ранее верхних оценок, т. е. в каждом рассматриваемом базисе найден класс булевых функций, такой, что при реализации любой функции из этого класса любой схемой S нижняя оценка ненадежности схемы S будет асимптотически

---

[12] Алехина М. А. О надежности и сложности схем в базисе $\{x|y\}$ при инверсных неисправностях на входах элементов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Естественные науки. – № 6 (21). – 2005. – С. 36–41.

равна верхней оценке ненадежности. Для каждого базиса классы функций явно найдены и содержат почти все булевы функции.

5. Конструктивно доказано, что сложность асимптотически оптимальных по надежности схем при инверсных неисправностях на входах элементов во всех неприводимых полных базисах из двухвходовых функциональных элементов для почти всех булевых функций по порядку равна сложности минимальных схем, построенных только из надежных элементов.

Методы исследований. В работе использованы методы дискретной математики и математической кибернетики, теории вероятностей, математического анализа. Кроме того, предложены новые методы получения нижних и верхних оценок ненадежности схем.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные в работе результаты носят теоретический характер. Они могут быть использованы в дальнейших исследованиях надежности и сложности схем из ненадежных функциональных элементов. Предложенные методы синтеза схем, асимптотически оптимальных по надежности, могут найти применение при проектировании технических систем для повышения их надежности.

Апробация работы. Результаты диссертационной работы докладывались на XIV Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (г. Пенза, 2005), на VII Международной конференции «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Моск. обл., с. Покровское, 2006), Международном симпозиуме «Надежность и качество», (г. Пенза, 2006), XVI Международной школе-семинаре «Синтез и сложность управляющих систем» (г. Санкт-Петербург, 2006), на семинаре «Математические вопросы кибернетики» под руководством профессора О. М. Касим-Заде в МГУ им. М. В. Ломоносова, на семинаре «Надежность и диагностика уп-равляющих систем» под руководством профессора Н. П. Редькина в МГУ им. М. В. Ломоносова, на городском семинаре по дискретной математике под руководством профессора В. Н. Шевченко в Нижегородском государственном университете им. Н. И. Лобачевского.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 9 работах автора, список которых приведен в конце автореферата; среди них 4 основные работы опубликованы в журналах, рекомендуемых ВАК для публикации результатов диссертаций. Три работы из 9 написаны в соавторстве с научным руководителем М. А. Алехиной (опубликованные результаты являются собственными, М. А. Алехиной принадлежат постановка задачи и идея доказательства).

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, списка литературы и приложения. Объем диссертации составляет 110 страниц, включая 5 таблиц и 28 рисунков. Список литературы содержит 25 наименований.

Содержание диссертации

I. Во введении приводятся обзор результатов, связанных с темой диссертации, постановка задачи, дается характеристика работы, формулируются в общем виде полученные в ней результаты.

Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов в неприводимых полных базисах, содержащих функции, зависящие не более чем от двух переменных.

Схема реализует функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, если при поступлении на входы схемы набора $\tilde{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ при отсутствии неисправностей на выходе схемы появляется значение $f(\tilde{a})$. Предполагается, что все входы элементов схемы независимо друг от друга с вероятностью ε (ε∈(0; 1/2)) подвержены инверсным неисправностям. Эти неисправности характеризуются тем, что поступающее на вход элемента значение a, $a \in \{0, 1\}$,
с вероятностью ε может превратиться в значение $\bar{a}$.

Ненадежность $P(S)$ схемы S, реализующей функцию $f(\tilde{x})$, и понятие асимптотически оптимальной по надежности схемы при инверсных неисправностях на входах элементов определяются так же, как и при однотипных константных неисправностях. Веса всех элементов равны единице, поэтому сложность $L(S)$ схемы S равна числу функциональных элементов в ней.

Определение. Булевы функции f_1 и f_2 назовем конгруэнтными, если одна из них может быть получена из другой заменой переменных (без отождествления).

Пусть M – это множество всех булевых функций, зависящих не более чем от двух переменных. Тогда множество попарно неконгруэнтных булевых функций, зависящих (возможно, фиктивно) от переменных x_1, x_2, есть
$M(x_1, x_2) = \{x_1\&x_2,\ x_1\vee x_2,\ x_1|x_2,\ x_1\downarrow x_2,\ x_1\to x_2,\ x_1\not\to x_2,\ x_1\sim x_2,\ x_1\oplus x_2,\ \bar{x}_1, 0, 1\}$.

Определение. Множество $B \subset M(x_1, x_2)$ назовем неприводимым полным базисом (в P_2), если множество B полно и никакое его собственное подмножество полным не является.

Введем в рассмотрение неприводимые полные базисы: $B_1 = \{x_1|x_2\}$, $B_2 = \{x_1\downarrow x_2\}$, $B_3 = \{x_1\to x_2, x_1\not\to x_2\}$, $B_4 = \{x_1\to x_2, x_1\oplus x_2\}$, $B_5 = \{x_1\not\to x_2, x_1\sim x_2\}$, $B_6 = \{x_1\oplus x_2, x_1\&x_2, 1\}$, $B_7 = \{x_1\sim x_2, x_1\vee x_2, 0\}$, $B_8 = \{x_1\sim x_2, x_1\&x_2, x_1\oplus x_2\}$, $B_9 = \{x_1\sim x_2, x_1\vee x_2, x_1\oplus x_2\}$, $B_{10} = \{x_1\sim x_2, x_1\&x_2, 0\}$, $B_{11} = \{x_1\oplus x_2, x_1\vee x_2, 1\}$, $B_{12} = \{x_1\not\to x_2, \bar{x}_1\}$, $B_{13} = \{x_1\to x_2, \bar{x}_1\}$, $B_{14} = \{x_1\not\to x_2, 1\}$, $B_{15} = \{x_1\to x_2, 0\}$, $B_{16} = \{x_1\&x_2, \bar{x}_1\}$, $B_{17} = \{x_1\vee x_2, \bar{x}_1\}$.

В P_2 существует ровно 17 (с точностью до переименования переменных) неприводимых полных базисов, содержащих функции не более чем двух переменных. Любой другой базис, отличный от базисов B_1 – B_{17} (например, $B_{18} = \{x_1\&x_2, x_1\vee x_2, \bar{x}_1\}$), можно получить переименованием переменных без отождествления, а также добавлением одной или нескольких функций из множества $M(x_1, x_2)$ к некоторому базису из указанного списка.

II. Первая глава диссертации содержит необходимые определения, обозначения и ряд вспомогательных утверждений, используемых в дальнейшем для получения верхней и нижней оценок надежности схем. Отметим наиболее важные из них.

Пусть в схеме S, реализующей булеву функцию f, отличную от константы, выделена подсхема B, имеющая один вход, содержащая выход схемы S и реализующая инверсию. Обозначим через C подсхему, получаемую из схемы S удалением подсхемы B. Очевидно, что схема C реализует $\bar{f}$. Если выполнено неравенство $P(S) > P(C)$, то будем говорить, что схема C надежнее схемы S и получается из S удалением подсхемы B.

Определение. Схема S, реализующая булеву функцию f, отличную от константы, является c-схемой, если из нее нельзя получить более надежную схему удалением подсхемы, содержащей выход схемы S и реализующей инверсию.

Теорема 1.1. Пусть схема S, ненадежность которой равна $P(S)$, реализует функцию f и является c-схемой. Если в S можно выделить подсхему B, имеющую один вход, содержащую выход схемы и реализующую инверсную функцию с вероятностями ошибок p_0 и p_1 такими, что $0 < p_0 + p_1 < 1$, то верно неравенство $\min\left\{\frac{p_0}{p_0+p_1}, \frac{p_1}{p_0+p_1}\right\} \le P(S)$.

Теорема 1.1 устанавливает соотношение между надежностными характеристиками схемы и ее подсхемы специального вида и используется для получения нижних оценок ненадежности схем.

Функционирование двухвходового базисного элемента E с приписанной ему функцией e можно задать таблицей 1, в которой P_0, P_1 – вероятности появления 0 и 1 соответственно на выходе элемента ($p_1, p_2, p_3, p_4 \ge 0$).

Определение. Элемент E^* с приписанной ему функцией e^*, двойственной функции e, назовем двойственным к элементу E, если он функционирует согласно таблице 2.

Таблица 1

x_1	x_2	$e(x_1, x_2)$	P_0	P_1
0	0	$e(0, 0)$	p_1	$1 - p_1$
0	1	$e(0, 1)$	p_2	$1 - p_2$
1	0	$e(1, 0)$	p_3	$1 - p_3$
1	1	$e(1, 1)$	p_4	$1 - p_4$

Таблица 2

x_1	x_2	$e^*(x_1, x_2)$	P_0	P_1
0	0	$\bar{e}(1, 1)$	$1 - p_4$	p_4
0	1	$\bar{e}(1, 0)$	$1 - p_3$	p_3
1	0	$\bar{e}(0, 1)$	$1 - p_2$	p_2
1	1	$\bar{e}(0, 0)$	$1 - p_1$	p_1

Определение. Две схемы S и S^* двойственны, если одна получается из другой заменой всех элементов соответственно на двойственные им элементы.

Теорема 1.2[13]. Для любых двойственных схем S и S^* и любого входного набора $\tilde{a}$ верно равенство $P_{\overline{f(\tilde{a})}}(S, \tilde{a}) = P_{\overline{f^*(\tilde{\tilde{a}})}}(S^*, \tilde{\tilde{a}})$, где $\tilde{\tilde{a}} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, ..., \bar{a}_n)$, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $f^*(x_1, x_2, ..., x_n)$ – функции, реализуемые схемами S и S^* соответственно.

Следствие 1.1[12]. Для любых двойственных схем S и S^* верно равенство $P(S) = P(S^*)$.

Теорема 1.2 утверждает, что для двойственных схем на противоположных входных наборах вероятности ошибок равны. Поэтому (следствие 1.1) равны ненадежности двойственных схем. Следовательно, утверждение о надежности, доказанное для функции f в базисе B при инверсных неисправностях на входах элементов, верно для двойственной функции f^* в двойственном базисе B^* при тех же неисправностях элементов. В диссертационной работе свойства двойственных схем используются следующим образом: получив результат в базисе B для функции f, переносим его в двойственный базис B^* на функцию f^*, сокращая тем самым объем исследовательской работы.

Теорема 1.2 и следствие 1.1 доказаны М. А. Алехиной для произвольных неисправностей функциональных элементов. Нами эти утверждения используются для случая инверсных неисправностей на входах элементов.

Леммы 1.1 – 1.8 содержат утверждения, позволяющие развивать определенную технику вычислений вероятностей ошибок на выходе элементов схемы.

Лемма 1.9[12]. Пусть f – произвольная булева функция, отличная от константы, и S – любая схема, ее реализующая. Пусть подсхема B схемы S содержит выход схемы S и реализует булеву функцию f' с ненадежностью $P(B) \le 1/2$. Обозначим p^1 – минимум вероятностей ошибок на выходе схемы B по таким входным наборам $\tilde{b}$, что $f'(\tilde{b}) = 0$. Аналогично p^0 – минимум вероятностей ошибок на выходе схемы B по таким входным наборам $\tilde{b}$, что $f'(\tilde{b}) = 1$. Тогда вероятности ошибок на выходе схемы S удовлетворяют неравенствам $P_1(S, \tilde{a}) \ge p^1$, если $f(\tilde{a}) = 0$; $P_0(S, \tilde{a}) \ge p^0$, если $f(\tilde{a}) = 1$.

Замечание 1.1[12]**.** Из леммы 1.10 следует, что $P(S) \ge \max\{p^0, p^1\}$.

Лемма 1.9 и замечание 1.1, доказанные М.А. Алехиной для произвольных неисправностей функциональных элементов, используются нами далее для случая инверсных неисправностей на входах элементов.

---

[13] Алехина М. А. Синтез асимптотически оптимальных по надежности схем из ненадежных функциональных элементов: Монография. – Пенза: Инф.-издат. центр Пенз. гос. ун-та, 2006.

Таким образом, лемма 1.9 и замечание 1.1 позволяют найти оценку надежности схемы при инверсных неисправностях на входах элементов по некоторым вероятностям ошибок ее связной подсхемы, содержащей выход схемы.

III. Вторая глава диссертации содержит описание методов синтеза надежных схем в каждом из базисов B_1 – B_{18}. С помощью этих методов получены верхние оценки ненадежности схем.

Сначала описывается общий метод синтеза надежных схем в произвольном полном конечном базисе, который позволяет найти оценку ненадежности схемы S, реализующей булеву функцию f. Для этого построим схему S_h, реализующую функцию $x_1 | x_2$, и обозначим вероятности ошибок на выходе схемы S_h следующим образом: $p_0^*(00) = \alpha$, $p_0^*(01) = \beta$, $p_0^*(10) = \delta$, $p_1^*(11) = \tau$. Найдем оценку ненадежности схемы S, реализующей булеву функцию f, используя теорему 2.2.

Обозначим $\mu = \max\{\alpha, \beta, \delta, \tau\}$ – ненадежность схемы S_h.

Теорема 2.2. Если $\mu \in (0; 1/50]$, то любую булеву функцию f можно реализовать схемой S, такой, что $P(S) \le 4\mu$.

Полученный результат конкретизируется для каждого из базисов B_1, B_2, B_4 – B_{11}, B_{16} – B_{18}. Иначе получены оценки ненадежности схем в базисах B_3, B_{12}, B_{13}, B_{14}, B_{15}. Здесь в качестве схемы S_h берем схему, реализующую функцию $x_1 \downarrow x_2$, двойственную функции $x_1 | x_2$. Вычисляем вероятности ошибок $p_1^*(11)$, $p_1^*(10)$, $p_1^*(01)$, $p_0^*(00)$ на выходе этой схемы. Полагая $p_1^*(11) = \alpha$, $p_1^*(10) = \beta$, $p_1^*(01) = \gamma$, $p_0^*(00) = \tau$, воспользуемся теоремой 2.2 и получим оценку ненадежности схемы S, реализующей произвольную функцию f.

Затем строятся схемы более надежные, чем схемы S. В базисах B_1, B_2, B_{16}, и B_{17} для повышения надежности схемы S использовалась схема $\varphi(S)$, построенная следующим образом: возьмем два экземпляра схемы S, реализующей булеву функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, соединим их выходы с входами схе-мы S_h, реализующей функцию $x_1 | x_2$; затем возьмем два экземпляра этой схемы и соединим их выходы с входами еще одной схемы S_h. Схема $\varphi(S)$ построена.

В базисах B_3, B_{12}, B_{13}, B_{14}, B_{15} для повышения надежности используется схема $\varphi(S)$, в которой в качестве схемы S_h рассматривается схема, реализующая функцию $x_1 \downarrow x_2$.

Очевидно, что в результате применения (возможно, неоднократного) операции φ к схеме S, реализующей функцию f, получаются схемы, реализующие ту же функцию f.

В базисах B_4 и B_5 для повышения надежности использовалась схема $\psi_1(S, S')$: возьмем один экземпляр схемы S, реализующей функцию f, два экземпляра схемы S', реализующей функцию $\bar{f}$, и соединим выходы схем S', S', S соответственно с первым, вторым и третьим входами схемы Sg, реализующей функцию $g(x_1, x_2, x_3) = \overline{x_1}\,\overline{x_2} \vee \overline{x_1}x_3 \vee \overline{x_2}x_3$. Очевидно, что в результате применения (возможно, неоднократного) операции ψ_1 к схемам S и S', реализующим функции f и $\bar{f}$ соответственно, получаются схемы, реализующие f.

В базисах B_6, B_7, B_8 и B_9 для повышения надежности использовалась схема $\psi(S)$: возьмем три экземпляра схемы S, реализующей булеву функцию f, и соединим их выходы с входами схемы Sg, реализующей функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3$. Очевидно, что в результате применения (возможно, неоднократного) операции ψ к схеме S, реализующей булеву функцию f, получаются схемы, реализующие функцию f.

В базисах B_{10} и B_{11} для повышения надежности использовалась схема $\psi_2(S, S')$: возьмем два экземпляра схемы S, реализующей функцию f, один экземпляр схемы S', реализующей функцию $\bar{f}$, и соединим выходы схем S, S', S соответственно с первым, вторым и третьим входами схемы Sg, реализующей функцию $g(x_1, x_2, x_3) = x_1\overline{x_2} \vee x_1x_3 \vee \overline{x_2}x_3$. Очевидно, что в результате применения (возможно, неоднократного) операции ψ_2 к схемам S и S', реализующим булевы функции f и $\bar{f}$ соответственно, получаются схемы, реализующие функцию f.

В базисе B_{18} для повышения надежности использовалась следующая схема $\phi(S)$: возьмем два экземпляра схемы S, реализующей булеву функцию f, и соединим их выходы с входами конъюнктора, затем выходы двух экземпляров таких схем соединим с входами дизъюнктора. Очевидно, что в результате применения (возможно, неоднократного) операции ϕ к схеме S, реализующей функцию f, получаются схемы, реализующие ту же функцию f.

Таким образом, во второй главе доказано, что каждому из базисов $B_1 - B_{18}$ можно поставить в соответствие константы a, b, d (таблица 3), такие, что при $\varepsilon \in (0; d]$ произвольную булеву функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можно реализовать схемой S, ненадежность которой $P(S) \leq a\varepsilon + b\varepsilon^2$.

Таблица 3

B	a	b	d	b'	d'	$K(n)$
$B_1 = \{x_1 \mid x_2\}$	2	19	1/100	– 1	1/4	x_i, 1
$B_2 = \{x_1 \downarrow x_2\}$	2	19	1/100	– 1	1/4	x_i, 0
$B_3 = \{x_1 \to x_2, x_1 \not\to x_2\}$	2	51	1/300	– 1	1/4	x_i, 0, 1
$B_4 = \{x_1 \to x_2, x_1 \oplus x_2\}$	2	66	1/200	– 2	1/4	x_i, 1
$B_5 = \{x_1 \not\to x_2, x_1 \sim x_2\}$	2	66	1/200	– 2	1/4	x_i, 0
$B_6 = \{x_1 \oplus x_2, x_1 \& x_2, 1\}$	2	67	1/200	– 2	1/4	x_i, 0, 1
$B_7 = \{x_1 \sim x_2, x_1 \vee x_2, 0\}$	2	67	1/200	– 2	1/4	x_i, 0, 1
$B_8 = \{x_1 \sim x_2, x_1 \& x_2, x_1 \oplus x_2\}$	2	62	1/300	– 2	1/4	x_i, 0

$B_9 = \{x_1 \sim x_2,\ x_1 \vee x_2,\ x_1 \oplus x_2\}$	2	62	1/300	– 2	1/4	$x_i,\ 1$
$B_{10} = \{x_1 \sim x_2,\ x_1 \& x_2,\ 0\}$	2	66	1/200	– 2	1/4	$x_i,\ 0$
$B_{11} = \{x_1 \oplus x_2,\ x_1 \vee x_2,\ 1\}$	2	66	1/200	– 2	1/4	$x_i,\ 1$
$B_{12} = \{x_1 \not\to x_2,\ \overline{x_1}\}$	3	41	1/150	– 6	1/6	$x_i^{\delta} \& h(\tilde{x}),\ 1$
$B_{13} = \{x_1 \to x_2,\ \overline{x_1}\}$	3	41	1/150	– 6	1/6	$x_i^{\delta} \vee h(\tilde{x}),\ 0$
$B_{14} = \{x_1 \not\to x_2,\ 1\}$	4	59	1/200	– 8	1/11	$(x_i^{\delta} \& h(\tilde{x}))^{\mu}$
$B_{15} = \{x_1 \to x_2,\ 0\}$	4	59	1/200	– 8	1/11	$(x_i^{\delta} \& h(\tilde{x}))^{\mu}$
$B_{16} = \{x_1 \& x_2,\ \overline{x_1}\}$	4	83	1/200	– 12	1/10	$(x_i^{\delta} \& h(\tilde{x}))^{\mu}$
$B_{17} = \{x_1 \vee x_2,\ \overline{x_1}\}$	4	83	1/200	– 12	1/10	$(x_i^{\delta} \& h(\tilde{x}))^{\mu}$
$B_{18} = \{x_1 \& x_2,\ x_1 \vee x_2,\ \overline{x_1}\}$	2	19	1/150	– 2	1/6	$x_i^{\delta},\ 0,\ 1$

Используемые в таблице 3 обозначения: $i = \overline{1, n}$, $\delta, \mu \in \{0, 1\}$, $h(\tilde{x})$ – произвольная булева функция от n переменных ($\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$).

Построенные во второй главе схемы являются не просто надежными, а как будет показано в третьей главе, асимптотически наилучшими по надежности для почти всех функций.

Нижние оценки надежности схем получаются из верхних оценок ненадежности сразу по определению надежности.

IV. Третья глава диссертации посвящена нижним оценкам ненадежности схем. Доказано, что надежные схемы, построенные во второй главе, являются асимптотически наилучшими по надежности во всех базисах $B_1 – B_{18}$ для почти всех функций.

Для получения нижних оценок ненадежности схем в базисе B используются следующие методы:

1) в произвольной схеме S, реализующей функцию $f \notin K(n)$, выделяется некоторая связная подсхема, содержащая выход схемы S, и по некоторым вероятностям ошибок подсхемы оценивается ненадежность схемы S;

2) в произвольной схеме S, реализующей функцию $f \notin K(n)$, выделяется связная подсхема специального вида (с-схема), содержащая выход схемы S, по некоторым вероятностям ошибок которой можно оценить ненадежность всей схемы S;

3) для схемы S, реализующей функцию $f \notin K(n)$, доказывается существование набора значений входных переменных, на котором вероятность ошибки на выходе схемы не меньше $a\varepsilon + \acute{b}\varepsilon^2$, если $\varepsilon \in (0; \acute{d}\,]$ (см. таблицу 3).

Оценки для вероятностей ошибок на выходе схем и подсхем получены с помощью лемм 1.1 – 1.9 первой главы.

Доказано, что каждому из базисов $B_1 – B_{18}$ можно поставить в соответст-вие константы $a, \acute{b}, \acute{d}$ и классы булевых функций $K(n)$ (см. таблицу 3) такие, что при $\varepsilon \in (0; \acute{d}\,]$ любая схема S реализует булеву функцию

$f(x_1, x_2, ..., x_n)$,

$f \notin K(n)$, с ненадежностью $P(S) \geq a\varepsilon + b'\varepsilon^2$. Константа a здесь та же, что и во второй главе.

Классы $K(n)$ содержат почти все булевы функции.

Верхние оценки надежности схем легко получаются из нижних оценок ненадежности сразу по определению надежности.

V. Четвертая глава диссертации посвящена сложности асимптотически наилучших по надежности схем. Доказано, что сложность асимптотически наилучших по надежности схем в рассматриваемых базисах B_1 – B_{18} по порядку равна сложности схем, построенных только из надежных элементов.

В основе методов синтеза схем, асимптотически наилучших по надежности, лежат результаты теорем 4.1 и 4.2.

Теорема 4.1. Пусть B – произвольный полный базис, k – сложность минимальной схемы S_h, реализующей функцию $x_1|x_2$ с вероятностями ошибок на выходе $p_0^*(00) = \alpha$, $p_0^*(01) = \beta$, $p_0^*(10) = \delta$, $p_1^*(11) = \tau$ и $\mu = \max\{\alpha, \beta, \delta, \tau\}$. Тогда при $\mu \in (0; 1/600k]$ произвольную булеву функцию f от n переменных можно реализовать такой схемой S, что $L(S) \leq 56 \cdot k \cdot 2^n/n$ и $P(S) \leq 7\mu$.

Теорема 4.2[13]. Пусть S – схема, реализующая произвольную булеву функцию f в базисе B, Sg – схема, реализующая функцию голосования $g(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ в том же базисе. Тогда можно построить схему $\psi(S)$, реализующую функцию f, для которой $P(\psi(S)) \leq 3P^2(S) + P(Sg)$, $L(\psi(S)) = 3L(S) + L(Sg) \leq 3L(S)$.

Теоремы 4.1 и 4.2, доказанные М. А. Алехиной для произвольных неисправностей функциональных элементов, далее используются нами для случая инверсных неисправностей на входах элементов.

Пусть B – один из базисов B_1 – B_{18}, а в схемах возникают инверсные неисправности на входах элементов.

Теорема. Пусть константы a, b', c', d' (таблица 4) соответствуют базису B и $\varepsilon \in (0; d']$. Тогда любую булеву функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в базисе B можно реализовать такой схемой S, что $P(S) \leq a\varepsilon + b'\varepsilon^2$, $L(S) \leq c' \cdot 2^n/n$.

Таблица 4

B	a	b'	d'	c'	b''	c''
$B_1 = \{x_1 \mid x_2\}$	2	605	1/1200	168	36	504
$B_2 = \{x_1 \downarrow x_2\}$	2	607	1/1200	168	38	504
$B_3 = \{x_1 \to x_2, x_1 \not\to x_2\}$	2	2403	1/2500	336	78	1008
$B_4 = \{x_1 \to x_2, x_1 \oplus x_2\}$	2	2418	1/2500	336	93	1008
$B_5 = \{x_1 \not\to x_2, x_1 \sim x_2\}$	2	2418	1/2500	336	93	1008
$B_6 = \{x_1 \oplus x_2, x_1 \& x_2, 1\}$	2	2419	1/2500	504	94	1512
$B_7 = \{x_1 \sim x_2, x_1 \vee x_2, 0\}$	2	2419	1/2500	504	94	1512
$B_8 = \{x_1 \sim x_2, x_1 \& x_2, x_1 \oplus x_2\}$	2	5354	1/5500	504	89	1512
$B_9 = \{x_1 \sim x_2, x_1 \vee x_2, x_1 \oplus x_2\}$	2	5354	1/5500	504	89	1512
$B_{10} = \{x_1 \sim x_2, x_1 \& x_2, 0\}$	2	2418	1/2500	504	93	1512

$B_{11} = \{x_1 \oplus x_2, x_1 \vee x_2, 1\}$	2	2418	1/2500	504	93	1512
$B_{12} = \{x_1 \not\to x_2, \overline{x_1}\}$	3	1364	1/1400	336	89	1008
$B_{13} = \{x_1 \to x_2, \overline{x_1}\}$	3	1364	1/1400	336	89	1008
$B_{14} = \{x_1 \not\to x_2, 1\}$	4	2411	1/2500	504	133	1512
$B_{15} = \{x_1 \to x_2, 0\}$	4	2411	1/2500	504	133	1512
$B_{16} = \{x_1 \& x_2, \overline{x_1}\}$	4	1406	1/1500	336	157	1008
$B_{17} = \{x_1 \vee x_2, \overline{x_1}\}$	4	1406	1/1500	336	157	1008
$B_{18} = \{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \overline{x_1}\}$	2	1342	1/1400	336	46	1008

Оценки теоремы установлены конструктивно, т. е. представлены методы синтеза схем S, удовлетворяющих указанным оценкам по надежности и сложности.

Константы b' и c' не являются единственной парой значений, для которой справедлива теорема. Теорема справедлива, например, для значений b'' и c'' соответственно. Однако уменьшение одной из констант влечет увеличение другой, т. е., «улучшая» одну характеристику схемы (например, повышая надежность), «ухудшаем» другую (сложность).

Установлено, что для всех базисов B_1 – B_{18} используемые методы синтеза позволяют строить схемы асимптотически наилучшие по надежности для почти всех булевых функций (при растущем n). Сложность предлагаемых схем по порядку равна сложности минимальных схем, построенных только из надежных элементов.

Выводы

Показано, что в базисах B_1 – B_{18} при инверсных неисправностях на входах функциональных элементов (ε – вероятность неисправности):

1) все булевы функции можно реализовать схемами, ненадежность которых асимптотически не больше $a\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$ (константа a зависит от базиса, $a \in \{2, 3, 4\}$);

2) в каждом из рассматриваемых базисов B_1 – B_{18} явно найден класс булевых функций, такой, что при реализации любой функции из этого класса любой схемой S, ненадежность схемы S будет асимптотически не меньше $a\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$ (константа a та же, что и в пункте 1).

Найденные классы функций содержат почти все булевы функции;

3) сложность асимптотически оптимальных по надежности схем для почти всех булевых функций по порядку равна сложности минимальных схем, построенных только из надежных элементов.

Пользуясь случаем, выражаю благодарность своему научному руководителю профессору М. А. Алехиной за постоянное внимание к работе, поддержку и полезные советы.

Публикации по теме диссертации

1. Чугунова, В. В. Оценка ненадежности при инверсных неисправностях на входах элементов / В. В. Чугунова // Инновации в науке, образовании, бизнесе: материалы III науч.-метод. конф. (11–12 мая 2005 г.,

г. Пенза). – Пенза: Изд-во Пенз. ин-та эконом. развития и антикризисного управления, 2005. – С. 14–16.

2. Чугунова, В. В. Верхняя оценка ненадежности схем в базисе $\{x \vee y, \bar{x}\}$ при инверсных неисправностях на входах элементов / В. В. Чугунова, М. А. Алехина // Проблемы теоретической кибернетики: тез. докладов XIV Междунар. конф. (г. Пенза, 23–28 мая 2005 г.). – М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2005. – С. 10.

3. Чугунова, В. В. Об асимптотически наилучших по надежности схемах в базисах $\{\nrightarrow, \bar{\ }\}$ и $\{\rightarrow, \bar{\ }\}$ при инверсных неисправностях на входах элементов / В. В. Чугунова, М. А. Алехина // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Естественные науки. – № 6 (21). – 2005. – С. 16–25.

4. Чугунова, В.В. Об асимптотически наилучших по надежности схемах в базисах $\{\rightarrow, \nrightarrow\}$, $\{\nrightarrow, 1\}$ и $\{\rightarrow, 0\}$ при инверсных неисправностях на входах элементов / В. В. Чугунова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Естественные науки. – № 6 (21). – 2005. – С. 26–35.

5. Чугунова, В. В. Об асимптотически наилучших по надежности схемах в базисе $\{\&, \vee, \bar{\ }\}$ при инверсных неисправностях на входах элементов / В. В. Чугунова, М. А. Алехина // Дискретный анализ и исследование операций. – Новосибирск: Изд-во ин-та математики. – Октябрь–декабрь 2006 г. – Сер. 1. – Т. 13. – № 4. – С. 3–17.

6. Чугунова, В. В. Об асимптотически наилучших по надежности схемах в базисах $\{\oplus, \&, 1\}$, $\{\sim, \vee, 0\}$,$\{\oplus, \&, \sim\}$ и $\{\oplus, \vee, \sim\}$ при инверсных неисправностях на входах элементов / В. В. Чугунова // Дискретные модели в теории управляющих систем: тр. VII Междунар. конф. (Покровское, 4–6 марта 2006 г.). – М.: МАКС Пресс, 2006. – С. 419−425.

7. Чугунова, В. В. О сложности асимптотически наилучших по надежности схем в базисах $\{\oplus, \&, 1\}$, $\{\sim, \vee, 0\}$, $\{\oplus, \&, \sim\}$ и $\{\oplus, \vee, \sim\}$ при инверсных неисправностях на входах элементов / В. В. Чугунова // Надежность и качество: тр. Междунар. симп. (г. Пенза, 25–31 мая 2006 г.). – Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2006. – Т. 1. – С. 303–306.

8. Чугунова, В. В. Об асимптотически наилучших по надежности схемах в базисах $\{\rightarrow, \oplus\}$ и $\{\nrightarrow, \sim\}$ при инверсных неисправностях на входах элементов / В. В. Чугунова // Синтез и сложность управляющих систем: материалы XVI Междунар. школы-семинара (Санкт-Петербург, 26–30 июня 2006 г.) / под ред. О. Б. Лупанова. – М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 2006. – С. 122–126.

9. Чугунова, В. В. Об асимптотически наилучших по надежности схемах в базисах $\{\vee, \bar{\ }\}$ и $\{\&, \bar{\ }\}$ при инверсных неисправностях на входах элементов / В. В. Чугунова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Естественные науки. – 2006. – № 5 (26). – С. 141−152.

ЧУГУНОВА Варвара Валерьевна

СИНТЕЗ АСИМПТОТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО НАДЕЖНОСТИ СХЕМ ПРИ ИНВЕРСНЫХ НЕИСПРАВНОСТЯХ НА ВХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ

Специальность 01.01.09 – дискретная математика
и математическая кибернетика

Редактор *Т. Н. Судовчихина*
Òåõíè÷åñêèé ðåäàêòîð *Í. À. Âüÿëêîâà*
Êîððåêòîð *Ж. А. Лубенцова*
Компьютерная верстка *М. Б. Жучковой*

ИД № 06494 от 26.12.01
Сдано в производство 23.03.2007. Формат 60x84 1/16.
Бумага писчая. Печать офсетная. Печ. л. 1,0.
Заказ № 156. Тираж 100.

Издательство Пензенского государственного университета.
440026, Пенза, Красная, 40.